

1 VAIHTOEHTOJEN LUKUMÄÄRÄ

POHDITTAVAA

1. Kotikaupungistaan myyntiedustaja voi kulkea kolmeen kaupunkiin. Seuraavasta kaupungista on kaksi mahdollista kohdetta jäljellä. Kolmannesta kaupungista on kuljettava viimeiseen jäljellä olevaan kaupunkiin.

Koska jokaista kolmea ensimmäistä kohdetta kohden on kaksi vaihtoehtoa, muodostuu $3 \cdot 2 = 6$ erilaista reitin alkua. Kahden ensimmäisen kaupungin jälkeen myyntiedustajalla on vain yksi mahdollinen reitti jäljellä, joten erilaisia reittejä on 6.

Vastaus: 6 reittiä

2. Appletin avulla havaitaan, että kiertämällä nelikulmion ulkosivuja pitkin myötä tai vastapäivään, kuljetaan lyhin matka. Myyntiedustajan lyhimmän reitin pituus on 135 km.

Vastaus: 135 km

1.1 Jonot ja joukot

ALOITA PERUSTEISTA

101. Merkitään karkkeja värien alkukirjaimilla.

Musta = M

Valkoinen = V ja

Punainen = P

Pussista otetaan kaksi karkkia. Ne voivat olla
musta ja valkoinen eli MV tai
musta ja punainen eli MP tai
valkoinen ja punainen eli VP.

Vastaus: MV, MP ja VP

102. Korttipakassa on 52 korttia, jotka jakaantuvat neljään maahan. Punaisia maita ovat hertta ja ruutu, mustia pata ja risti. Jokaisessa maassa on yksi kortti, jonka arvo on jokin luvuista 1–13.

a) Patoja on 13 kpl ja punaisia on $2 \cdot 13 = 26$ kpl. Yhteensä patoja tai punaisia on $13 + 26 = 39$.

Vastaus: 39

b) Kaikki padat ovat mustia. Korttipakassa ei ole yhtään korttia, joka olisi pata ja punainen.

Vastaus: 0

c) Korttipakassa on 13 pataa ja 4 ässää. Yksi ässistä on pataässä. Patoja tai ässiä on yhteensä $13 + 4 - 1 = 16$.

Vastaus: 16

- 103.** a) Merkitään henkilöitä heidän nimien etukirjaimilla:
Bill = B, Donald = D, Hillary = H ja Melania = M

Luetellaan erilaiset halausparit:

BD, BH, BM,
DH, DM,
HM

Vastaus: BD, BH, BM, DH, DM ja HM

- b) a-kohdan perusteella yhteensä halataan 6 kertaa.

Vastaus: 6 kertaa

- c) Valitaan a-kohdan halauksista ne, joissa Donald on mukana: BD, DH ja DM. Donald halaa kolme kertaa.

Vastaus: 3 kertaa

- 104.** Merkitään kappaleiden nimiä niiden alkukirjainten mukaan:
Bohemian Rhapsody = B
Hotel California = H
Stairway to heaven = S

Luetellaan erilaiset soittojärjestykset:

BHS, BSH
HBS, HSB
SBH, SHB

Järjestyksiä on kuusi.

Vastaus: BHS, BSH, HBS, HSB, SBH ja SHB; kuusi järjestystä

- 105.** Maaliskuussa on 31 päivää. Kokous kestää 3 päivää.
Tarkastellaan kokouksen aloituspäivien vaihtoehtoja.
Ensimmäinen mahdollinen aloituspäivä on maaliskuun 1. päivä.
Viimeinen mahdollinen aloituspäivä on maaliskuun 29. päivä, koska kokouksen täytyy myös päättyä maaliskuussa.

Kokouksen aloituspäivä voidaan valita 29 eri tavalla.

Vastaus: 29:llä eri tavalla

- 106.** Määritetään appletin avulla eri vaihtoehdot, joilla käytettävät häkit voidaan valita.

Laaditaan erilaisista asemista, joissa koirat voivat olla.

1. asema:	P		H		
	H		P		
2. asema:	P			H	
	H			P	
3. asema:	P				H
	H				P
4. asema:		P		H	
		H		P	
5. asema:		H			P
		P			H
6. asema:			H		P
			P		H

Pupen ja Haukun paikat voidaan valita 12 eri tavalla.

Vastaus: 12 eri tavalla

107. a) Jonossa järjestyksellä on merkitystä.

A: Viesti juostaan tietyssä järjestyksessä, joten siinä kyseessä on jono.

D: Kokouksen puheenjohtaja valitaan ensin ja sihteeri sen jälkeen, joten tilanne voidaan tulkita jonoksi.

Vastaus: A ja D

b) Joukossa järjestyksellä ei ole merkitystä.

B: Mielipidetutkimukseen valittujen henkilöiden järjestyksellä ei ole väliä, eli kyseessä on henkilöiden joukko.

C: Umpimähkään nostettujen lottopallojen numeroiden järjestyksellä ei ole väliä, eli kyseessä on pallojen joukko.

E: Kaverien joukosta muodostetussa keilausporukassa on kyse järjestämättömästä joukosta.

Vastaus: B, C ja E

VAHVISTA OSAAMISTA

108. Jonossa ja joukossa on erilaisia kokoonpanoja. Jonossa on järjestys, mutta joukossa ei.

Esimerkki jonosta on viestijoukkueen lähtöjärjestys ja joukosta jalkapallojoukkue.

109. Havainnollistetaan tuloksia taulukon avulla. Merkitään riville tavallisen arpakuution mahdolliset tulokset ja pystysarakkeelle 4-sivuisen nopan mahdolliset tulokset. Lasketaan taulukkoon heittojen tulosten tulot.

		arpakuutio					
		1	2	3	4	5	6
4-sivuisen noppa	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	4	6	8	10	12
	3	3	6	9	12	15	18
	4	4	8	12	16	20	24

Heiton silmälukujen tulo voi olla 6 kolmella eri tavalla.

Vastaus: 3:lla eri tavalla

- 110. a)** Kahden arpakuution silmälukujen summa on pienimmillään $1 + 1 = 2$. Sadalla pelivuorolla pelaaja voi edetä siis vähintään $2 \cdot 100 = 200$ askelta.

Vastaus: 200 askelta

- b)** Kahden arpakuution silmälukujen summa on suurimmillaan $6 + 6 = 12$. Sadalla pelivuorolla pelaaja voi edetä siis korkeintaan $12 \cdot 100 = 1200$ askelta.

Vastaus: 1200 askelta

- 111.** Merkitään miehiä kirjaimilla M ja P ja naisia kirjaimilla N, T ja A. Luetellaan kaikki pelit:

kaksi miestä: MP

yksi mies ja

yksi nainen:	MN	MT	MA
	PN	PT	PA

kaksi naista:	NT	NA	TA
---------------	----	----	----

Pelejä on yhteensä 10 ja niistä 3 pelataan naisten kesken.

Lasketaan naisten välisten pelien osuus prosentteina: $\frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$

Vastaus: 30 prosenttia

- 112.** Viikossa on seitsemän päivää. Yhtenä päivänä ei satanut eikä tuullut. Koska kolmena päivänä satoi ja neljänä päivänä tuuli, niin vain yhtenä päivänä sekä satoi että tuuli.

Vastaus: yhtenä päivänä

- 113.** Ensimmäinen matkaanlähtöpäivävaihtoehto on kuukauden 1. päivä ja viimeinen on 7 päivää ennen kuun loppua. Kaikki muut päivät 1. ja viimeisen mahdollisen lähtöpäivän välillä ovat myös mahdollisia matkaanlähtöpäiviä.

Koska Jannika voi valita lähtöpäivän 22 eri tavalla, on kuukaudessa $21 + 7 = 28$ päivää. Kyseessä on helmikuu.

Vastaus: helmikuu

- 114.** Alussa on 16 kilpailijaa. Jokaiseen väentöotteluun osallistuu kaksi kilpailijaa kerrallaan. Häviäjät tippuvat kilpailusta pois. Taulukoidaan otteluiden ja kilpailijoiden määriä.

	Kilpailijoiden määrä kierroksen alussa	Ottelujen määrä kierroksella
1. kierros	16	8
2. kierros	8	4
3. kierros	4	2
4. kierros	2	1

Väentökierroksia tulee yhteensä 4. Näillä kierroksilla kisataan yhteensä $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ kädenväentöottelua. Turnauksen voittaja osallistuu jokaisella kierroksella yhteen otteluun, eli hän osallistuu neljään otteluun.

Vastaus: Kisataan yhteensä 15 ottelua. Voittaja osallistuu neljään otteluun.

- 115. a)** Arpakuution kuudesta silmäluvusta yksi on 4 ja viisi muita numeroita, siis $\frac{1}{6}$ silmäluvuista on kuutosia. On oletettavaa, että tuhannesta heitosta $\frac{1}{6}$:ssa tulee silmäluvuksi 6.

$$1000 \cdot \frac{1}{6} = 166,666... \approx 167$$

Silmäluvuksi saadaan nelonen noin 167 kertaa.

Vastaus: 167 kertaa

- b)** Arpakuution silmäluvuista 2, 4 ja 6 ovat parillisia ja silmäluvut 1, 3 ja 5 parittomia, siis $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ silmäluvuista on parillisia. On oletettavaa, että tuhannesta heitosta puolet saaduista silmäluvuista on parillisia.

$$1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$$

Silmäluvuksi saadaan parillinen noin 500 kertaa.

Vastaus: 500 kertaa

- 116. a)** Määritetään appletin avulla uintipäivät. Merkitään uintipäivää kirjaimella U ja taulukoidaan vaihtoehdot. Huomioidaan, että jos uintipäivä on maanantai, niin edellisen viikon sunnuntai ei voi olla uintipäivä.

	ma	ti	ke	to	pe	la	su
1. vaihtoehto:	U		U		U		
2. vaihtoehto:	U		U			U	
3. vaihtoehto:	U			U		U	
4. vaihtoehto:		U		U		U	
5. vaihtoehto:		U		U			U
6. vaihtoehto:		U			U		U
7. vaihtoehto:			U		U		U

Uintipäivät voi valita seitsemällä tavalla.

Vastaus: 7 tavalla

- b)** Määritetään appletin avulla uintipäivät. Merkitään uintipäivää kirjaimella U ja taulukoidaan vaihtoehdot. Huomioidaan, että jos uintipäivä on maanantai, niin edellisen viikon sunnuntai ei voi olla uintipäivä.

	ma	ti	ke	to	pe	la	su
1. vaihtoehto:	U		U				
2. vaihtoehto:	U			U			
3. vaihtoehto:	U				U		
4. vaihtoehto:	U					U	
5. vaihtoehto:		U		U			
6. vaihtoehto:		U			U		
7. vaihtoehto:		U				U	
8. vaihtoehto:		U					U
9. vaihtoehto:			U		U		
10. vaihtoehto:			U			U	
11. vaihtoehto:			U				U
12. vaihtoehto:				U		U	
13. vaihtoehto:				U			U
14. vaihtoehto:					U		U

Uintipäivät voi valita 14 tavalla.

Vastaus: 14 tavalla

- c)** Vähintään kaksi uintipäivää tarkoittaa, että uintipäiviä on 2 tai enemmän. b-kohdan mukaan kaksi uintipäivää voi valita 14 tavalla ja a-kohdan mukaan kolme uintipäivää voi valita 7 tavalla. Viikkoon ei mahdu neljää uintipäivää niin, että kaksi uintia ei olisi peräkkäisinä päivinä.

Uintipäivät voi valita $14 + 7 = 21$ tavalla.

Vastaus: 21 tavalla

117. Taulukoidaan erilaisia järjestyksiä.

Huomioidaan ratkaisussa, että Petran on käveltävä ensin ja Robert ja Eva eivät voi olla peräkkäin.

	1. henkilö	2. henkilö	3. henkilö	4. henkilö	5. henkilö
1. järjestys	Petra	Makwan	Robert	Mira	Eva
2. järjestys	Petra	Eva	Makwan	Robert	Mira
3. järjestys	Petra	Mira	Eva	Makwan	Robert
4. järjestys	Petra	Robert	Mira	Eva	Makwan
5. järjestys	Petra	Mira	Robert	Makwan	Eva
6. järjestys	Petra	Eva	Mira	Robert	Makwan
7. järjestys	Petra	Makwan	Eva	Mira	Robert
8. järjestys	Petra	Robert	Makwan	Eva	Mira

Järjestyksiä on 8.

Vastaus: 8:ssa eri järjestyksessä

- 118.** Taulukoidaan kaikki heittosarjat, joissa kolikkoa heitetään 4 kertaa. Merkitään kruunaa kirjaimella R ja klaavaa kirjaimella L.

	1. heitto	2. heitto	3. heitto	4. heitto
4 kruunaa	R	R	R	R
3 kruunaa ja 1 klaava	R	R	R	L
	R	R	L	R
	R	L	R	R
	L	R	R	R
2 kruunaa ja 2 klaavaa	R	R	L	L
	R	L	R	L
	R	L	L	R
	L	R	R	L
	L	R	L	R
	L	L	R	R
1 kruuna ja 3 klaavaa	L	L	L	R
	L	L	R	L
	L	R	L	L
	R	L	L	L
4 klaavaa	L	L	L	L

- a)** Taulukon perusteella yhtä monta kruunaa ja klaavaa saadaan kuudessa erilaisessa heittosarjassa.

Vastaus: 6 heittosarjaa

- b)** Vähintään kaksi kruunaa tarkoittaa heittosarjoja, joissa on kaksi, kolme tai neljä kruunaa. Taulukon perusteella niitä on $6 + 4 + 1 = 11$.

Vastaus: 11 heittosarjaa

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 119.** Punaisia kortteja ovat kaikki hertat ja ruudut. Niitä on $13 + 13 = 26$. Kuninkaita on herttakuningas, ruutukuningas, patakuningas ja ristikuningas, eli 4 kpl.

Eksklusiivisen "tai":n mukaan "Kortti on punainen tai kuningas" tarkoittaa sitä, että kortti ei saa olla sekä punainen että kuningas. Kuninkaista siis jätetään laskematta herttakuningas ja ruutukuningas, jotka on laskettu sekä punaisten että kuninkaiden joukoissa.

Mahdollisia kortteja on $26 + 4 - 2 = 28$.

Vastaus: 28 kortille

- 120.** Taulukoidaan eri rooleja. Merkitään pelaajia etukirjaimen mukaan: Anne = A, Beata = B, Charlotta = C ja Daniel = D.

Vaihtoehto	mafioso	hullu	kansalaiset
1	A	B	CD
2	B	A	CD
3	C	D	AB
4	D	C	AB
5	A	C	BD
6	C	A	BD
7	A	D	BC
8	D	A	BC
9	B	C	AD
10	C	B	AD
11	B	D	AC
12	D	B	AC

Roolit voivat jakautua 12:lla eri tavalla pelaajien kesken.

Vastaus: 12:lla eri tavalla

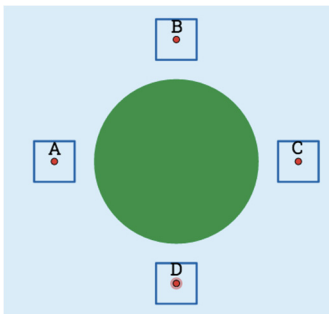
- 121.** Jokaisessa vaunussa pitää olla ainakin yksi matkustaja. Nyt ei tarvitse kiinnittää huomiota siihen, kuka matkustaja on missäkin vaunussa. Taulukoidaan mahdollisia vaunujen miehityksiä. Merkitään matkustajaa x-kirjaimella.

	1. vaunu	2. vaunu	3. vaunu	4. vaunu	5. vaunu
1. vaihtoehto	xxx	x	x	x	x
2. vaihtoehto	x	xxx	x	x	x
3. vaihtoehto	x	x	xxx	x	x
4. vaihtoehto	x	x	x	xxx	x
5. vaihtoehto	x	x	x	x	xxx
6. vaihtoehto	xx	xx	x	x	x
7. vaihtoehto	xx	x	xx	x	x
8. vaihtoehto	xx	x	x	xx	x
9. vaihtoehto	xx	x	x	x	xx
10. vaihtoehto	x	xx	xx	x	x
11. vaihtoehto	x	xx	x	xx	x
12. vaihtoehto	x	xx	x	x	xx
13. vaihtoehto	x	x	xx	xx	x
14. vaihtoehto	x	x	xx	x	xx
15. vaihtoehto	x	x	x	xx	xx

Matkustajat voivat asettua vaunuihin 15:llä eri tavalla.

Vastaus: 15:llä eri tavalla

- 122.** Määritetään erilaiset istumajärjestykset siten, että yksi henkilö pysyy paikallaan ja muut vaihtavat järjestystä. Merkitään henkilöitä kirjaimilla A, B, C ja D.



Taulukoidaan mahdolliset järjestykset. Käytetään taulukossa merkintätapaa, jossa esimerkiksi kuvan istumajärjestys kirjoitetaan ABCD.

1. järjestys	ABCD
2. järjestys	ABDC
3. järjestys	ACBD
4. järjestys	ACDB
5. järjestys	ADBC
6. järjestys	ADCB

Henkilöt voivat muodostaa kuusi erilaista istumajärjestystä.

Vastaus: 6 istumajärjestystä

- 123.** a) Taulukoidaan vastausvaihtoehdot. Merkitään oikein olevaa vastausta kirjaimella O ja väärin mennyttä vastausta kirjaimella V.

	1. tehtävä	2. tehtävä	3. tehtävä	4. tehtävä	5. tehtävä
5 oikein	O	O	O	O	O
4 oikein ja 1 väärin	O	O	O	O	V
	O	O	O	V	O
	O	O	V	O	O
	O	V	O	O	O
	V	O	O	O	O
3 oikein ja 2 väärin	O	O	O	V	V
	O	O	V	V	O
	O	V	V	O	O
	V	V	O	O	O
	O	O	V	O	V
	O	V	O	O	V
	V	O	O	O	V
	V	O	O	V	O
	V	O	V	O	O

Taulukointia ei tarvitse jatkaa loppuun. Kokeesta voi saada kolme tehtävää oikein yhteensä 10 tavalla.

Vastaus: 10 tavalla

- b)** Kolme pistettä saa niissä tilanteissa, joissa on
- vastannut kolmeen tehtävään oikein ja jättänyt vastaamatta kahteen tehtävään
 - vastannut neljään tehtävään oikein ja yhteen väärin

Rivejä joissa on vastattu 3 oikein ja jätetty vastaamatta kahteen kohtaan on yhtä monta kuin rivejä, joissa on vastattu 3 oikein ja 2 väärin.

a-kohdan taulukon perusteella "3 oikein"-vaihtoehtoja on 10 ja "4 oikein"-vaihtoehtoja on 5. Kokeessa voi saada kolme pistettä $10 + 5 = 15$ tavalla.

Vastaus: 15 tavalla

- 124. a)** Jokaista 51 poikaa kohti syntyy 49 tyttöä, joten on hieman todennäköisempää, että äidillä on veli kuin, että äidillä on sisko. Vastaavasti isän kohdalla.

Tällä perusteella enoja ja setiä on enemmän kuin tätejä.

Vastaus: Enoja ja setiä yhteensä on enemmän.

- b)** Enot ja sedät ovat poikia, joten heitä syntyy keskimäärin yhtä paljon.

Vastaus: Enoja ja setiä on yhtä paljon

1.2 Tuloperiaate ja kertoma

ALOITA PERUSTEISTA

125. a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

c) $3! \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

126. a) $10! = 3\,628\,800$

b) $12! = 479\,001\,600$

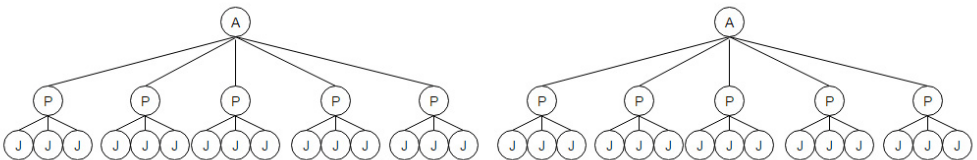
c) $\underbrace{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 7}_{19 \text{ kpl}} = 2,154 \dots \cdot 10^{22} \approx 2,15 \cdot 10^{22}$

127. Ensimmäinen esiintyjä voidaan valita seitsemällä eri tavalla, toinen kuudella, kolmas viidellä jne...

Eri järjestyksiä on tuloperiaatteen mukaan siis
 $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$.

Vastaus: 5040:ssä eri järjestyksessä

128. Merkitään alkuruokia kirjaimella A, pääruokia kirjaimella P ja jälkiruokia kirjaimella J. Piirretään puukaavio.



Puukaaviosta nähdään että erilaisia kolmen ruokalajin illallisia on 30.

Vastaus: 30 illallista

129. Jaetaan neljä erisuuruista stipendiä yksi kerrallaan.

a) Ensimmäisen stipendin saaja voidaan valita seitsemällä eri tavalla.

Vastaus: 7 eri tavalla

b) Jokainen voi saada korkeintaan yhden stipendin, jolloin toisen stipendin voi saada kuka tahansa kuudesta jäljellä olevasta abiturientista. Toisen stipendin saaja voidaan valita kuudella eri tavalla.

Vastaus: 6 eri tavalla

c) Ensimmäisen stipendin voi saada seitsemän eri henkilöä, jolloin toisen kuusi, kolmannen viisi ja neljännen neljä.

Tuloperiaatteen mukaan stipendit voidaan jakaa $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ eri tavalla.

Vastaus: 840 eri tavalla

130. a) Numeroita ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. Niitä on yhteensä 10.

Lukon ensimmäinen numero voi olla jokin 10 vaihtoehdosta.

Lukon toinen numero voi myös olla jokin 10 vaihtoehdosta.

Vastaavasti kolmas ja neljäs numero.

Tuloperiaatteen mukaan mahdollisia lukituskoodin numeroyhdistelmiä on $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\,000$.

Vastaus: 10 000

b) Jos yhden koodin kokeiluun kuluu 3 sekuntia, niin 10 000 koodin kokeiluun kuluu $3 \cdot 10\,000 = 30\,000$ sekuntia.

$$30\,000 \text{ s} = \frac{30\,000}{60} \text{ min} = 500 \text{ min} = \frac{500}{60} \text{ h} = 8,333\dots \text{ h} = 8 \text{ h } 20 \text{ min}$$

Lukon avaamiseen kuluu korkeintaan 8 tuntia ja 20 minuuttia.

Vastaus: 8h 20 min

- 131. a)** Ensimmäinen opiskelija voi olla kuka vain 38 opiskelijasta. Toinen opiskelija voi olla kuka vain 37 opiskelijasta. Kolmas voi olla kuka vain 36 opiskelijasta jne...

Tuloperiaatteen mukaan opiskelijat voivat tulla luokkaan
 $38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot \dots \cdot 1 = 38! = 5,230\dots \cdot 10^{44} \approx 5,2 \cdot 10^{44}$
eri järjestyksessä.

Vastaus: $5,2 \cdot 10^{44}$:ssä eri järjestyksessä

- b)** Nyt ensimmäinen opiskelija voi olla kuka vain 41 opiskelijasta. Toinen opiskelija voi olla kuka vain 40 opiskelijasta. jne... Viimeinen luokkaan tulija voi olla kuka vain jäljellä olevista neljästä opiskelijasta.

Tuloperiaatteen mukaan opiskelijat voivat tulla luokkaan
 $41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot \dots \cdot 4 = 5,575\dots \cdot 10^{48} \approx 5,6 \cdot 10^{48}$ erilaisessa järjestyksessä.

Vastaus: $5,6 \cdot 10^{48}$:ssä eri järjestyksessä

VAHVISTA OSAAMISTA

- 132.** Sanassa LASKU on viisi kirjainta.

Muodostettavan nelikirjaimisen merkkijonon ensimmäinen kirjain voidaan valita viidellä eri tavalla. Toinen kirjain neljällä, kolmas kolmella ja neljäs kahdella.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia nelikirjaimisia merkkijonoja voidaan muodostaa $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ kpl.

Vastaus: 120 merkkijonoa

- 133.** Shakkilaudan ensimmäisen ruudun väri voi olla jompikumpi kahdesta vaihtoehdosta, samoin toinen, kolmas, neljäs aina viimeisen kuudenteenkymmeneenneljänteen ruutuun asti.

Tuloperiaatteen mukaan väriyhdistelmiä on

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{64 \text{ kpl}} = 2^{64} = 1,8446 \dots \cdot 10^{19} \approx 1,84 \cdot 10^{19}$$

Laudalle voidaan muodostaa $1,84 \cdot 10^{19}$ erilaista väritystä.

Vastaus: $1,84 \cdot 10^{19}$ väritystä

- 134. a)** Ylin raita voi olla mikä tahansa kolmesta väristä. Keskimmaiselle raidalle on käytettävän kaksi väriä ja alimmalle raidalle jää vain yksi väri. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia värikokonaisuuksia on $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Voidaan muodostaa 6 erilaista kolmiraitaista lippua.

Vastaus: 6 lippua

- b)** Taulukoidaan mahdollisia yhdistelmiä

Ylin raita	Keskimmäinen raita	Alin raita
punainen	valkoinen	punainen
punainen	valkoinen	sininen
punainen	sininen	punainen
punainen	sininen	valkoinen
valkoinen	punainen	valkoinen
valkoinen	punainen	sininen
valkoinen	sininen	valkoinen
valkoinen	sininen	punainen
sininen	punainen	sininen
sininen	punainen	valkoinen
sininen	valkoinen	sininen
sininen	valkoinen	punainen

Voidaan muodostaa 12 erilaista kolmiraitaista lippua.

Vastaus: 12 lippua

- 135. a)** Kokeessa on 26 kohtaa ja jokaisessa kohdassa on kolme vastausvaihtoehtoa.
Ensimmäiseen kohtaan voi vastata siis kolmella eri tavalla.
Toiseen kohtaan voi vastata myös kolmella eri tavalla.
Vastaavasti myös muihin kohtiin voi vastata kolmella eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia vastausrivejä on

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{26 \text{ kpl}} = 3^{26} = 2,541\dots \cdot 10^{12} \approx 2,5 \cdot 10^{12}.$$

Vastaus: $2,5 \cdot 10^{12}$ vastausriviä

- b)** Jokaisen vastauksen täytyy olla oikein.
Ensimmäisessä kohdassa on yksi oikea vastaus.
Toisessa kohdassa on yksi oikea vastaus.
Vastaavasti myös muissa kohdissa on vain yksi oikea vastaus kussakin.

Tuloperiaatteen mukaan rivejä, joissa jokainen vastaus on oikein, on

$$\underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{26 \text{ kpl}} = 1^{26} = 1.$$

Vastaus: 1 vastausrivi

- c)** Jokaisella rivillä on kaksi väärää vastausvaihtoehtoa.
Tuloperiaatteen mukaan rivejä, joissa jokainen vastaus on väärin, on

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{26 \text{ kpl}} = 2^{26} = 67\,108\,864.$$

Vastaus: 67 108 864 vastausriviä

- 136. a)** Mahdollisia puheenjohtajamaita on aluksi 27. Toisena vuonna ensimmäisen vuoden puheenjohtaja ei voi olla puheenjohtajana uudestaan, joten vaihtoehtoja uudeksi puheenjohtajamaaksi on 26. Kolmantena vuonna kaksi edellistä maata ei voi toimia puheenjohtajamaana, joten vaihtoehtoja on 25.

Tuloperiaatteen mukaan kolme seuraavaa puheenjohtajamaata voidaan valita $27 \cdot 26 \cdot 25 = 17\,550$ eri tavalla.

Vastaus: 17 550:llä eri tavalla

- b)** Nyt sama maa voi toimia puheenjohtajamaana useaan kertaan, joten vaihtoehtoja puheenjohtajamaaksi on jokaisena vuonna 27.

Tuloperiaatteen mukaan kolme seuraavaa puheenjohtajamaata voidaan valita $27 \cdot 27 \cdot 27 = 27^3 = 19\,683$ eri tavalla.

Vastaus: 19 683:lla eri tavalla

- 137.** Tiedoston nimessä mahdollisia kirjaimia oli kirjaimet A–Z. Näitä on yhteensä 26 kpl. Käytettävissä olevia numeroita oli 10 kpl ja erikoismerkkejä 16 kpl.

Näistä $26 + 10 + 16 = 52$ merkistä valittiin 8 merkkiä tiedoston nimeen.

Jokaiselle tiedoston nimen merkille on 52 vaihtoehtoa, joten erilaisia tiedostonnimiä oli tuloperiaatteen mukaan käytettävissä

$$\underbrace{52 \cdot 52 \cdot \dots \cdot 52}_{8 \text{ kpl}} = 52^8 = 5,345 \dots \cdot 10^{13} \approx 5,3 \cdot 10^{13} \text{ kpl.}$$

Vastaus: $5,3 \cdot 10^{13}$ nimeä

- 138. a)** Arpakuution silmäluvuissa on yksi kuutonen.
Ensimmäisessä arpakuutionheitossa on yksi mahdollisuus saada kuutonen. Samoin toisessa, kolmannessa ja neljännessä.

Tuloperiaatteen mukaan $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ heittosarjassa saadaan jokaisella kuutonen.

Vastaus: yhdessä heittosarjassa

- b)** Arpakuutiossa on silmäluvut 1–6.
Ensimmäisen heiton silmäluku voi olla mikä tahansa kuudesta vaihtoehdosta.

Toisen heiton silmäluvun täytyy olla jokin muu kuin ensimmäisellä heitolla saatu. Silmäluku voi olla siis jokin viidestä vaihtoehdosta.

Kolmannen heiton silmäluvun täytyy olla jokin muu kuin ensimmäisellä tai toisella heitolla saatu silmäluku. Silmäluku voi olla siis jokin neljästä vaihtoehdosta.

Vastaavasti neljännen heiton silmäluvun täytyy olla jokin muu kuin aiemmin saadut silmäluvut. Neljännen heiton silmäluvulle on siis kolme vaihtoehtoa.

Tuloperiaatteen mukaan $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ heittosarjassa saadaan jokaisella heitolla eri silmäluku.

Vastaus: 360:ssä eri heittosarjassa

- c)** Ensimmäisen arpakuution silmäluku voi olla mikä tahansa kuudesta vaihtoehdosta.

Koska toisella, kolmannella ja neljännellä heitolla täytyy saada sama silmäluku kuin ensimmäisellä heitolla, on kullakin heitolla vain yksi vaihtoehto.

Tuloperiaatteen mukaan $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ heittosarjassa saadaan jokaisella heitolla sama silmäluku.

Vastaus: 6 heittosarjaa

- 139.** Pelikierroksia on yhteensä 10. Jokaisella kierroksella on kolme vaihtoehtoa: kivi, paperi tai sakset.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia pelistrategioita on

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{10 \text{ kpl}} = 3^{10} = 59\,049.$$

Tehtävässä esitetyn pelistrategian lisäksi Lotalla on $59\,049 - 1 = 59\,048$ muuta mahdollista pelistrategiaa.

Vastaus: 59 048 muuta pelistrategiaa

- 140. a)** Kolikko voi olla jokin kuudesta erilaisesta kolikosta. Samoin avain voi olla jokin kuudesta erilaisesta avaimesta.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia nostettavia yhdistelmiä on $6 \cdot 6 = 36$.

Vastaus: 36 yhdistelmää

- b)** Kolikko voi olla jokin kuudesta erilaisesta kolikosta. Avain voi olla jokin kahdestatoista erilaisesta avaimesta.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia nostettavia yhdistelmiä on $6 \cdot 12 = 72$.

Vastaus: 72 yhdistelmää

141. a) Skootteria on yhteensä $5 + 4 = 9$.

Jonon ensimmäinen skootteri voi olla jokin yhdeksästä vaihtoehdosta.
Toinen voi olla jokin kahdeksasta jäljellä olevasta vaihtoehdosta. jne...

Tuloperiaatteen mukaan skootterit voivat asettua jonoon
 $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 362\,880$ eri tavalla.

Vastaus: 362 880:llä eri tavalla

b) Punaiset skootterit asettuvat jonoon ensin ja valkoiset perään.
Ensimmäinen skootteri on jokin viidestä punaisesta, toinen jokin neljästä jäljelle jääneestä punaisesta. jne...

Kun kaikki punaiset skootterit ovat jonossa, kuudes skootteri on jokin neljästä valkoisesta. Seitsemäs skootteri on jokin jäljelle jääneistä kolmesta valkoisesta. Jne.

Tuloperiaatteen mukaan skootterit voivat asettua jonoon
 $\underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{punaiset}} \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{valkoiset}} = 5! \cdot 4! = 2880$ eri tavalla.

Vastaus: 2880:llä eri tavalla

c) Jonon ensimmäinen skootteri on punainen: 5 vaihtoehtoa
Jonon toinen skootteri on valkoinen: 4 vaihtoehtoa
Jonon kolmas skootteri on punainen: 4 vaihtoehtoa
Jonon neljäs skootteri on valkoinen: 3 vaihtoehtoa
Jonon viides skootteri on punainen: 3 vaihtoehtoa
Jonon kuudes skootteri on valkoinen: 2 vaihtoehtoa
Jonon seitsemäs skootteri on punainen: 2 vaihtoehtoa
Jonon kahdeksas skootteri on valkoinen: 1 vaihtoehto
Jonon yhdeksäs skootteri on punainen: 1 vaihtoehto

Tuloperiaatteen mukaan skootterit voivat asettua jonoon
 $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2880$ eri tavalla.

Vastaus 2880:llä eri tavalla

- 142. a)** Ensimmäinen kappale voidaan valita 20:llä eri tavalla.
Toinen kappale 20:llä eri tavalla.
Kolmas kappale 20:llä eri tavalla.
Neljäs kappale 20:llä eri tavalla.
Viides kappale 20:llä eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia viiden kappaleen sikermiä voidaan arpoa $20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^5 = 3\,200\,000$.

Vastaus: 3 200 000 sikermää

- b)** Lasketaan sellaisten viiden kappaleen sikermien lukumäärä, joissa jokainen kappale soitetaan korkeintaan kerran.

Ensimmäinen kappale voidaan valita 20 eri tavalla.
Toinen kappale 19:llä eri tavalla.
Kolmas kappale 18:lla eri tavalla.
Neljäs kappale 17:llä eri tavalla.
Viides kappale 16:lla eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan sikermiä, joissa mitään kappaletta ei soiteta enempää kuin kerran, on $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1\,860\,480$.

Lasketaan kuinka monta prosenttia 1 860 480 on 3 200 000:sta.

$$\frac{1\,860\,480}{3\,200\,000} = 0,5814$$

a-kohdan sikermistä noin 58 % on sellaisia, joissa mitään kappaletta ei soiteta enempää kuin kerran.

Vastaus: 58 %

143. a) $\frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{30}{1} = 30$

b) $\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{30 \cdot 4}{1} = 120$

c) $\frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{42}{2} = 21$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

144. a) Sanassa HIIRI on viisi kirjainta. Ne voivat olla $5!$ eri järjestyksessä. Kirjaimista kolme on kuitenkin samoja. Nämä kolme I-kirjainta voivat olla $3!$ eri järjestyksessä.

Erilaisia viisikirjaimisten merkkijonojen määrä saadaan jakamalla kaikkien merkkijonojen määrä $5!$ keskenään samanlaisten merkkijonojen määrällä $3!$.

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

Erilaisia viisikirjaimisia merkkijonoja voidaan muodostaa 20.

Vastaus: 20 merkkijonoa

- b) Sanassa KANNETTAVA on 10 kirjainta. Ne voivat olla $10!$ eri järjestyksessä. Sanassa KANNETTAVA on kolme A-kirjainta, kaksi N-kirjainta ja kaksi T-kirjainta. Kolme A-kirjainta voi olla $3!$ eri järjestyksessä ja kaksi N-kirjainta voi olla $2!$ eri järjestyksessä, samoin kaksi T-kirjainta.

Erilaisten 10-kirjaimisten merkkijonojen määrä saadaan jakamalla kaikkien merkkijonojen määrä $10!$ keskenään samanlaisten merkkijonojen määrällä $3! \cdot 2! \cdot 2!$.

$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\,200$$

Erilaisia 10-kirjaimisia merkkijonoja voidaan muodostaa 151 200.

Vastaus: 151 200 merkkijonoa

145. Korttipakassa on 52 korttia, joten tuloperiaatteen mukaan erilaisia viiden pelikortin jonoja on $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311\,875\,200$.

- a) Valitaan korttipakasta ensimmäinen kortti. Se voi olla mikä vain 52 kortista. Toisen kortin täytyy olla samaa maata kuin ensimmäisen. Näitä kortteja on pakassa jäljellä 12. Kolmas kortti on oltava jokin saman maan 11 kortista, neljäs jokin 10 kortista ja viides jokin 9 kortista.

Tuloperiaatteen mukaan viiden kortin jonoja, joissa kaikki kortit ovat samaa maata on $52 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 617\,760$.

Lasketaan osuus prosentteina.

$$\frac{617\,760}{311\,875\,200} = 0,00198... \approx 0,2\%$$

Vastaus: 0,2 %

- b) Valitaan korttipakasta ensimmäinen kortti. Se voi olla mikä vain 52 kortista. Toisen kortin täytyy olla saman arvoinen ensimmäisen kortin kanssa. Näitä kortteja on pakassa jäljellä 3. Myös kolmannen kortin on oltava samanarvoinen, eli kaksi vaihtoehtoa. Neljännen kortin on oltava viimeinen pakan samanarvoinen kortti, eli yksi vaihtoehto. Viides kortti voi olla mikä vain pakassa jäljellä olevista korteista. Pakassa on jäljellä $52 - 4 = 48$ korttia.

Tuloperiaatteen mukaan kyseisiä viiden kortin jonoja on $52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 48 = 14\,976$.

Lasketaan osuus prosentteina.

$$\frac{14\,976}{311\,875\,200} = 0,000048... \approx 0,005\%$$

Vastaus: 0,005 %

- e) Nyt jonossa on neljä samanarvoista korttia ja yksi eriarvoinen kortti. Eriarvoinen kortti voi olla jonon ensimmäinen, toinen, kolmas, neljäs tai viimeinen kortti (kuten b-kohdassa).

Lasketaan eri tilanteiden mahdollisten jonojen lukumäärät.

Eriarvoinen kortti ensin ja samanarvoiset kortit lopussa:

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia jonoja on $52 \cdot 48 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 14\,976$.

Eriarvoinen kortti toisena:

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia jonoja on $52 \cdot 48 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 14\,976$.

Eriarvoinen kortti kolmantena:

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia jonoja on $52 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 2 \cdot 1 = 14\,976$.

Eriarvoinen kortti neljäntenä:

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia jonoja on $52 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 48 \cdot 1 = 14\,976$.

Eriarvoinen kortti viimeisenä:

b-kohdan mukaan erilaisia jonoja on 14 976.

Erilaisia jonoja on yhteensä $5 \cdot 14\,976 = 74\,880$.

Lasketaan osuus prosentteina.

$$\frac{74\,880}{311\,875\,200} = 0,00024\dots \approx 0,02\%$$

Vastaus: 0,02 %

- 146. a)** Parittomia numeroita ovat 1, 3, 5, 7 ja 9.
Ovikoodin ensimmäinen numero voidaan valita viidellä eri tavalla, toinen koodi neljällä eri tavalla, kolmas kolmella eri tavalla ja neljäs kahdella eri tavalla.

Huonoimmassa tapauksessa professori joutuu kokeilemaan tuloperiaatteen mukaan $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ koodia.

Vastaus: 120 koodia

- b)** Käytettävissä on nyt numerot 1, 3, 5 ja 7. Näitä on neljä. Luetellaan kaikki mahdolliset neljän numeron ovikoodit. Niitä on yhteensä $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

1357	1375	3157	3175
1537	1573	3517	3571
1735	1753	3715	3751
5137	5173	7135	7153
5317	5371	7315	7351
5713	5731	7513	7531

Taulukon perusteella huomataan, että lisäehdot täyttäviä koodeja ovat 3715 ja 5173.

Huonoimmassa tapauksessa pitää kokeilla kaksi koodia.

Vastaus: kaksi koodia

- 147.** Kassakaapissa on neljän luvun koodi. Mahdollisia lukuja ovat luvut 1-100.

Kassakaapin avaamiseksi on

- ensin arvattava oikea pyörityssuunta: 2 vaihtoehto
- arvattava oikein ensimmäinen luku: 100 vaihtoehtoa
- pyöräytetään 4 kierrosta
- arvattava oikein toinen luku: 100 vaihtoehtoa
- pyöräytetään 3 kierrosta
- arvattava oikein kolmas luku: 100 vaihtoehtoa
- pyöräytetään 2 kierrosta
- arvattava oikein neljäs luku: 100 vaihtoehtoa
- pyöräytetään 1 kierros

Jos kassakaapin koodi on tiedossa, pyörityksiä tulee $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Jokaiselle luvulle on 100 vaihtoehtoa, joten tuloperiaatteen mukaan erilaisia koodeja on $100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 = 100^4$.

Jos käydään kaikki koodimahdollisuudet läpi pyörityksiä joudutaan tekemään $2 \cdot 100^4 \cdot 10 = 2 \cdot (10^2)^4 \cdot 10^1 = 2 \cdot 10^9$.

Jos yhden pyörityksen tekeminen kestää sekunnin, niin $2 \cdot 10^9$ pyörityksen tekeminen kestää $2 \cdot 10^9$ sekuntia.

$$2 \cdot 10^9 \text{ s} = 64,300 \dots \text{ vuotta} \approx 64 \text{ vuotta}$$

Vastaus: $2 \cdot 10^9$ pyöritystä, n. 64 vuotta

- 148.** On osoitettava, että $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$.

Lähdetään liikkeelle vasemmasta puolesta ja muokataan se oikean puolen muotoon. Lavennetaan murtolukua tulolla, joka täydentää osoittajan lausekkeen kertomaksi.

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \overset{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1}} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{5!}$$

1.3 Kombinaatio

ALOITA PERUSTEISTA

149. a) $\binom{7}{4} = 35$

b) $\binom{6}{1} = 6$

c) $\binom{524}{523} = 524$

150. A: Viisihenkisestä ryhmästä valitaan johtaja viidellä eri tavalla.
Varajohtaja voidaan valita neljällä eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan vaihtoehtoja on $5 \cdot 4$.

Oikea vaihtoehto on III.

- B: Viisihenkinen ohjelmointiryhmä valitsee kaksi edustajaa. Valinta voidaan tehdä $\binom{5}{2}$ erilaisella tavalla.

Oikea vaihtoehto on II.

- C: Valitaan ensin yksi joukkueen jäsen. Valinta voidaan tehdä viidellä eri tavalla. Puolustuspari voidaan valita kahdella eri tavalla.
Tuloperiaatteen mukaan erilaisia valintoja on $5 \cdot 2$.

Oikea vaihtoehto on I.

Vastaus: A: III, B: II ja C: I

- 151. a)** Valitaan neljä henkilöä 79 opiskelijan joukosta. Abishow'n juontajat voidaan valita $\binom{79}{4} = 1\,502\,501$ eri tavalla.
Vastaus: 1 502 501:llä eri tavalla
- b)** Valitaan neljä pitsatäytettä neljästätoista mahdollisesta täytteestä. Neljän täytteen pizza voidaan valita $\binom{14}{4} = 1001$ eri tavalla.
Vastaus: 1001:llä eri tavalla
- c)** Valitaan kaksi herttaa kolmentoista hertan joukosta. Kaksi herttaa voidaan nostaa $\binom{13}{2} = 78$ eri tavalla.
Vastaus: 78:lla eri tavalla
- 152. a)** Kolmesta karhusta voidaan valita kaksi $\binom{3}{2} = 3$ eri tavalla.
Väite on väärin.
Vastaus: väärin, kolmella
- b)** Seitsemästä veljeksestä voidaan muodostaa $\binom{7}{3} = 35$ erilaista kolmen veljeksien joukkuetta. Väite on oikein.
Vastaus: oikein
- c)** Viisi pientä elefanttia voi olla $5! = 120$ erilaisessa jonossa.
Vastaus: oikein
- d)** Jonossa Lumikki on ensimmäisenä. Seitsemän kääpiötä voi olla $7!$ erilaisessa järjestyksessä. Tuloperiaatteen mukaan erilaisia järjestyksiä on $1 \cdot 7! = 5040$. Väite on väärin.
Vastaus: väärin, 5040

- 153.** Matkatoimistossa on 6 retkeä A, B, C, D, E ja F. Maija osallistuu kahteen vaihtoehtosta A, B, C ja D. Valinta voidaan tehdä $\binom{4}{2} = 6$ eri tavalla.

Näiden lisäksi Maija osallistuu toiseen retkistä E ja F. Valinta voidaan tehdä kahdella eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan Maija voi valita retket $6 \cdot 2 = 12$ erilaisella tavalla.

Vastaus: 12:lla eri tavalla

- 154.** Nea sai 15 pistettä. Koska jokaisesta oikein olevasta tehtävästä saa kolme pistettä, oikein olevia tehtäviä on $\frac{15}{3} = 5$.

Lasketaan kuinka monella eri tavalla nämä viisi tehtävää voidaan valita seitsemästä tehtävästä. Viisitoista pistettä voi saada $\binom{7}{5} = 21$ erilaisella tavalla.

Vastaus: 21:llä eri tavalla

VAHVISTA OSAAMISTA

- 155.** Kombinaatio tarkoittaa osajoukkoa. Alkio on joukon jäsen. Permutaatio tarkoittaa järjestettyä jonoa.

Vastaus: A: I, B: III ja C: II

- 156. a)** Korttipakassa on 52 korttia, joista 4 on ässiä.

Ässäparin voi muodostaa $\binom{4}{2} = 6$ eri tavalla.

Vastaus: 6 ässäparia

- b)** A-kohdan mukaan tietyn arvoinen pari voidaan muodostaa kuudella eri tavalla. Korttipakassa on 13 eri arvoista korttia, joten pari voidaan saada $13 \cdot 6 = 78$ eri tavalla.

Vastaus: 78 paria

- 157.** Suklaalajeja on 15.

Susanna voi valita niistä kolme $\binom{15}{3} = 455$ eri tavalla.

Ja neljä $\binom{15}{4} = 1365$ eri tavalla.

Susanna voi valita kolme tai neljä suklaata yhteensä $455 + 1365 = 1820$ eri tavalla. Susanna voi valmistaa 1820 erilaista lahjarasiaa.

Vastaus: 1820

158. Jarnon jalkatreeni muodostuu seuraavasti:

A: Ensimmäisistä liikkeistä valitaan kaksi, toisista liikkeistä kaksi ja kolmansista liikkeistä yksi TAI

B: ensimmäisistä liikkeistä kolme, toisista liikkeistä kaksi ja kolmansista liikkeistä yksi.

Ensimmäisistä liikkeistä voidaan valita kaksi $\binom{4}{2} = 6$ eri tavalla ja

kolme $\binom{4}{3} = 4$ eri tavalla.

Toisista liikkeistä voidaan valita kaksi $\binom{3}{2} = 3$ eri tavalla.

Kolmansista liikkeistä voidaan valita yksi kahdella eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan A-treenin voi muodostaa $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ eri tavalla ja B-treenin $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ eri tavalla.

Yhteensä erilaisia jalkalihantreenejä on $36 + 24 = 60$.

Jarno voi muodostaa jalkatreeninsä 60:llä eri tavalla.

Vastaus: 60:llä eri tavalla

- 159.** Ilpo pitää neljä kasvisruokapäivää viikossa.
Jos yksi kasvisruokapäivä on viikonloppuna, on kolme kasvisruokapäivää arkipäivinä.

Viikonloppupäivän voi valita kahdella eri tavalla ja arkipäivät $\binom{5}{3} = 10$ eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan vaihtoehtoja on $2 \cdot 10 = 20$.

Jos kaksi kasvisruokapäivää on viikonloppuna, on kaksi kasvisruokapäivää arkipäivinä.
Viikonlopun molempina päivinä on kasvisruokapäivä ja arkipäivät voi valita $\binom{5}{2} = 10$ eri tavalla. Vaihtoehtoja on siis 10.

Yhteensä erilaisia vaihtoehtoja on $20 + 10 = 30$.

Ilpo voi valita kasvisruokapäivät 30:llä eri tavalla.

Vastaus: 30:llä eri tavalla

- 160. a)** Kolme arpaa voidaan valita 400 arvan joukosta $\binom{400}{3} = 10\,586\,800$ eri tavalla.

Vastaus: 10 586 800 eri tavalla

- b)** Yksikään arpa ei voita tarkoittaa rivejä, joissa jokainen arpa on nostettu 350:n ”ei voittoa” arvan joukosta.

Kolme arpaa voidaan valita 350 arvan joukosta $\binom{350}{3} = 7\,084\,700$ tavalla.

A-kohdan tavoista 7 084 700 on sellaisia, joissa yksikään arpa ei voita.

Vastaus: 7 084 700

- c) Ainakin yksi arpa voittaa tarkoittaa tilanteita, joissa yksi arpa voittaa tai kaksi arpaa voittaa tai kolme arpaa voittaa.

Lasketaan vaihtoehdot kussakin tilanteessa erikseen.

Yksi arpa voittaa (ja kaksi arpaa ei voita):

Yksi arpa voidaan valita 50 arvan joukosta 50 eri tavalla.

Kaksi arpaa voidaan valita $400 - 50 = 350$ arvan joukosta

$$\binom{350}{2} = 61\,075 \text{ eri tavalla.}$$

Tuloperiaatteen mukaan eri vaihtoehtoja on $50 \cdot 61\,075 = 3\,053\,750$.

Kaksi arpaa voittaa (ja yksi arpa ei voita):

Kaksi arpaa voidaan valita 50 arvan joukosta $\binom{50}{2} = 1225$ eri tavalla.

Yksi arpa voidaan valita 350 arvan joukosta 350 eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan eri vaihtoehtoja on $1225 \cdot 350 = 428\,750$.

Kolme arpaa voittaa:

Kolme arpaa voidaan valita 50 arvan joukosta $\binom{50}{3} = 19600$ eri tavalla.

Yhteensä erilaisia tapoja on $3\,053\,750 + 428\,750 + 19600 = 3\,502\,100$.

A-kohdan tavoista 3 502 100 on sellaisia, joissa ainakin yksi arpa voittaa.

Vastaus: 3 502 100

- 161. a)** Kahdeksastatoista opiskelijasta voidaan koota erilaisia kolmen hengen ryhmiä $\binom{18}{3} = 816$.

Vastaus: 816 ryhmää

- b)** Kristiinan ja Vilman täytyy osua ryhmään, joten ryhmään valitaan enää yksi muu henkilö. Tämä valinta voidaan tehdä $18 - 2 = 16$ eri tavalla.

Lasketaan osuus prosentteina.

$$\frac{16}{816} = 0,0196... \approx 2\%$$

Noin 2 % a-kohdan tavoista on sellaisia, joissa ryhmään osuu sekä Kristiina että Vilma.

Vastaus: 2 %

- 162. a)** Kolmentoista hengen joukosta valitaan viisi. Valinta voidaan tehdä $\binom{13}{5} = 1287$ tavalla.

Vastaus: 1287:llä eri tavalla

- b)** Kolmentoista hengen joukosta valitaan kahdeksan. Valinta voidaan tehdä $\binom{13}{8} = 1287$ tavalla.

Vastaus: 1287:llä eri tavalla

- c)** a- ja b-kohtien tulokset ovat yhtä suuret. Tämä voidaan selittää sillä, että koska $5 + 8 = 13$, voidaan esimerkiksi b-kohdan kysymys muotoilla "Kuinka monella tavalla voidaan 13 henkilön joukosta jättää 5 valitsematta".

Vastaus: -

163. a) Ensimmäisen pöydän vieraat voidaan valita

$$\binom{80}{8} = 2,898... \cdot 10^{10} \approx 2,9 \cdot 10^{10} \text{ eri tavalla.}$$

Vastaus: $2,9 \cdot 10^{10}$:llä eri tavalla

b) Ensimmäiseen pöytään voidaan valita vieraat $\binom{80}{8}$ eri tavalla.

Toiseen pöytään on valittavissa olevia vieraita $80 - 8 = 72$. Vieraat voidaan valita $\binom{72}{8}$ eri tavalla.

Kolmanteen pöytään voidaan valita vieraat $\binom{64}{8}$ eri tavalla.

Vastaavasti neljänteen $\binom{56}{8}$ eri tavalla,

viidenteen $\binom{48}{8}$ eri tavalla,

kuudenteen $\binom{40}{8}$ eri tavalla,

seitsemänteen $\binom{32}{8}$ eri tavalla,

kahdeksanteen $\binom{24}{8}$ eri tavalla,

yhdeksänteen $\binom{16}{8}$ eri tavalla ja

kymmenenteen $\binom{8}{8}$ eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia järjestyksiä on

$$\binom{80}{8} \cdot \binom{72}{8} \cdot \binom{64}{8} \cdot \binom{56}{8} \cdot \binom{48}{8} \cdot \binom{40}{8} \cdot \binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \\ = 6,302... \cdot 10^{72} \approx 6,3 \cdot 10^{72}$$

Vastaus: $6,3 \cdot 10^{72}$:lla eri tavalla

164. Tarkastellaan ensiksi kolmea samanarvoista korttia. Aloitetaan tarkastelu ässistä. Neljästä ässistä voidaan valita kolme $\binom{4}{3} = 4$ eri tavalla.

Myös kakkosista valinta voidaan tehdä neljällä eri tavalla. Vastaavasti myös muilla korttien arvoilla.

Kolme samanarvoista korttia voidaan valita $13 \cdot 4 = 52$:lla eri tavalla.

Tarkastellaan loppuja kahta samanarvoista korttia. Aloitetaan tarkastelu kakkosista. Neljästä kakkosesta voidaan valita kaksi $\binom{4}{2} = 6$ eri tavalla.

Myös muista korttipakan samanarvoisista korteista voidaan valita kaksi kuudella eri tavalla. Jos pakasta ensin saadut kortit ovat esimerkiksi ässiä, ei ässistä voi muodostaa enää paria.

Kun kolme samanarvoista korttia on valittu, voidaan valita kaksi samanarvoista $12 \cdot 6 = 72$:lla eri tavalla.

Erilaisten täyskäsien määrä on $52 \cdot 72 = 3744$.

Vastaus: 3744 kättä

- 165. a)** Eurojackpotrivi muodostetaan valitsemalla viisi päänumeroa luvuista 1–50 ja kaksi tähtinumeroa luvuista 1–10.

Päänumeron valinta voidaan tehdä $\binom{50}{5} = 2\,118\,760$ eri tavalla ja

tähtinumeron valinta $\binom{10}{2} = 45$ eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia rivejä on
 $2\,118\,760 \cdot 45 = 95\,344\,200$.

Eurojackpot rivi voidaan muodostaa 95 344 200:lla eri tavalla.

Vastaus: 95 344 200:lla eri tavalla

- b)** Kaikki viisi päänumeroa ovat vääriä. Tällaisia vaihtoehtoja on $\binom{45}{5}$.

Lisäksi kaikki tähtinumerot ovat vääriä. Tällaisia vaihtoehtoja on $\binom{8}{2}$.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia "ei yhtään numeroa oikein"-rivejä on
 $\binom{45}{5} \cdot \binom{8}{2} = 34\,209\,252$.

Vastaus: 34 209 252 rivissä

- c) Lasketaan ensin, kuinka monta erilaista "neljä päänumeroa ja yksi tähtinumero oikein"-rivejä voidaan muodostaa.

Neljä päänumeroa valitaan viidestä vaihtoehdosta. Valinta voidaan tehdä $\binom{5}{4} = 5$ eri tavalla.

Jos neljä päänumeroa on oikein, on yksi päänumero väärin. Yksi väärä päänumero voidaan valita $\binom{45}{1} = 45$ eri tavalla.

Yksi tähtinumero valitaan kahdesta vaihtoehdosta. Valinta voidaan tehdä $\binom{2}{1} = 2$ eri tavalla. Jos yksi tähtinumero on oikein, on toinen

tähtinumero väärin. Yksi väärä tähtinumero voidaan valita $\binom{8}{1} = 8$ eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia "neljä päänumeroa ja yksi tähtinumero oikein"-rivejä on $5 \cdot 45 \cdot 2 \cdot 8 = 3600$.

Lasketaan osuus prosentteina.

$$\frac{3600}{95\,344\,200} = 0,0000377... \approx 0,004\%$$

Vastaus: 0,004 %

- d) a-kohdan perusteella Eurojackpotissa on 95 344 200 riviä.

Eurojackpotin rivien määrä on

$$\frac{95\,344\,200}{18\,643\,560} = 5,114... \approx 5,11\text{-kertainen suhteessa Loton riveihin}$$

Vastaus: 5,11-kertainen

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

166. Kombinaatio on $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

a) Sievennetään lauseke $\binom{5}{4}$.

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 1} = \frac{5}{1} = 5$$

Vastaus: 5

b) Sievennetään lauseke $\binom{10}{2}$.

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2! \cdot \cancel{8!}} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9}{\cancel{2} \cdot 1} = 45$$

Vastaus: 45

c) Sievennetään lauseke $\binom{100}{100}$.

$$\binom{100}{100} = \frac{100!}{100!(100-100)!} = \frac{100!}{100! \cdot 0!} = \frac{\cancel{100!}}{\cancel{100!} \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Vastaus: 1

- 167. a)** Marja voi valita korurasiansa koruista kaksi viidellätoista eri tavalla. Merkitään korujen määrää kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä korujen määrä x symbolisen laskennan ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla.

$$\binom{x}{2} = 15$$

Ratkaisuksi saadaan $x = 6$ tai $x = -5$. Negatiivinen vastaus hylätään.

Korurasiassa on kuusi korua.

Vastaus: 6 korua

- b)** Merkitään ryhmäkoko kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se sopivan symbolisen laskennan ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla.

$$\binom{24}{x} = 134\,596$$

Ratkaisuksi saadaan $x = 6$ tai $x = 18$

Ryhmässä on 6 tai 18 henkilöä.

Vastaus: 6 tai 18 henkilöä

- 168. a)** Täytteistä voidaan valita 2 erilaista $\binom{15}{2} = 105$ eri tavalla ja kolme erilaista $\binom{15}{3} = 455$ eri tavalla. Erilaiset täytteen voidaan valita siis yhteensä $105 + 455 = 560$ eri tavalla. Jokainen täyteyhdistelmä voidaan valita kolmella eri pitsapohjalla, joten erilaisia pitsoja on $3 \cdot 560 = 1680$. Jokaviikko syödään viisi erilaista pitsaa, joten Veetu voi syödä erilaisia pitsoja $\frac{1680}{5} = 336$ viikkoa.

Vastaus: 336 viikkoa

- b)** Kahden täytteen pitsat maksavat yhteensä
 $105 \cdot 7,5 \text{ €} + 105 \cdot 8,5 \text{ €} + 105 \cdot 10,5 \text{ €} = 2782,5 \text{ €}.$
Kolmen täytteen pitsat maksavat
 $455 \cdot 8,5 \text{ €} + 455 \cdot 9,5 \text{ €} + 455 \cdot 11,5 \text{ €} = 13422,5 \text{ €}.$
Yhteensä pitsat maksavat
 $2782,5 \text{ €} + 13422,5 \text{ €} = 16205 \text{ €}.$
Keskimääräinen pitsan hinta on tällöin
 $\frac{16\,205 \text{ €}}{1680} = 9,645... \text{ €} \approx 9,65 \text{ €}$

Vastaus: 9,65 euroa

- 169.** On näytettävä, että $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = \frac{12!}{5!(12-5)!}.$

Muokataan vasenta puolta.

7·6·5·4·3·2·1

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{12!}{5!(12-5)!}$$

Vastaus: –

170. Korttipakasta nostetaan kahdeksan korttia, joista täsmälleen neljä korttia on patoja. Korttipakassa on 52 korttia, joista 13 on patoja ja 39 muita kortteja. Kolmestatoista padasta voidaan nostaa neljä $\binom{13}{4}$:llä eri tavalla.

39 muusta kortista voidaan nostaa neljä $\binom{39}{4}$:llä eri tavalla.

Kertolaskusäännön mukaan erilaisia täsmälleen neljä pataa sisältäviä kahdeksan kortin käsiä on $\binom{13}{4} \cdot \binom{39}{4} = 58\,809\,465$.

Katriina ei huomionnut muiden korttien järjestyksiä.

Uolevi laski oikein.

Johanna on laskenut laskimella väärin, käyttänyt komentoa nPr (permutaatio) kombinaation sijaan.

Iivari ei ole huomionnut ehtoa täsmälleen neljästä padasta.

Roosa ei ole vähentänyt muista korteista patoja.

Ellen on laskenut kuinka monta erilaista neljän kortin järjestystä kolmestatoista kortista voidaan muodostaa.

Vastaus: -

171. a) Pakkauksessa täsmälleen yksi viallinen tuote tarkoittaa, että pakkauksessa on yksi viallinen ja yksi ehjä tuote. Tuhannen kappaleen erässä on keskimäärin kolme viallista tuotetta. Yksi viallinen tuote voidaan poimia kolmesta viallisesta tuotteesta $\binom{3}{1} = 3$ eri tavalla.

Tuhannen kappaleen erässä on $1000 - 3 = 997$ ehjää tuotetta. Yksi ehjä tuote voidaan poimia 997 ehjästä tuotteesta $\binom{997}{1} = 997$ eri tavalla.

Yksi viallinen ja yksi ehjä tuote voidaan siis poimia $3 \cdot 997 = 2991$ eri tavalla.

Tuhannesta tuotteesta voidaan poimia kaksi $\binom{1000}{2} = 499\,500$ eri tavalla.

Lasketaan osuus prosentteina.

$$\frac{2991}{499500} = 0,00588... = 0,588...\% \approx 0,6\%$$

Pakkauksista keskimäärin 0,6 % on sellaisia, joissa on täsmälleen yksi viallinen tuota.

Vastaus: 0,6 %

- b) Kaksi viallista tuotetta voidaan poimia kolmesta viallisesta tuotteesta
 $\binom{3}{2} = 3$ eri tavalla.

a-kohdan mukaan kaikkia kahden tuotteen pakkauksia on 499 500 erilaista.

Lasketaan osuus prosentteina.

$$\frac{3}{499\,500} = 6,006\ldots \cdot 10^{-6} = 0,0006006\ldots \% \approx 0,0006\%$$

Pakkauksista keskimäärin 0,0006 % on sellaisia, joissa on kaksi viallista tuotetta.

Vastaus: 0,0006 %

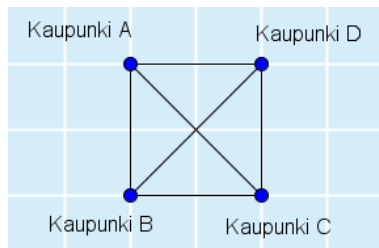
ALOITUSAUKEAMAAN LIITTYVIÄ TEHTÄVIÄ

1. Myyntiedustajan tulee käydä viidessä kaupungissa. Ensimmäisen kaupungin myyntiedustaja voi valita viidellä eri tavalla, toisen kaupungin neljällä, kolmannen kolmella, neljännen kahdella ja viidennen yhdellä tavalla. Tuloperiaatteen mukaan mahdollisten reittien määrä on $5! = 120$.

Myyntiedustaja voi käydä viidessä eri kaupungissa 120:ssä eri järjestyksessä.

Vastaus: 120:ssä eri järjestyksessä

2. Havainnollistetaan tieverkkoa kuvan avulla.



Kuvan avulla nähdään, että tieverkkoon kuuluu 4 kertaa neliön sivun pituus ja kaksi kertaa neliön lävistäjän pituus. Lasketaan lävistäjän pituus Pythagoraan lauseella. Merkitään lävistäjän pituutta kirjaimella x ja muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned}50^2 + 50^2 &= x^2 \\x^2 &= 5000 \\x &= (\pm)\sqrt{5000} \\x &= 70,710...\end{aligned}$$

Tieverkon pituus kokonaisuudessaan on
 $4 \cdot 50 \text{ km} + 2 \cdot 70,710... \text{ km} = 341,421... \approx 341 \text{ km}$.

Vastaus: 341 km