

2 TODENNÄKÖISYYS

POHDITTAVAA

1. Täydennetään taulukko.

		Isä	
		A	a
Äiti	A	AA	Aa
	a	Aa	aa

Lapselle tulee hymykuopat, jos hänellä on alleelipari AA tai Aa. Näin käy kolmessa neljästä $\frac{3}{4} = 75\%$ mahdollisuudesta.

Vastaus:

		Isä	
		A	a
Äiti	A	AA	Aa
	a	Aa	aa

$$\frac{3}{4} = 75\%$$

2. Taulukoidaan mahdolliset geeniparit.

		Isä	
		A	a
Äiti	A	AA	Aa
	A	AA	Aa

Lapsella on hymykuopat, jos hänellä on geenipari AA tai Aa. Tämä on taulukon mukaan varmaa, joten lapselle tulee hymykuopat.

Vastaus: tulee

2.1 Klassinen ja tilastollinen todennäköisyys

ALOITA PERUSTEISTA

201. a) $P(\text{silmäluku on } 3) = \frac{1}{6} = 0,166... \approx 0,17$

Vastaus: $\frac{1}{6} \approx 0,17$

- b) Silmäluku on alle 5, jos se on 1, 2, 3 tai 4. Suotuisia alkeistapauksia on 4 ja kaikkia alkeistapauksia 6, joten

$$P(\text{silmäluku on alle } 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,666... \approx 0,67.$$

Vastaus: $\frac{2}{3} \approx 0,67$

- c) Arpakuution heitossa silmäluku ei voi olla yli 6, joten $P(\text{silmäluku on yli } 6) = 0$.

Vastaus: 0

- d) Arpakuution heitossa silmäluku on aina vähintään 1, joten $P(\text{silmäluku on vähintään } 1) = 1$.

Vastaus: 1

- 202.** a) Satunnaisilmiön ”syntymäpäivän viikonpäivä” alkeistapaukset ovat maanantai, tiistai, keskiviikko, torstai, perjantai, lauantai ja sunnuntai.

Vastaus: ma, ti, ke, to, pe, la ja su

- b) Tapahtuman ”henkilö on syntynyt viikonloppuna” suotuisat alkeistapaukset ovat lauantai ja sunnuntai.

Vastaus: la ja su

- c) $P(\text{henkilö on syntynyt viikonloppuna}) = \frac{2}{7} = 0,285\dots \approx 0,29$

Vastaus: $\frac{2}{7} \approx 0,29$

- 203.** A Korttipakassa on neljän eri maan kortteja, ja jokainen maa on yhtä todennäköinen. Padan todennäköisyys on siis $\frac{1}{4} = 25\%$. Tapahtuma A ja todennäköisyys IV kuuluvat yhteen.

- B Arpakuution heitossa on 6 alkeistapausta: silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Todennäköisyys sille, että silmäluku on 1 tai 2, on $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Tapahtuma B ja todennäköisyys I kuuluvat yhteen.

- C Kassissa on kenkäpareja, joten puolet kengistä on oikean jalan kenkiä. Todennäköisyys sille, että sattumanvaraisesti valittu kenkä on oikean jalan kenkä, on $\frac{1}{2} = 0,5$. Tapahtuma C ja todennäköisyys III kuuluvat yhteen.

- D Ensilumi voi sataa minä tahansa seitsemästä viikonpäivästä, ja kaikki viikonpäivät ovat yhtä todennäköisiä. Todennäköisyys sille, että ensilumi sataa sunnuntaina, on $\frac{1}{7}$. Tapahtuma D ja todennäköisyys II kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV; B: I, C: III ja D: II

- 204. a)** Kutakin arpaa voidaan pitää alkeistapauksena, jolloin kaikkia alkeistapauksia on 3000 ja suotuisia alkeistapauksia 750. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{satunnainen arpa voittaa}) = \frac{750}{3000} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25 \, \%.$$

Satunnainen arpa voittaa 25 prosentin todennäköisyydellä.

Vastaus: 25 %

- b)** Arpoja, joissa ei ole voittoa, on $3000 - 750 = 2250$ kappaletta. Alkeistapauksia on 3000 ja suotuisia alkeistapauksia on 2250. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{satunnainen arpa ei voita}) = \frac{2250}{3000} = 0,75 = 75 \, \%$$

Satunnainen arpa ei voita 75 prosentin todennäköisyydellä.

Vastaus: 75 %

- 205.** Laatikon pallojen värit ovat keltainen, punainen, sininen ja violetti.

- A** Tapahtuman ”nostettu pallo on keltainen” vastatapahtuma on ”nostettu pallo ei ole keltainen”. Tapahtuma A ja vaihtoehto II kuuluvat yhteen.
- B** Tapahtuman ”nostettu pallo on violetti tai keltainen” vastatapahtuma on ”nostettu pallo on punainen tai sininen”. Tapahtuma B ja vaihtoehto IV kuuluvat yhteen.
- C** Tapahtuman ”nostettu pallo ei ole keltainen eikä punainen” vastatapahtuma on ”nostettu pallo on keltainen tai punainen”. Tapahtuma C ja vaihtoehto I kuuluvat yhteen.
- D** Tapahtuman ”nostettu pallo on sininen, punainen tai keltainen” vastatapahtuma on ”nostettu pallo on violetti”. Tapahtuma D ja vaihtoehto III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: IV, C: I ja D: III

- 206.** Lasketaan tilastolliset todennäköisyydet sille, että jokeri lyö juoksun.

$$P(\text{Jani lyö juoksun}) = \frac{35}{57} = 0,614\dots$$

$$P(\text{Roope lyö juoksun}) = \frac{97}{173} = 0,560\dots$$

Janin todennäköisyys lyödä juoksu on suurempi kuin Roopen, joten ratkaisupaikassa kannattaa laittaa lyömään Jani.

Vastaus: Jani

- 207.** a) Koska nasta jäi useammin kärki ylöspäin kuin kärki alaspäin, niin kokeen mukaan on todennäköisempää, että nasta jää kärki ylöspäin.

Vastaus: kärki ylöspäin

- b) Tilaston mukaan heittoja on yhteensä $135 + 164 = 299$. 135 heitossa nasta tulee maahan kärki alaspäin, joten

$$P(\text{kärki alaspäin}) = \frac{135}{299} = 0,451\dots \approx 0,45.$$

Vastaus: 0,45

- 208.** a) Tapahtuman ”kaikki heitot menevät koriin” vastatapahtuma on se, että koriin menee 0, 1 tai 2 kaksi heittoa, eli ainakin yksi heitto ei mene koriin.

Vastaus: ainakin yksi heitto menee ohi

- b) Tapahtuman ”täsmälleen yksi heitto menee koriin” vastatapahtuma on se, että joku muu määrä heittoja menee koriin. Muut mahdolliset määrät ovat 0, 2 ja 3.

Vastaus: 0, 2 tai 3 heittoa menee koriin

- c) Tapahtuman ”ainakin yksi heitto menee koriin” vastatapahtuma on se, että yksikään heitoista ei mene koriin.

Vastaus: yksikään heitto ei mene koriin

- 209.** a) Koska purkkeja on 4, ne voidaan asettaa $4! = 24$ eri järjestykseen.

Vastaus: 24:ään eri järjestykseen

- b) Merkitään purkkeja alkukirjaimillaan ja luetellaan suotuisat järjestykset.

SPTC
SPCT
PSTC
PSCT

Vastaus: SPTC, SPCT, PSTC, PSCT

- c) Suotuisia järjestyksiä on 4 ja kaikkia järjestyksiä on 24, joten suola ja pippuri ovat vasemmanpuolimmaisella todennäköisyydellä

$$\frac{4}{24} = \frac{1}{6} = 0,166\ldots \approx 0,17.$$

Vastaus: $\frac{1}{6} \approx 0,17$

VAHVISTA OSAAMISTA

- 210. a)** Tilaston mukaan ylioppilaita oli yhteensä 31 077 ja ylioppilaita, jotka jatkoivat heti lukion jälkeen opintoja, oli 5090.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{ylioppilas jatkoi heti lukion jälkeen opintoja yliopistossa}) \\ = \frac{5090}{31077} = 0,163... \approx 0,16 = 16 \, \%$$

Ylioppilas jatkoi heti lukion jälkeen opintoja yliopistossa 16 % todennäköisyydellä.

Vastaus: 16 %

- b)** Tilaston mukaan ylioppilaita, jotka eivät jatkaneet opintoja heti lukion jälkeen oli $31077 - (1474 + 3347 + 5090) = 21\,166$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{ylioppilas ei jatkanut opintoja heti lukion jälkeen}) \\ = \frac{21166}{31077} = 0,681... \approx 0,68 = 68 \, \%$$

Ylioppilas ei jatkanut opintoja heti lukion jälkeen 68 % todennäköisyydellä.

Vastaus: 68 %

- 211. a)** Pakassa on neljää eri maata, joista yksi on risti. Kaikki maat ovat yhtä todennäköisiä, joten $P(\text{kortti on risti}) = \frac{1}{4} = 0,25$.

Nostettu kortti on risti todennäköisyydellä 0,25.

Vastaus: $\frac{1}{4} = 0,25$

- b)** Kuvakortteja ovat sotilas, kuningatar ja kuningas. Kortin arvo voi olla mikä tahansa kokonaisluvusta 1-13, ja kuvakorttien arvot ovat 11, 12 ja 13. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{kortti on kuvakortti}) = \frac{3}{13} = 0,230... \approx 0,23.$$

Nostettu kortti on kuvakortti todennäköisyydellä 0,23.

Vastaus: $\frac{3}{13} \approx 0,23$

- c)** Pakassa on yhteensä 52 korttia, joista ristejä on 13 ja kuvakortteja $4 \cdot 3 = 12$. Pakassa on kolme korttia, jotka ovat sekä ristejä että kuvia. Kortteja, jotka ovat ristejä tai kuvakortteja, on siis $13 + 12 - 3 = 22$ ja muita kortteja $52 - 22 = 30$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{kortti ei ole risti eikä kuvakortti}) = \frac{30}{52} = 0,576... \approx 0,58.$$

Nostettu kortti ei ole risti eikä kuvakortti todennäköisyydellä 0,58.

Vastaus: $\frac{30}{52} \approx 0,58$

212. Kopioidaan taulukon tiedot taulukkolaskentaohjelmaan.

Lasketaan ohjelman avulla syntyneiden poikien ja tyttöjen kokonaismäärät.

	A	B	C
1	Vuosi	Pojat	Tytöt
2	2000	29250	27492
3	2001	28701	27488
4	2002	28563	26992
5	2003	28839	27791
6	2004	29684	28074
7	2005	29400	28345
8	2006	30005	28835
9	2007	30136	28593
10	2008	30415	29115
11	2009	30795	29635
12	2010	31309	29671
13	2011	30546	29415
14	2012	30308	29185
15	2013	29858	28276
16	2014	29272	27960
17	2015	28469	27003
18	Yhteensä	=summa(B2:B17)	

Lasketaan syntyneiden lasten kokonaismäärä.

	A	B	C	D	E
1	Vuosi	Pojat	Tytöt		
2	2000	29250	27492		
3	2001	28701	27488		
4	2002	28563	26992		
5	2003	28839	27791		
6	2004	29684	28074		
7	2005	29400	28345		
8	2006	30005	28835		
9	2007	30136	28593		
10	2008	30415	29115		
11	2009	30795	29635		
12	2010	31309	29671		
13	2011	30546	29415		
14	2012	30308	29185		
15	2013	29858	28276		
16	2014	29272	27960		
17	2015	28469	27003		
18	Yhteensä	475550	453870	=summa(B18:C18)	

Lasten kokonaismäärä on 929 420.

Kaikkien havaintojen lukumäärä on 929 420 ja tapahtuman ”lapsi on tyttö” esiintymiskertojen lukumäärä on 453 870. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{lapsi on tyttö}) = \frac{453\,870}{929\,420} = 0,4883... \approx 0,488 = 48,8\%$$

Suomessa syntyvä lapsi on tyttö todennäköisyydellä 48,8 %.

Vastaus: 48,8 %

- 213.** Merkitään R = kruuna ja L = klaava. Valitaan alkeistapauksiksi kaikki mahdolliset neljän heiton sarjat ja luetellaan ne.

	1. heitto	2. heitto	3. heitto	4. heitto
Neljä klaavaa	L	L	L	L
Kolme klaavaa ja yksi kruuna	L	L	L	R
	L	L	R	L
	L	R	L	L
	R	L	L	L
Kaksi klaavaa ja kaksi kruunaa	L	L	R	R
	L	R	L	R
	L	R	R	L
	R	R	L	L
	R	L	R	L
	R	L	L	R
Yksi klaava ja kolme kruunaa	R	R	R	L
	R	R	L	R
	R	L	R	R
	L	R	R	R
Neljä kruunaa	R	R	R	R

Alkeistapauksia on yhteensä 16, joista suotuisia ovat kaikki paitsi viimeinen.

$$P(\text{ainakin 1 klaava}) = \frac{15}{16} = 0,9375 \approx 0,94$$

Neljän kolikon heitossa saadaan ainakin yksi klaava todennäköisyydellä 0,94.

Vastaus: $\frac{15}{16} \approx 0,94$

- 214. a)** Koska oppilaita on 18 ja heistä valitaan 2, mahdollisia järjestäjäpareja on $\binom{18}{2} = 153$.

Vastaus: 153 järjestäjäparia

- b)** Iina ja Iida valitaan järjestäjiksi todennäköisyydellä $\frac{1}{153} = 0,00653\dots \approx 0,0065$.

Vastaus: $\frac{1}{153} \approx 0,0065$

- 215.** Tehdään taulukko, josta nähdään kaikki alkeistapaukset ja silmälukujen summat.

		1. arpakuution silmäluku					
2. arpakuution silmäluku		1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Alkeistapauksia on $6 \cdot 6 = 36$.

- a) Väritetään taulukosta alkeistapaukset, joissa molempien arpakuutioiden silmäluvut ovat yli 4.

		1. arpakuution silmäluku					
2. arpakuution silmäluku		1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Suotuisia alkeistapauksia on 4.

$$P(\text{molemmat yli } 4) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0,111\dots \approx 0,11$$

Molempien arpakuutioiden silmäluvut ovat yli 4 todennäköisyydellä 0,11.

Vastaus: $\frac{1}{9} = 0,11$

- b)** Väritetään taulukosta alkeistapaukset, joissa pistelukujen summa on pienempi kuin 7.

		1. arpakuution silmäluku					
		1	2	3	4	5	6
2. arpakuution silmäluku	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Suotuisia alkeistapauksia on $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

$$P(\text{summa alle } 7) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0,416\ldots \approx 0,42$$

Molempien arpakuutioiden silmälukujen summa on pienempi kuin 7 todennäköisyydellä 0,42.

Vastaus: $\frac{5}{12} \approx 0,42$

- c)** Tapahtumalle ”silmälukujen summa on 7” on kuusi suotuisaa alkeistapausta. Muiden silmälukujen summien tapahtumille suotuisia alkeistapauksia on vähemmän, joten 7 on todennäköisin arpakuutioiden silmälukujen summa.

Vastaus: 7

- 216. a)** Valitaan alkeistapauksiksi kahden kortin jonot. Korttipakassa on aluksi kortteja 52 ja yhden noston jälkeen 51, joten kaikkien alkeistapausten määrä on $52 \cdot 51 = 2652$.

Suotuisia alkeistapauksia ovat ne, joissa ensimmäinen kortti on ässä ja toinen kortti on ässä. Ässiä on aluksi pakassa 4 ja kun yksi on nostettu, ässiä on vielä kolme. Suotuisten alkeistapausten määrä on siis $4 \cdot 3 = 12$.

$$P(\text{molemmat kortit ovat ässiä}) = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221} = 0,00452... \approx 0,0045$$

Molemmat nostetut kortit ovat ässiä todennäköisyydellä 0,0045.

Vastaus: $\frac{1}{221} \approx 0,0045$

- b)** Tapahtuman ”molemmat kortit ovat ässiä” vastatapahtumassa pakasta saa tulla yksi ässä tai ei yhtään ässää. Vastatapahtuma on siis ”korkeintaan toinen korteista on ässä”.

$$\begin{aligned} &P(\text{korkeintaan toinen korteista on ässä}) \\ &= 1 - P(\text{molemmat kortit ovat ässiä}) \\ &= 1 - \frac{1}{221} = \frac{220}{221} = 0,99547... \approx 0,9955 \end{aligned}$$

Korkeintaan toinen nostetuista korteista on ässä todennäköisyydellä 0,9955.

Vastaus: korkeintaan toinen korteista on ässä, $\frac{220}{221} \approx 0,9955$

217. a) Taulukoidaan kaikki mahdolliset heittotulokset ja väritetään taulukosta ne alkeistapaukset, joissa arpakuutioiden silmäluvut ovat samat.

12-sivuisen arpakuution silmäluku

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												

Suotuisia alkeistapauksia on 12 kappaletta. Kaikkia alkeistapauksia on $12 \cdot 20 = 240$ kappaletta.

$$P(\text{silmäluvut ovat samat}) = \frac{12}{240} = \frac{1}{20} = 0,05$$

Molempien arpakuutioiden silmäluvut ovat samat todennäköisyydellä 0,05.

Vastaus: $\frac{1}{20} = 0,05$

- b) Väritetään taulukosta alkeistapaukset, joissa 12-sivuisen arpakuution silmäluku on suurempi kuin 20-sivuisen arpakuution.

		12-sivuisen arpakuution silmäluku											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20-sivuisen arpakuution silmäluku	1												
	2												
	3												
	4												
	5												
	6												
	7												
	8												
	9												
	10												
	11												
	12												
	13												
	14												
	15												
	16												
	17												
	18												
	19												
	20												

Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $11 + 10 + 9 + \dots + 1 = 66$.

$$P(16\text{-sivuisessa isompi silmäluku}) = \frac{66}{240} = \frac{11}{40} = 0,275 \approx 0,28$$

12-sivuisen arpakuution silmäluku on suurempi kuin 20-sivuisen todennäköisyydellä 0,28.

Vastaus: $\frac{11}{40} \approx 0,28$

TAPA 2:

- a) Kaikkia mahdollisia heittotuloksia on $12 \cdot 20 = 240$. Näistä suotuisia ovat seuraavat: 1 ja 1, 2 ja 2, 3 ja 3, ..., 12 ja 12. Suotuisia alkeistapauksia on siis 12 kpl.

$$P(\text{silmäluvut ovat samat}) = \frac{12}{240} = \frac{1}{20} = 0,05$$

Molempien arpakuutioiden silmäluvut ovat samat todennäköisyydellä 0,05.

Vastaus: $\frac{1}{20} = 0,05$

- b) Taulukoidaan suotuisat alkeistapaukset.

20-sivuisen arpakuution silmäluku	12-sivuisen arpakuution silmäluku	Suotuisten alkeistapausten lukumäärä
1	2, 3, ..., 12	11
2	3, 4, ..., 12	10
3	4, 5, ..., 12	9
...		...
11	12	1

Suotuisten alkeistapausten lukumäärä on $11 + 10 + 9 + \dots + 1 = 66$.

$$P(12\text{-sivuisessa isompi silmäluku}) = \frac{66}{240} = \frac{11}{40} = 0,275 \approx 0,28$$

12-sivuisen arpakuution silmäluku on suurempi kuin 20-sivuisen todennäköisyydellä 0,28.

Vastaus: $\frac{11}{40} \approx 0,28$

- 218. a)** Käytetään alkeistapauksina 200 henkilön joukosta valittuja kolmen henkilön jonoja. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $200 \cdot 199 \cdot 198 = 7\,880\,400$.

Oppositiolla on 99 edustajaa, joten suotuisia alkeistapauksia on $99 \cdot 98 \cdot 97 = 941\,094$.

$$P(\text{kaikki opposition edustajia}) = \frac{941094}{7880400} = 0,119... \approx 0,12$$

Kaikki valitut pikkujoulujen järjestäjät ovat opposition edustajia todennäköisyydellä 0,12.

Vastaus: 0,12

- b)** Käytetään alkeistapauksina 200 henkilön joukosta valittuja kolmen henkilön osajoukkoja. Kaikkien alkeistapausten määrä on $\binom{200}{3} = 1\,313\,400$.

Oppositiolla on 99 edustajaa, joten suotuisia alkeistapauksia on $\binom{99}{3} = 156\,849$.

$$P(\text{kaikki opposition edustajia}) = \frac{156849}{1313400} = 0,119... \approx 0,12$$

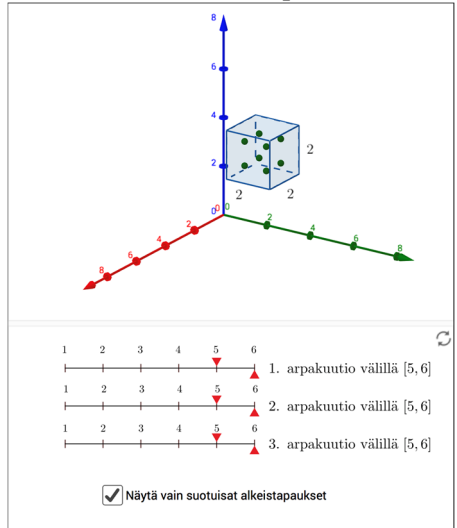
Kaikki valitut pikkujoulujen järjestäjät ovat opposition edustajia todennäköisyydellä 0,12.

Vastaus: 0,12

219. a) Tutkitaan appletin avulla, kuinka monta suotuista alkeistapausta on.

Suotuisia alkeistapauksia
on $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Arpakuution silmäluku voi
jokaisella heitolla olla mikä
tahansa silmäluvuista 1-6, joten
kaikkien alkeistapausten
lukumäärä on $6^3 = 216$.



Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{jokaisen arpakuution silmäluku on 5 tai 6})$

$$= \frac{8}{216} = \frac{1}{27} = 0,0370... \approx 0,037.$$

Kaikkien arpakuutioiden silmäluku on 5 tai 6 todennäköisyydellä
0,037.

Vastaus: $\frac{1}{27} \approx 0,037$

- b)** Tapahtumalla ”silmälukujen summa on yli 3” on useita suotuisia alkeistapauksia. Sen vastatapahtumalla ”silmälukujen summa on korkeintaan 3” on vain yksi suotuista alkeistapaus.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{silmälukujen summa on yli 3}) &= 1 - \frac{1}{216} \\ &= \frac{215}{216} \\ &= 0,9953... \\ &\approx 0,995. \end{aligned}$$

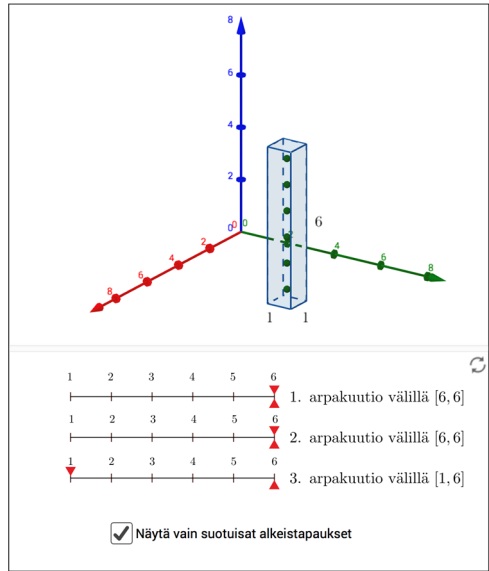
Silmälukujen summa on yli 3 todennäköisyydellä 0,995.

Vastaus: $\frac{215}{216} \approx 0,995$

- c) Tapahtuma ”ainakin kahden arpakuution silmäluku on yli 5” tapahtuu, jos kahden tai kolmen arpakuution silmäluku on 6. Tutkitaan appletin avulla suotuisten alkeistapausten lukumäärää.

Sellaisia suotuisia alkeistapauksia, joissa ensimmäisen ja toisen arpakuution silmäluku on 6 ja kolmannen arpakuution silmäluku mikä tahansa, on 6.

Samoin sellaisia suotuisia alkeistapauksia, joissa ensimmäisen ja kolmannen arpakuution silmäluku on 6 ja toisen arpakuution silmäluku mikä tahansa, on 6.



Samoin sellaisia suotuisia alkeistapauksia, joissa toisen ja kolmannen arpakuution silmäluku on 6 ja ensimmäisen arpakuution silmäluku mikä tahansa, on 6. Näistä joudutaan poistamaan alkeistapaukset, joissa kaikki silmäluvut ovat kuutosia, jotta ne eivät tule kahteen kertaan.

Suotuisia alkeistapauksia on $6 + 6 + 6 - 2 = 16$.

Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{ainakin kahden arpakuution silmäluku on yli } 5)$

$$= \frac{16}{216} = \frac{2}{27} = 0,0740... \approx 0,074.$$

Ainakin kahden arpakuution silmäluku on yli 5 todennäköisyydellä 0,074.

Vastaus: $\frac{2}{27} \approx 0,074$

- 220.** Käytetään alkeistapauksina kuuden sienen joukkoja. Kaikkien alkeistapausten määrä on $\binom{78}{6} = 256\,851\,595$. Suotuisten alkeistapausten määrä on $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{henkilö tunnisti 6 sientä}) = \frac{13\,983\,816}{256\,851\,595} = 0,0544\dots \approx 0,054.$$

Kurssilainen tunnisti oikein kuusi erilaista sientä todennäköisyydellä 0,054.

Vastaus: 0,054

- 221. a)** Valitaan alkeistapauksiksi neljän siivousvuoron jonot. Alkeistapausten lukumäärä on $4! = 24$. Suotuisia alkeistapauksia on vain yksi, ABCD.

$$P(\text{aakkosjärjestys}) = \frac{1}{24} = 0,0416\dots \approx 0,042$$

Kommuunin asukkaat siivoavat aakkosjärjestyksessä todennäköisyydellä 0,042.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{24} \approx 0,042$$

- b)** Pojat siivoavat peräkkäisinä viikkoina, jos Diandra siivoaa ensimmäisenä tai viimeisenä. Valitaan alkeistapauksiksi Diandran siivousvuorot, joita on 4 mahdollista: 1. viikko, 2. viikko, 3. viikko ja 4. viikko. Näistä ensimmäinen ja viimeinen ovat suotuisia.

$$\begin{aligned} P(\text{pojat peräkkäin}) \\ &= P(\text{Diandra ensimmäisenä tai viimeisenä}) \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 \end{aligned}$$

Pojat siivoavat peräkkäisinä viikkoina todennäköisyydellä 0,5.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{2} = 0,5$$

- 222.** a) Parillisia numeroita ovat 2, 4, 6 ja 8. Näistä 8 ei kuitenkaan tule kysymykseen, koska kaikki numerot ovat pienempiä kuin 7. Jokaiselle neljälle numerolle on siis kolme mahdollisuutta, joten varas joutuu arvaamaan $3^4 = 81$ tunnusluvun joukosta.

Vastaus: 81

- b) Mahdollisia tunnuslukuja on 81, joista vain yksi on oikea. Varas arvaa oikean tunnusluvun todennäköisyydellä $\frac{1}{81} = 0,0123... \approx 0,0012$.

Vastaus: $\frac{1}{81} \approx 0,012$

- 223.** Nelinumeroisia lukuja ovat luvut 1000, 1001, 1002, ... ja 9999. Näitä voidaan pitää alkeistapauksina.

Niitä on $9999 - (1000 - 1) = 9999 - 999 = 9000$ kappaletta.

Nelinumeroisista luvuista sellaisia, joissa ensimmäiset kaksi numeroa ovat kuutosia, ovat 6600, 6601, 6602, ... 6699.

Näitä on $6699 - (6600 - 1) = 100$ kappaletta.

Vastaavasti 67-alkuisia nelinumeroisia lukuja on 100, samoin 68-alkuisia, ja 69-alkuisia. Kuutosella alkavia suotuisia alkeistapauksia on siis $4 \cdot 100 = 400$ kappaletta.

Vastaavasti seitsemällä alkavia suotuisia alkeistapauksia on 400 kappaletta, samoin kahdeksalla ja yhdeksällä alkavia. Suotuisia alkeistapauksia on siis yhteensä $4 \cdot 400 = 1600$ kappaletta.

Suotuisia alkeistapauksia on 1600 ja kaikkia alkeistapauksia 9000, joten todennäköisyys sille, että kaksi ensimmäistä numeroa on suurempia kuin 5, on

$$\frac{1600}{9000} = \frac{8}{45} = 0,177... \approx 0,18.$$

Vastaus: 0,18

- 224. a)** Ruokalajeja on viisi, ja niistä valitaan kaksi. Alkeistapauksia ovat siis viiden ruokalajin joukosta valitut kahden ruokalajin osajoukot.

Kaikkien alkeistapausten määrä on $\binom{5}{2} = 10$. Kalaruokia on viiden ruokalajin joukossa vain 2, joten pelkkiä kalaruokia voidaan tarjoilla vain yhdellä tavalla.

$$P(\text{vain kalaruokia}) = \frac{1}{10} = 0,1$$

Illallisella tarjoillaan vain kalaruokia todennäköisyydellä 0,1.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{10} = 0,1$$

- b)** Kasvisruokia on viiden ruokalajin joukossa kaksi. Loput 3 ovat ei-kasvisruokia, joten ei-kasvisruokaa voidaan valita $\binom{3}{2} = 3$ tavalla.

$$P(\text{ei kasvisruokia}) = \frac{3}{10} = 0,3$$

Illallisella ei tarjoilla kasvisruokia todennäköisyydellä 0,3.

$$\text{Vastaus: } \frac{3}{10} = 0,3$$

- 225.** Alkeistapauksia ovat kuuden paikan joukosta valitut kahden paikan osajoukot. Niiden määrä on $\binom{6}{2} = 15$.

Merkitään paikkoja numeroilla 1–6. Suotuisat kahden paikan osajoukot ovat 12, 23, 34, 45 ja 56. Niitä on 5 kappaletta.

$$P(\text{autot pysäköidään vierekkäin}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0,333 \approx 0,33$$

Autot pysäköidään vierekkäin todennäköisyydellä 0,33.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{3} \approx 0,33$$

226. Kolmihenkinen johtoryhmä voidaan valita kahdeksan hengen joukosta $\binom{8}{3} = 56$ eri tavalla. Kaikkien alkeistapausten määrä on siis 56.

Albertista, Siiristä ja Iiriksestä ainakin 2 pääsee johtoryhmään, jos heistä pääsee sinne 2 tai 3. Heistä kaksi voidaan valita johtoryhmään $\binom{3}{2} = 3$

tavalla, ja johtoryhmän kolmas jäsen voidaan valita $\binom{5}{1} = 5$ eri tavalla.

Kolmihenkinen johtoryhmä, jossa on mukana täsmälleen kaksi henkilöistä Albert, Siiri ja Iiris, voidaan siten valita $3 \cdot 5 = 15$ eri tavalla.

Kolmihenkinen johtoryhmä, jossa Albert, Siiri ja Iiris ovat kaikki mukana, voidaan valita vain yhdellä tavalla.

Suotuisia alkeistapauksia on siis $15 + 1 = 16$.

$$P(\text{ainakin kaksi pääsee johtoryhmään}) = \frac{16}{56} = \frac{2}{7} = 0,285\dots \approx 0,29$$

Ainakin kaksi pääsee johtoryhmään todennäköisyydellä 0,29.

Vastaus: $\frac{2}{7} \approx 0,29$

- 227. a)** Koska 17 työntekijää on ostanut kahvia ja 10 sekä kahvia että teetä, niin vain kahvia on ostanut $17 - 10 = 7$ työntekijää.

Vastaavasti $15 - 10 = 5$ työntekijää on ostanut vain teetä.

Vain jompaakumpaa juomaa on ostanut $7 + 5 = 12$ työntekijää.

$$P(\text{työntekijä on ostanut vain jompaakumpaa}) = \frac{12}{26} = \frac{6}{13} = 0,461... \approx 0,46$$

Satunnaisesti valittu työntekijä on ostanut automaattista joko kahvia tai teetä muttei molempia todennäköisyydellä 0,46.

Vastaus: 0,46

- b)** Työntekijöitä on yhteensä 26. Vain kahvia on a-kohdan perusteella ostanut 7 ja vain teetä 5 työntekijää. 10 työntekijää on ostanut molempia. Ainakin jompaakumpaa on siis ostanut $7 + 5 + 10 = 22$ työntekijää. Loput $26 - 22 = 4$ työntekijää eivät ole ostaneet kumpaakaan.

$$P(\text{työntekijä ei ole ostanut kumpaakaan}) = \frac{4}{26} = \frac{2}{13} = 0,153... \approx 0,15$$

Satunnaisesti valittu työntekijä ei ole ostanut automaattista kahvi eikä teetä todennäköisyydellä 0,15.

Vastaus: 0,15

- 228.** a) Opiskelijoista $35 - 25 = 10$ harrastaa ainakin jompaakumpaa harrastusta. Koska 8 opiskelijaa harrastaa kuvataiteita ja 6 draamaa ja $8 + 6 = 14$, niin kuvataiteita ja draamaa harrastaa $14 - 10 = 4$ opiskelijaa.

$$P(\text{opiskelija harrastaa molempia}) = \frac{4}{35} = 0,114... \approx 0,11$$

Satunnaisesti valittu opiskelija harrastaa sekä kuvataiteita että draamaa todennäköisyydellä 0,11.

Vastaus: $\frac{4}{35} \approx 0,11$

- b) Koska kuvataiteita harrastaa 8 ja molempia 4 opiskelijaa, niin vain kuvataiteita harrastaa $8 - 4 = 4$ opiskelijaa.

Koska draamaa harrastaa 6 ja molempia 4 opiskelijaa, niin vain draamaa harrastaa $6 - 4 = 2$ opiskelijaa.

Vain kuvataiteita tai vain draamaa harrastaa $4 + 2 = 6$ opiskelijaa.

$$P(\text{harrastaa vain jompaakumpaa}) = \frac{6}{35} = 0,171... \approx 0,17$$

Satunnaisesti valittu opiskelija harrastaa vain kuvataiteita tai vain draamaa todennäköisyydellä 0,17.

Vastaus: $\frac{6}{35} \approx 0,17$

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 229.** Valitaan alkeistapauksiksi nelinumeroiset positiiviset kokonaisluvut. Pienin niistä on 1000 ja suurin 9999, joten lukuja on $9999 - (1000 - 1) = 9000$ kappaletta.

Palindromiluvun ensimmäinen numero voidaan valita yhdeksällä eri tavalla (koska se ei voi olla nolla), toinen numero kymmenellä tavalla. Kolmannen numeron on oltava sama kuin toisen, ja viimeisen numeron on oltava sama kuin ensimmäinen. Nelinumeroisia palindromilukuja on siis $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 90$ kappaletta.

$$P(\text{luku on palindromiluku}) = \frac{90}{9000} = \frac{1}{100} = 0,01$$

Luku on palindromiluku todennäköisyydellä 0,01.

Vastaus: 0,01

- 230. a)** Valitaan alkeistapauksiksi 48 numeron joukosta valitut 6 numeron joukot eli kaikki mahdolliset lottorivit. Niiden lukumäärä on $\binom{48}{6} = 12\,271\,512$.

Koska vain yhdellä rivillä voittaa päävoiton, niin suotuisia alkeistapauksia on yksi.

$$P(\text{päävoitto}) = \frac{1}{12\,271\,512} = 8,148... \cdot 10^{-8} \approx 8,1 \cdot 10^{-8}$$

Yhdellä lottorivillä saa päävoiton todennäköisyydellä $8,1 \cdot 10^{-8}$.

Vastaus: $8,1 \cdot 10^{-8}$

- b)** Viisi oikeaa numeroa voidaan valita 6 numeron joukosta $\binom{6}{5} = 6$

tavalla. Kuudes, väärä numero, voidaan valita 42 väärän numeron joukosta $\binom{42}{1} = 42$ tavalla. Rivejä, joissa on täsmälleen viisi oikein, on siis $6 \cdot 42 = 252$ kappaletta. Tapahtumalle ”vähintään viisi oikein” suotuisat alkeistapaukset saadaan, kun täsmälleen viisi oikein riveihin lisätään kuusi oikein rivi.

$$P(\text{vähintään 5 oikein}) = \frac{252 + 1}{12\,271\,512} = 0,0000206\dots \approx 0,000021$$

Yhdellä lottorivillä on vähintään 5 oikein todennäköisyydellä 0,000021.

Vastaus: 0,000021

- c)** Lasketaan vastaavalla tavalla muiden voittavien rivien lukumäärät.

$$4 \text{ oikein: } \binom{6}{4} \binom{42}{2} = 12\,915$$

$$3 \text{ oikein: } \binom{6}{3} \binom{42}{3} = 229\,600$$

Voittavia rivejä on yhteensä $1 + 252 + 12\,915 + 229\,600 = 242\,768$.

$$P(\text{voittaa jotain}) = \frac{242\,768}{12\,271\,512} = 0,0197\dots \approx 0,020$$

Viking Lotossa voittaa jotakin todennäköisyydellä 0,020.

Vastaus: 0,020

- 231. a)** Koska järvessä on yhteensä 5000 kalaa, joista 100 on merkittyjä, niin nostettu kala on merkitty todennäköisyydellä $\frac{100}{5000} = 0,02$.

Vastaus: 0,02

- b)** Koska tarkistusnostolla 43 kalasta 6 oli merkittyjä, voidaan arvioida, että järven kaloista on merkittyjä $\frac{6}{43}$.

Nyt tiedetään, että merkittyjä kaloja on 150, joka on $\frac{6}{43}$ kaikista järven kaloista. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä järven kalojen kokonaismäärä x .

$$\begin{aligned}\frac{6}{43}x &= 150 & \parallel : \frac{6}{43} \\ x &= 1075\end{aligned}$$

Järvessä on arviolta $1075 \approx 1100$ kalaa.

Vastaus: 1100 kalaa

- 232. a)** Valitaan alkeistapauksiksi kuuden hengen jonot. Kaikkien alkeistapausten määrä on $6! = 720$.

Pituusjärjestyksiä on kaksi, joten suotuisia alkeistapauksia on 2.

$$P(\text{jompikumpi pituusjärjestys}) = \frac{2}{720} = 0,00277\ldots \approx 0,0028$$

Ryhmän jäsenet asettuvat jompaankumpaan pituusjärjestykseen todennäköisyydellä 0,28.

Vastaus: 0,0028

- b)** Suotuisia alkeistapauksia ovat a-kohdan kahden alkeistapauksen lisäksi ne, joissa järjestys on muuten pituusjärjestys, mutta yksi henkilö on väärässä paikassa. Väärässä paikassa oleva henkilö voidaan valita kuudella tavalla ja hänelle väärä paikka viidellä tavalla (koska yksi paikka on oikea). Suotuisia alkeistapauksia on siis $2 + 2 \cdot 6 \cdot 5 = 62$.

$$P(\text{ainakin 5 pituusjärjestyksessä}) = \frac{62}{720} = 0,0861\ldots \approx 0,086$$

Ryhmän jäsenistä ainakin 5 on jommassakummassa pituusjärjestyksessä todennäköisyydellä 0,086.

Vastaus: 0,086

- 233.** Opiskelija saa vähintään 8 pistettä, jos hän vastaa vähintään yhdeksään kysymykseen oikein. Vastausrivejä, joissa on täsmälleen 9 oikein, on 10 kappaletta, koska väärä vastaus voi olla mikä tahansa vastauksista 1–10. Vastausrivejä, joissa on 10 oikein, on vain yksi. Suotuisia vastausrivejä on siis $10 + 1 = 11$.

Koska joka kysymykseen on kaksi mahdollista vastausta ja kysymyksiä on 10, on kaikkien mahdollisten vastausrivien määrä $2^{10} = 1024$.

$$P(\text{vähintään 8 pistettä}) = \frac{11}{1024} = 0,0107 \approx 0,011$$

Opiskelija saa kokeesta vähintään 8 pistettä todennäköisyydellä 0,011.

Vastaus: 0,011

- 234. a)** Kahden metrin etäisyydellä tryffelistä koiran todennäköisyys haistaa se on 1. Taulukoidaan tunnetut tiedot.

Etäisyys ² (m ²)	Todennäköisyys
2 ²	1
3 ²	x

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä kysytty todennäköisyys.

$$\begin{aligned} \frac{2^2}{3^2} &= \frac{x}{1} \\ 9x &= 4 \quad \parallel :9 \\ x &= \frac{4}{9} \\ x &= 0,444\dots \end{aligned}$$

Koira haistaa tryffelin todennäköisyydellä 0,44.

Vastaus: 0,44

b) Taulukoidaan annetut tiedot.

Harjoitteluvuosien määrän neliöjuuri	Todennäköisyys
$\sqrt{1}$	$\frac{4}{9}$
$\sqrt{x}$	1

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä tarvittava harjoitteluaika x .

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{x}} &= \frac{\frac{4}{9}}{1} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} &= \frac{4}{9} \\ 4\sqrt{x} &= 9 \\ \sqrt{x} &= \frac{9}{4} \\ x &= \left(\frac{9}{4}\right)^2 \\ x &= \frac{81}{16} \\ x &= 5,0625\end{aligned}$$

Koira haistaa tryffelin kolmen metrin etäisyydeltä varmasti, kun se on harjoitellut 5,0625 vuotta eli 4,0625 vuotta lisää. Vastaus on pyöristettävä ylöspäin, jotta olisi aivan varmaa, että harjoittelu riittää.

Vastaus: 5 vuotta

235. a) Funktion $f(x) = ax + b$ nollakohta on -2 , jos $a \cdot (-2) + b = 0$.

$$\begin{aligned} a \cdot (-2) + b &= 0 \\ -2a &= -b \quad \| :(-1) \\ 2a &= b \end{aligned}$$

Saatu yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $2a = b$, eli kerroin b on kaksinkertainen kertoimeen a nähden.

Taulukoidaan suotuisat kertoimet.

a	$b = 2a$
1	$2 \cdot 1 = 2$
2	$2 \cdot 2 = 4$
3	$2 \cdot 3 = 6$
4 tai suurempi	ei mahdollista

Kaikkia kerroinyhdistelmiä on $6 \cdot 6 = 36$, joista suotuisia on 3.

$$P(\text{nollakohta } -2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0,0833\ldots \approx 0,083$$

Funktion f nollakohta on -2 todennäköisyydellä $0,083$.

Vastaus: $0,083$

- b) Funktion $f(x) = x^2 + ax + b$ nollakohta on -2 ,
jos $(-2)^2 + a \cdot (-2) + b = 0$.

$$\begin{aligned}(-2)^2 + a \cdot (-2) + b &= 0 \\4 - 2a + b &= 0 \\b &= 2a - 4\end{aligned}$$

Saatu yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon
 $b = 2a - 4$.

Taulukoidaan suotuisat kertoimet.

a	$b = 2a - 4$
1	$2 \cdot 1 - 4 = -2$, ei mahdollista
2	$2 \cdot 2 - 4 = 0$, ei mahdollista
3	$2 \cdot 3 - 4 = 2$
4	$2 \cdot 4 - 4 = 4$
5	$2 \cdot 5 - 4 = 6$
6	$2 \cdot 6 - 4 = 8$, ei mahdollista

Kaikkia kerroinyhdistelmiä on 36, joista suotuisia on 3.

$$P(\text{nollakohta } -2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0,0833... \approx 0,083$$

Funktion f nollakohta on -2 todennäköisyydellä 0,083.

Vastaus: 0,083

- 236.** a) Käytetään alkeistapauksina viiden kortin jonoja. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311\,870\,200$.

Tutkitaan sitten suotuisat alkeistapaukset. Ensimmäisen kortin maalla ei ole merkitystä, se voi olla mikä tahansa. Seuraavan kortin on oltava samaa maata kuin ensimmäinen, joten sille on 12 vaihtoehtoa (yksi tämän maan kortti on jo nostettu). Seuraavalle on 11 vaihtoehtoa, sitä seuraavalle 10 ja niin edelleen.

Suotuisia alkeistapauksia on $52 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 627\,760$.

$$P(\text{kaikki samaa maata}) = \frac{627\,760}{311\,875\,200} = 0,00198... \approx 0,0020$$

Viisi päällimmäistä korttia ovat samaa maata todennäköisyydellä 0,0020.

Vastaus: 0,0020

- b) Käytetään alkeistapauksina viiden kortin joukkoja. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

Tutkitaan suotuisat alkeistapaukset. Se kortti, joka on arvoltaan pienin, voi olla arvoltaan mikä tahansa arvoista 1–10. (Jos pienimmän kortin arvo olisi 11, niin suurimman arvo pitäisi olla 15, mikä on mahdotonta.) Kortteja, joiden arvo on 1–10, on 40.

Kun pienimmän kortin arvo on valittu, on muiden neljän kortin arvojen oltava yhtä, kahta, kolmea ja neljää suuremmat kuin pienimmän kortin arvo. Toiseksi pienimmälle kortille on siis 4 vaihtoehtoa, samoin kolmanneksi pienimmälle, toiseksi suurimmalle ja suurimmalle kortille.

Suotuisia alkeistapauksia on siis $40 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 40 \cdot 4^4 = 10\,240$.

$$P(\text{kortit arvoltaan peräkkäisiä}) = \frac{10\,240}{2\,598\,960} = 0,00394\dots \approx 0,0039$$

Viisi päällimmäistä korttia ovat arvoltaan peräkkäisiä todennäköisyydellä 0,0039.

Vastaus: 0,0039

- c) Käytetään alkeistapauksina viiden kortin joukkoja. Suotuisat alkeistapaukset lasketaan kuten b-kohdassa, mutta pienimmän kortin valinnan jälkeen toiseksi pienimmälle kortille on vain yksi vaihtoehto. Esimerkiksi jos pienin kortti on herttaseiska, niin toiseksi pienimmän on oltava herttakasi. Samoin kolmanneksi pienimmälle, toiseksi suurimmalle ja suurimmalle kortille on kullekin vain yksi vaihtoehto. Erilaisia viiden kortin sarjoja, joissa kortit ovat samaa maata ja arvoltaan peräkkäisiä, on siis 40.

$$\begin{aligned} P(\text{kortit samaa maata ja arvoltaan peräkkäisiä}) \\ &= \frac{40}{2\,598\,960} \\ &= 0,000\,015\,3\dots \\ &\approx 0,000\,015 \end{aligned}$$

Viisi päällimmäistä korttia ovat samaa maata ja arvoltaan peräkkäisiä todennäköisyydellä 0,000015.

Vastaus: 0,000015

2.2 Geometrinen todennäköisyys

ALOITA PERUSTEISTA

237. a) Käytetään geometrisena mittana sektorin keskuskulmaa. Koko ympyrän keskuskulma on 360° ja keltaisen sektorin keskuskulma 60° .

$$P(\text{keltainen väri}) = \frac{60}{360} = \frac{1}{6} = 0,166\dots \approx 0,17$$

Onnenpyörän pyöräytyksellä osutaan keltaiselle sektorille todennäköisyydellä 0,17.

Vastaus: 0,17

- b) Punaisen sektorin keskuskulma on 90° .

$$P(\text{punainen väri}) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Onnenpyörän pyöräytyksellä osutaan punaiselle sektorille todennäköisyydellä 0,25.

Vastaus: 0,25

- c) Onnenpyörällä saadaan sininen väri, jos sillä ei saada keltaista eikä punaista väriä. Sinisen sektorin keskuskulma on $360^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 210^\circ$

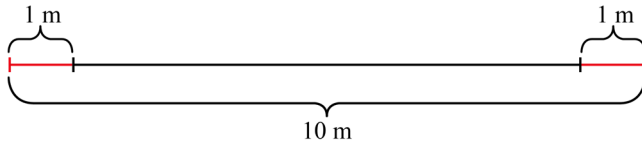
$$P(\text{sininen väri}) = \frac{210}{360} = \frac{7}{12} = 0,583\dots \approx 0,58$$

Onnenpyörän pyöräytyksellä osutaan siniselle sektorille todennäköisyydellä 0,58.

Vastaus: $\frac{7}{12} \approx 0,58$

- 238.** Tukos voi olla missä tahansa 10 metriä pitkän letkun sisällä. Käytetään geometrisena mittana pituutta. Piirretään mallikuva.

Suotuisa pituus on $1\text{ m} + 1\text{ m} = 2\text{ m}$.



Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{tukos on korkeintaan metrin päässä letkun päästä}) = \frac{2}{10} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{5} = 0,2.$$

Tukos on korkeintaan metrin päässä letkun jommastakummasta päästä todennäköisyydellä 0,2.

Vastaus: $\frac{1}{5} = 0,2$

- 239.** Käytetään geometrisena mittana alueen pinta-alaa. Koko lattian pinta-ala on $7\text{ m} \cdot 3\text{ m} = 21\text{ m}^2$ ja suotuisan alueen pinta-ala on $5\text{ m} \cdot 1\text{ m} = 5\text{ m}^2$.

$$P(\text{putoaa matolle}) = \frac{5}{21} = 0,238\dots \approx 0,24$$

Vastaus: $\frac{5}{21} \approx 0,24$

- 240.** **A** Tikanheitossa tiettyyn alueeseen osumisen todennäköisyys riippuu alueen pinta-alasta, joten kysymys A ja mitta II kuuluvat yhteen.
- B** Puun kaatumisessa olennainen mitta on 0 asteen ja 360 asteen välillä oleva suunta, johon puu kaatuu, joten kysymys B ja mitta IV kuuluvat yhteen.
- C** Narun katkaisemisessa satunnaisesta kohdasta olennainen mitta on leikkauskohdan etäisyys narun päästä eli pituus, joten kysymys C ja mitta I kuuluvat yhteen.
- D** Neulan etsimisessä heinäsuovasta olennainen mitta on tilavuus, jonka sisältä neula mahdollisesti löytyy, joten kysymys D ja mitta III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: IV, C: I ja D: III

241. Käytetään geometrisena mittana alueiden pinta-aloja. Koko alueen pinta-ala on $510\,000\,000\text{ km}^2$.

- a) Suotuisan alueen pinta-ala on $362\,000\,000\text{ km}^2$, joten kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{meteoriitti putoaa mereen}) = \frac{362\,000\,000}{510\,000\,000} = 0,709\dots \approx 0,71.$$

Meteoriitti putoaa mereen todennäköisyydellä 0,71.

Vastaus: 0,71

- b) Koska meteoriitti putoaa mereen todennäköisyydellä 0,709..., se putoaa maalle todennäköisyydellä $1 - 0,709\dots = 0,290\dots \approx 0,29$.

Meteoriitti putoaa maalle todennäköisyydellä 0,29.

Vastaus: 0,29

- c) Suotuisan alueen pinta-ala on $337\,000\text{ km}^2$, joten kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{meteoriitti putoaa Suomeen}) = \frac{337\,000}{510\,000\,000} = 0,000660\dots \approx 0,00066.$$

Meteoriitti putoaa Suomeen todennäköisyydellä 0,00066.

Vastaus: 0,00066

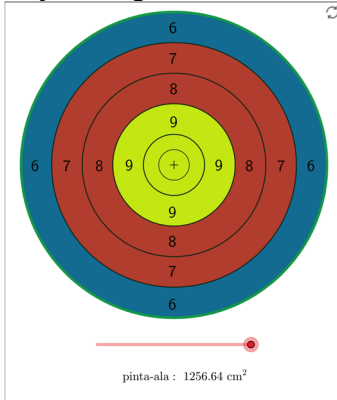
- 242.** Käytetään geometrisenä mittana tilavuutta. Kolme ensimmäistä puuron hakijaa ottaa puuroa yhteensä $3 \cdot 2 \text{ dl} = 6 \text{ dl}$. Puuroa on yhteensä $5 \text{ l} = 50 \text{ dl}$.

$$P(\text{mantelin saa joku kolmesta ensimmäisestä}) = \frac{6}{50} = \frac{3}{25} = 0,12$$

Manteli tulee jollekin kolmesta ensimmäisestä puuron ottajasta todennäköisyydellä 0,12.

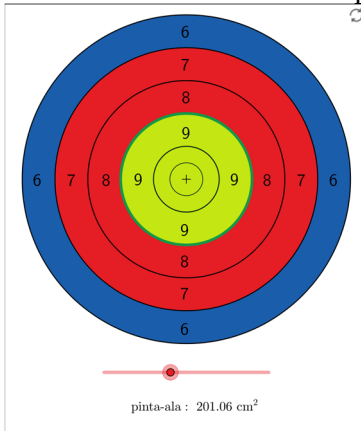
Vastaus: $\frac{3}{25} = 0,12$

243. Käytetään geometrisena mittana pinta-alaa.



Koko taulun pinta-ala on $1256,64 \text{ cm}^2$.

a) Määritetään suotuisan alueen pinta-ala appletin avulla.



Suotuisan alueen pinta-ala on $201,06 \text{ cm}^2$.

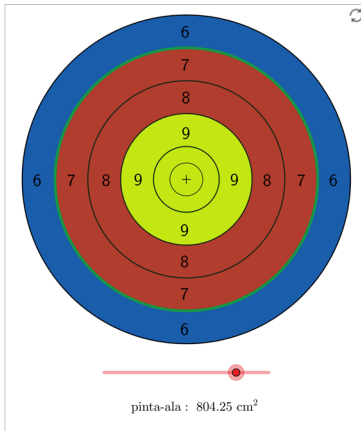
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{vähintään } 9) = \frac{201,06 \text{ cm}^2}{1256,64 \text{ cm}^2} = 0,159... \approx 0,16.$$

Nuolella saa pisteluvuksi vähintään 9 todennäköisyydellä 0,16.

Vastaus: 0,16

- b) Suotuisan alueen pinta-ala saadaan vähentämällä koko taulun pinta-alasta renkaiden 7–10 alue. Määritetään renkaiden 7–10 alue appletin avulla.



Renkaiden 7–10 pinta-ala on 804,25 cm².

Suotuisan alueen pinta-ala on 1256,64 cm² – 804,25 cm² = 452,39 cm².

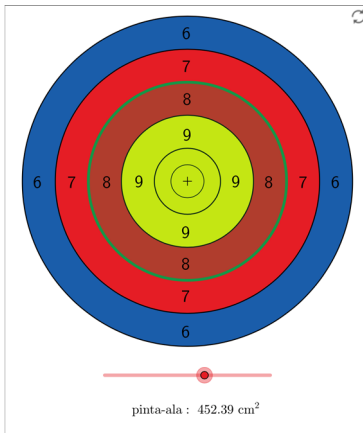
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{alle } 7) = \frac{452,39 \text{ cm}^2}{1256,64 \text{ cm}^2} = 0,359... \approx 0,36.$$

Nuolella saa pisteluvuksi alle 7 todennäköisyydellä 0,36.

Vastaus: 0,36

- c) Suotuisan alueen pinta-ala saadaan vähentämällä renkaiden 7–10 pinta-alasta renkaiden 8–10 pinta-ala. Määritetään renkaiden 8–10 pinta-ala appletin avulla.



Renkaiden 8–10 pinta-ala on 452,39 cm².

b-kohdan perusteella renkaiden 7–10 pinta-ala on 804,25 cm².

Suotuisan alueen pinta-ala on $804,25 \text{ cm}^2 - 452,39 \text{ cm}^2 = 351,86 \text{ cm}^2$.

Kysytty todennäköisyys on

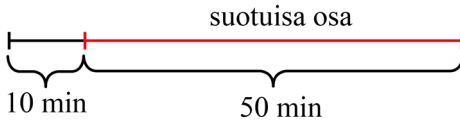
$$P(7 \text{ tai } 8) = \frac{351,86 \text{ cm}^2}{1256,64 \text{ cm}^2} = 0,280... \approx 0,28.$$

Nuolella saa pisteluvuksi 7 tai 8 todennäköisyydellä 0,28.

Vastaus: 0,28

VAHVISTA OSAAMISTA

244. a) Jos Faini saapuu kello 12.10 jälkeen, niin Elviira joutuu odottamaan yli 10 minuuttia. Määritetään kysytty todennäköisyys geometrisesti käyttämällä mittoina janojen pituuksia.



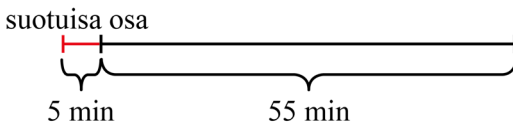
Jaetaan suotuisan osan pituus koko janan pituudella.

$$P(\text{odottaa yli 10 min}) = \frac{50}{60} = \frac{5}{6} = 0,8333... \approx 0,83$$

Elviira joutuu odottamaan Fainia yli 10 minuuttia todennäköisyydellä 0,83.

Vastaus: $\frac{5}{6} \approx 0,83$

- b) Jos Faini saapuu ennen kello 12.05, niin Elviira joutuu odottamaan alle 5 minuuttia.



Jaetaan suotuisan osan pituus koko janan pituudella.

$$P(\text{odottaa yli 10 min}) = \frac{5}{60} = 0,0833... \approx 0,083$$

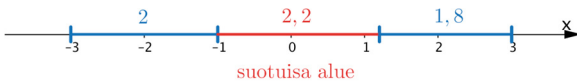
Elviira joutuu odottamaan Fainia alle 5 minuuttia todennäköisyydellä 0,083.

Vastaus: $\frac{5}{60} \approx 0,083$

- 245.** **A** Tilanteessa A vihreä valo palaa 30 s ja punainen valo 2 min = 120 s kerrallaan. Tilanne A ja havainnollistus II kuuluvat yhteen.
- B** Tilanteessa B punainen valo palaa 30 s ja vihreä valo 2 min = 120 s kerrallaan. Tilanne B ja havainnollistus I kuuluvat yhteen.
- C** Tilanteessa C punainen valo palaa 30 s kerrallaan, joten vihreä valo palaa $120 \text{ s} - 30 \text{ s} = 90 \text{ s}$ kerrallaan. Tilanne C ja havainnollistus IV kuuluvat yhteen.
- D** Tilanteessa D punainen valo palaa 90 s ja vihreä valo 30 s kerrallaan. Tilanne D ja havainnollistus III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: I, C: IV ja D: III

- 246.** Määritetään kysytty todennäköisyys käyttämällä mittoina janojen pituuksia.



Koko janan pituus on 6 ja suotuisan osan pituus 2,2. Jaetaan suotuisan osan pituus koko janan pituudella.

$$P(\text{luku on suurempi kuin } -1 \text{ mutta pienempi kuin } 1,2) \\ = \frac{2,2}{6} = 0,366\dots \approx 0,37$$

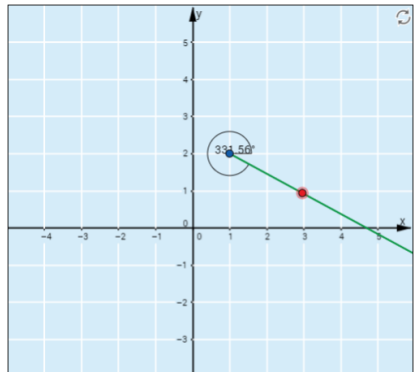
Luku on suurempi kuin -1 mutta pienempi kuin $1,2$ todennäköisyydellä $0,37$.

Vastaus: $0,37$

247. a) Tutkitaan tilannetta appletin avulla.

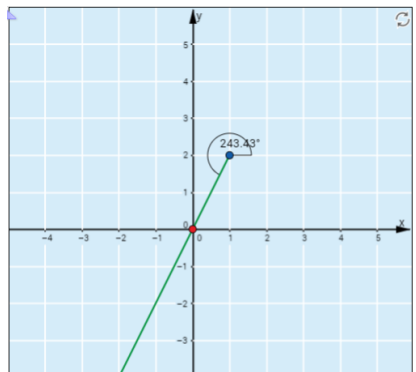
Jos puolisuora on laskeva, se leikkaa positiivisen x -akselin.

Nousevakin puolisuora voi leikata positiivisen x -akselin, kunhan suora nousee riittävän jyrkästi.



Nousevuus ja laskevuus riippuu kulmasta, jonka suora kiertyy positiiviseen x -akseliin nähden. Kyseinen kulma on vähintään 0° ja alle 360° .

Vastaus: kulman suuruus



- b)** Suotuisat kulmat ovat appletin mukaan yli $243,43^\circ$ ja alle 360° .
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{leikkaa positiivisen } x\text{-akselin}) = \frac{360^\circ - 243,43^\circ}{360^\circ} = 0,323\dots \approx 0,32.$$

Puolisuora leikkaa positiivisen x -akselin todennäköisyydellä 0,32.

Vastaus: 0,32

- 248. a)** Käytetään geometrisena mittana alueiden pinta-aloja. Piirretään mallikuva.

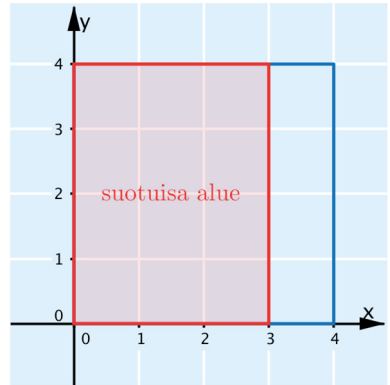
Koko neliön pinta-ala on $4 \cdot 4 = 16$.
Suotuisan alueen pinta-ala on $3 \cdot 4 = 12$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(x < 3) = \frac{12}{16} = 0,75.$$

x -koordinaatti on pienempi kuin 3 todennäköisyydellä 0,75.

Vastaus: 0,75

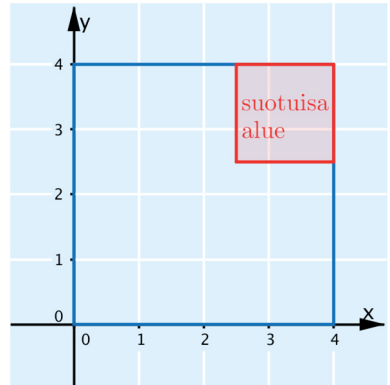


- b)** Piirretään mallikuva.

Suotuisa alue on neliö, jonka sivun pituus on $4 - 2,5 = 1,5$. Suotuisan alueen pinta-ala on $1,5^2 = 2,25$.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(x > 2,5 \text{ ja } y > 2,5) \\ = \frac{2,25}{16} = 0,140\dots \approx 0,14. \end{aligned}$$



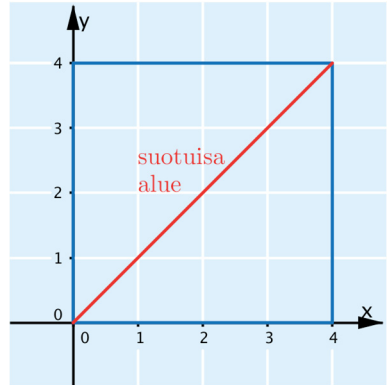
x - ja y -koordinaatit ovat suurempia kuin 2,5 todennäköisyydellä 0,14.

Vastaus: 0,14

c) Piirretään mallikuva.

Suotuisat pisteet ovat janalla, jonka päätepisteet ovat $(0,0)$ ja $(4,4)$. Neliön pinta-alasta puolet on janan alapuolella ja puolet janan yläpuolella. Janalla olevan ”alueen” pinta-ala on siis 0, joten kysytty todennäköisyys on 0.

Vastaus: 0



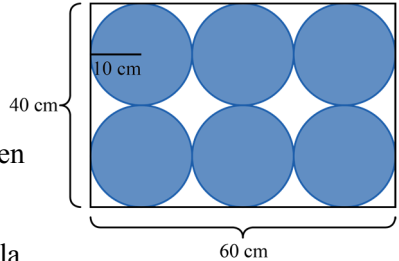
- 249.** Naula rikkoo maalitölkin kannen, jos naula osuu ympyröiden kohdalle. Jos naula osuu muualle suorakulmioon, kansi ei mene rikki.

Koska laatikon mitat ovat 60 cm x 40 cm, niin ympyröiden säteet ovat 10 cm.

Suotuisan alueen pinta-ala

on $6 \cdot \pi \cdot (10 \text{ cm})^2 = 1884,955... \text{ cm}^2$.

Laatikon kansi on suorakulmio, jonka kanta on 60 cm ja korkeus 40 cm, joten sen pinta-ala on $60 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm} = 2400 \text{ cm}^2$.



Kysytty todennäköisyys saadaan jakamalla suotuisan alueen pinta-ala koko alueen pinta-alalla.

$$P(\text{tölkin kansi rikkoutuu}) = \frac{1884,955... \text{ cm}^2}{2400 \text{ cm}^2} = 0,785... \approx 0,79$$

Maalitölkin kansi rikkoutuu todennäköisyydellä 0,79.

Vastaus: 0,79

- 250.** Käytetään geometrisena mittana tilavuutta. Suotuisa alue on pallo, jonka

tilavuus on $\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot (2,5 \text{ m})^3}{3} = 65,449... \text{ m}^3$.

Koko järven tilavuus on $7,452 \cdot 10^9 \text{ m}^3$.

Kysytty todennäköisyys saadaan jakamalla suotuisan osan tilavuus koko järven tilavuudella.

$$P(\text{hirviö syö kalan}) = \frac{65,449...}{7,452 \cdot 10^9} = 8,782... \cdot 10^{-9} \approx 8,8 \cdot 10^{-9}$$

Hirviö syö kalan todennäköisyydellä $8,8 \cdot 10^{-9}$.

Vastaus: $8,8 \cdot 10^{-9}$

- 251. a)** Käytetään geometrisena mittana alueiden pinta-aloja.
Koko taulu on ympyrä, jonka säde on 10 cm ja
pinta-ala $\pi \cdot (10 \text{ cm})^2 = 314,159\dots \text{ cm}^2$.
Suotuisa alue on ympyrä, jonka säde on 2 cm ja
pinta-ala $\pi \cdot (2 \text{ cm})^2 = 12,566\dots \text{ cm}^2$.

Lasketaan kysytty todennäköisyys jakamalla suotuisan alueen pinta-ala koko taulun pinta-alalla.

$$P(\text{vähintään } 9) = \frac{12,566\dots}{314,159\dots} = 0,04$$

Tikan pistemäärä on vähintään 9 todennäköisyydellä 0,04.

Vastaus: 0,04

- b)** Tikan pistemäärä on alle 8, jos tikka ei osu ympyrään, jonka säde on 3,0 cm. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.
Vastatapahtumalle suotuisa mitta on $\pi \cdot (3 \text{ cm})^2 = 28,274\dots \text{ cm}^2$.

$$P(\text{alle } 8) = 1 - P(\text{vähintään } 8) = 1 - \frac{28,274\dots}{314,159\dots} = 0,91$$

Tikan pistemäärä on alle todennäköisyydellä 0,91.

Vastaus: 0,91

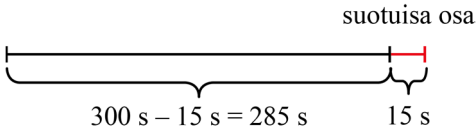
- c)** Pistemäärä on tasan 8, jos se ei ole vähintään 9 eikä alle 8. Lasketaan kysytty todennäköisyys käyttämällä apuna a- ja b-kohtien tuloksia.

$$P(\text{tasan } 8) = 1 - [P(\text{vähintään } 9) + P(\text{alle } 8)] = 1 - (0,04 + 0,91) = 0,05$$

Tikan pistemäärä on tasan 8 todennäköisyydellä 0,05.

Vastaus: 0,05

- 252. a)** Määritetään kysytty todennäköisyys käyttämällä mittoina janojen pituuksia. Koko janan pituus on metron vuoroväli $5 \cdot 60 \text{ s} = 300 \text{ s}$. Suotuisan osan pituus on 15 s.

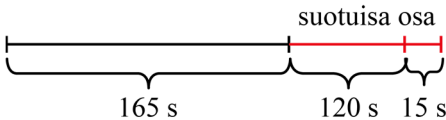


$$P(\text{pääsee suoraan metroon}) = \frac{15}{300} = 0,05$$

Metroasemalle kävelevä pääsee suoraan metroon todennäköisyydellä 0,05.

Vastaus: 0,05

- b)** Odotus saa kestää korkeintaan 2 min = 120 s, ja metro seisoo pysäkillä 15 s. Janan suotuisan osan pituus on $120 \text{ s} + 15 \text{ s} = 135 \text{ s}$.



$$P(\text{odottaa alle 2 minuuttia}) = \frac{135}{300} = 0,45$$

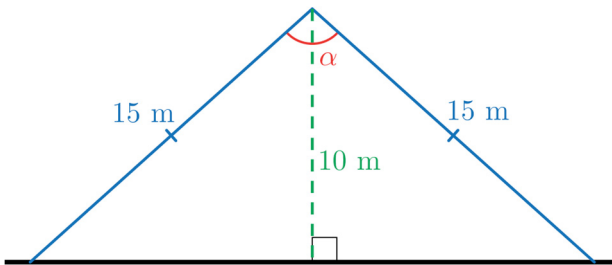
Metroasemalle kävelevä joutuu odottamaan sisäänpääsyä alle 2 minuuttia todennäköisyydellä 0,45.

Vastaus: 0,45

- c)** Yksittäisen pisteen todennäköisyys tulla valituksi on 0.

Vastaus: 0

253. Piirretään mallikuva.



Kuvassa musta suora esittää tietä ja siniset janat tolpan niitä kaatumissuuntia, joissa tolpan pää juuri ja juuri osuu tielle. Tolpan tyvi on tasakylkisen kolmion huipussa.

Käytetään geometrisena mittana kulmaa, jonka kaatunut puu muodostaa tien normaalin kanssa. Puu voi kaatua mihin tahansa suuntaan, joten kulma voi olla mikä tahansa 0° ja 360° väliltä.

Lasketaan suotuisa osa α . Kuvan kolmio on tasakylkinen, joten 10 m pitkä korkeusjana jakaa sen kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Lasketaan kulman α puolikas β suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.

$$\cos \beta = \frac{10}{15}$$
$$\beta = 48,189\dots^\circ$$

Suotuisa osa on $\alpha = 2\beta = 2 \cdot 48,189\dots^\circ = 96,379\dots^\circ$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{osuu tielle}) = \frac{96,379\dots}{360} = 0,267\dots \approx 0,27.$$

Tolpan pää osuu tielle todennäköisyydellä 0,27.

Vastaus: 0,27

- 254. a)** Käytetään geometrisena mittana keskuskulmaa. Merkitään pienimmän sektorin keskuskulmaa kirjaimella α . Muiden sektorien keskuskulmat ovat suoraan verrannollisuuden vuoksi 2α , 3α ja niin edelleen. Koko ympyrän kulma on $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha + 7\alpha + 8\alpha = 36\alpha$. Suotuisen alueen kulma on 8α . Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{sektori } 8) = \frac{8\alpha}{36\alpha} = \frac{2}{9} = 0,222\dots \approx 0,22.$$

Kilpailija osuu numeroon 8 todennäköisyydellä 0,22.

Vastaus: 0,22

- b)** Suotuisa kulma on $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 6\alpha$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{sektori } 1, 2 \text{ tai } 3) = \frac{6\alpha}{36\alpha} = \frac{1}{6} = 0,166\dots \approx 0,17.$$

Kilpailija osuu korkeintaan numeroon 3 todennäköisyydellä 0,17.

Vastaus: 0,17

- c)** Suotuisa kulma on $\alpha + 3\alpha + 5\alpha + 7\alpha = 16\alpha$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{pariton numero}) = \frac{16\alpha}{36\alpha} = \frac{4}{9} = 0,444\dots \approx 0,44.$$

Kilpailija osuu parittomaan numeroon todennäköisyydellä 0,44.

Vastaus: 0,44

255. Piirretään mallikuva.

Koska pallo mahtuu kuution
sisälle juuri ja juuri,
pallon halkaisija on 2,0 cm eli
pallon säde on 1,0 cm.
Käytetään geometrisena mittana
tilavuutta.

Kuution tilavuus on
 $(2,0 \text{ cm})^3 = 8,0 \text{ cm}^3$.

Pallon tilavuus on

$$\frac{4}{3} \pi \cdot (1,0 \text{ cm})^3 = 4,188... \text{ cm}^3.$$

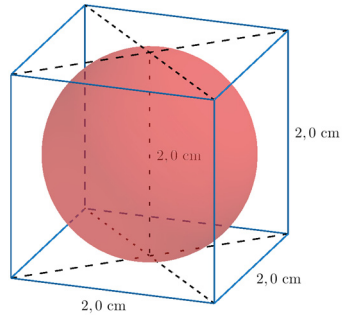
Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{kuution sisältä valittu piste on pallon sisällä})$

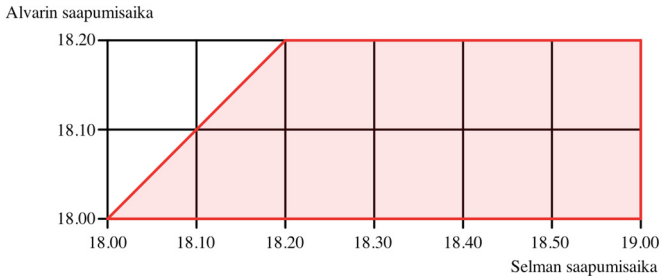
$$= \frac{4,188... \text{ cm}^3}{8,0 \text{ cm}^3} = 0,523... \approx 0,52$$

Kuution sisältä valittu piste on pallon sisällä todennäköisyydellä 0,52.

Vastaus: 0,52



- 256.** a) Selma saapuu satunnaiseen kellonaikaan kello 18.00 ja 19.00 välillä. Alvar saapuu satunnaiseen kellonaikaan kello 18.00 ja 18.20 välillä. Havainnollistetaan Selman ja Alvarin saapumisaikoja koordinaatistossa. Merkitään vaakaa-akselilla Selman saapumisaikojen kohdat ja pystyakselille Alvarin saapumisaikojen kohdat.



Jos Selma ja Alvar saapuvat yhtä aikaa, ei Alvar joudu odottamaan Selmaan lainkaan. Tätä tilannetta kuvaavat pisteet ovat pisteiden $(18.00; 18.00)$ ja $(18.20; 18.20)$ kulkevalla janalla. Jos Selma saapuu Alvaria myöhemmin, piste on tuon janan oikealla puolella.

Käytetään geometrisena mittana alueiden pinta-aloja. Koko alueen pinta-ala on $60 \cdot 20 = 1200$. Suotuisa alue on puolisuunnikas, jonka pinta-ala on $\frac{60 + 40}{2} \cdot 20 = 1000$.

Todennäköisyys sille, ettei Selma joudu odottamaan Alvaria ollenkaan, saadaan jakamalla suotuisan alueen pinta-ala koko alueen pinta-alalla.

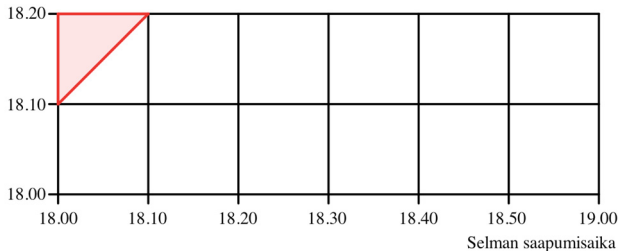
$$P(\text{Selma ei odota}) = \frac{1000}{1200} = 0,833\ldots \approx 0,83$$

Selma ei joudu odottamaan Alvaria lainkaan todennäköisyydellä 0,83.

Vastaus: 0,83

- b) Tilanteet, joissa Selma joutuu odottamaan Alvaria tasan 10 minuuttia, ovat pisteiden (18.00; 18:10) ja (18:10; 18:20) kulkevalla janalla. Jos Selma odottaa tätä kauemmin, on piste tuon janan yläpuolella.

Alvarin saapumisaika



Suotuisan alue on suorakulmainen kolmio, jonka pinta-ala on $\frac{10 \cdot 10}{2} = 50$.

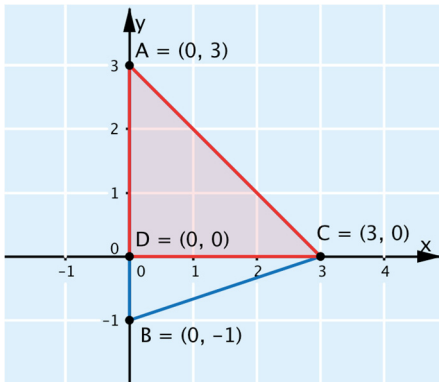
$$P(\text{Selma odottaa yli 10 min}) = \frac{50}{1200} = 0,0416... \approx 0,042$$

Selma joutuu odottamaan Alvaria yli 10 minuuttia todennäköisyydellä 0,042.

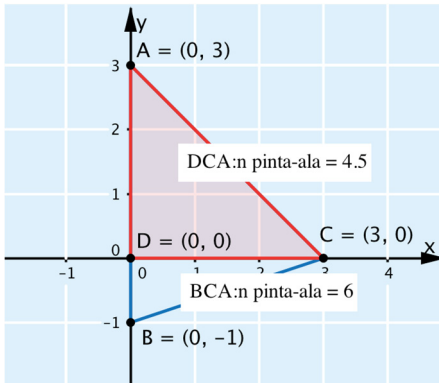
Vastaus: 0,042

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

257. a) Piirretään mallikuva. Suotuisa alue on se osa kolmiosta, joka on suoran $y = 0$ eli x -akselin yläpuolella.



Käytetään geometrisena mittana pinta-alaa. Määritetään koko alueen ja suotuisan alueen pinta-alat ohjelman avulla.



Koko kolmion pinta-ala on 6 ja suotuisan alueen pinta-ala 4,5. Kysytty todennäköisyys on

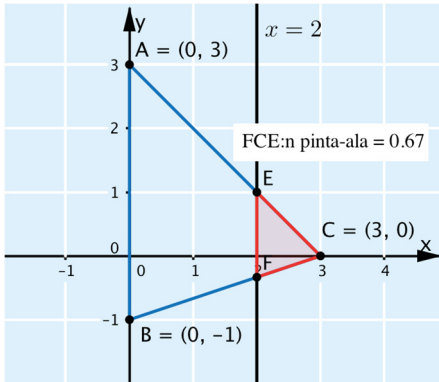
$$P(y \geq 0) = \frac{4,5}{6} = 0,75.$$

$y \geq 0$ todennäköisyydellä 0,75.

Vastaus: 0,75

- b) Piirretään suora $x = 2$ ja määritetään suoran ja kolmion sivujen leikkauspisteet ohjelman avulla.

Suotuisa alue on se osa kolmiosta, joka suoran $x = 2$ oikealla puolella. Piirretään suotuisa kolmio ja määritetään sen pinta-ala ohjelman avulla.



Suotuisan kolmion pinta-ala on 0,66667. Kysytty todennäköisyys on

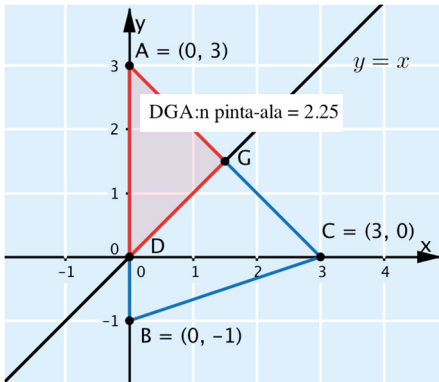
$$P(x \geq 2) = \frac{0,66667}{6} = 0,111\dots \approx 0,11.$$

$x \geq 2$ todennäköisyydellä 0,11.

Vastaus: 0,11

- e) Piirretään suora $y = x$ ja määritetään suoran ja kolmion sivujen leikkauspisteet ohjelman avulla.

Suotuisa alue on se osa kolmiosta, joka suoran $y = x$ yläpuolella. Piirretään suotuisa kolmio ja määritetään sen pinta-ala ohjelman avulla.



Suotuisan kolmion pinta-ala on 2,25. Kysytty todennäköisyys on

$$P(y \geq x) = \frac{2,25}{6} = 0,375 \dots \approx 0,38.$$

$y \geq x$ todennäköisyydellä 0,38.

Vastaus: 0,38

- 258.** Koska kartion mittoja ei ole annettu, merkitään juoman alkuperäistä korkeutta kirjaimella h ja tilavuutta kirjaimella V . Kun ylioppilas on juonut kuohuviiniä, jäljellä oleva viini on alkuperäisen juoman kanssa yhdenmuotoinen kartio, jonka korkeus on $\frac{2}{3}h$.

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Muodostetaan tämän tiedon avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä jäljellä olevan juoman tilavuus V_{uusi} .

$$\begin{aligned}\frac{V_{\text{uusi}}}{V} &= \left(\frac{\frac{2}{3}h}{h} \right)^3 \\ \frac{V_{\text{uusi}}}{V} &= \left(\frac{2}{3} \right)^3 \\ \frac{V_{\text{uusi}}}{V} &= \frac{2^3}{3^3} \\ \frac{V_{\text{uusi}}}{V} &= \frac{8}{27} \\ 27V_{\text{uusi}} &= 8V \quad ||: 27 \\ V_{\text{uusi}} &= \frac{8}{27}V\end{aligned}$$

Suotuisan osan tilavuus on juodun kuohuviinin tilavuus eli

$$V - V_{\text{uusi}} = V - \frac{8}{27}V = \frac{19}{27}V.$$

Lasketaan kysytty todennäköisyys jakamalla suotuisan osan tilavuus koko tilavuudella.

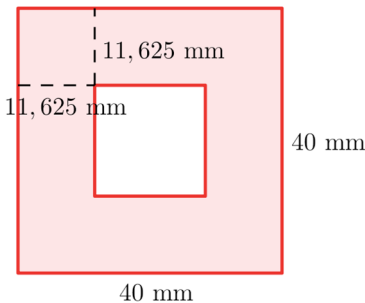
$$P(\text{roska joutuu suuhun}) = \frac{\frac{19}{27}V}{V} = \frac{19}{27} = 0,703\dots \approx 0,70$$

Roska joutuu ylioppilaan suuhun todennäköisyydellä 0,70.

Vastaus: 0,70

259. Se, osuuko kolikko neliön sivuun tai kärkeen, riippuu siitä, mihin kohtaan neliötä kolikon keskipiste tulee. Pöytä on suuri, joten voidaan ajatella pöydän reunalle osumisen olevan niin epätodennäköistä, ettei sen mahdollisuutta tarvitse ottaa huomioon. Ajatellaan siis pöytäliinan koostuvan äärettömän monesta samanlaisesta neliöstä, joten riittää tutkia yhtä neliötä.

- a) Kolikko osuu neliön reunaan, jos kolikon keskipisteen etäisyys neliön sivusta on ympyrän säteen $r = \frac{23,25 \text{ mm}}{2} = 11,625 \text{ mm}$ suuruinen tai pienempi. Piirretään mallikuva.



Koko neliön pinta-ala on $40 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm} = 1600 \text{ mm}^2$.

Suotuisan alueen pinta-ala saadaan vähentämällä koko neliön pinta-alasta keskellä olevan pienen neliön pinta-ala.

Pienen neliön sivun pituus on $40 \text{ mm} - 23,25 \text{ mm} = 16,75 \text{ mm}$ ja pinta-ala $16,75 \text{ mm} \cdot 16,75 \text{ mm} = 280,5625 \text{ mm}^2$.

Suotuisan alueen pinta-ala on

$$1600 \text{ mm}^2 - 280,5625 \text{ mm}^2 = 1319,4375 \text{ mm}^2.$$

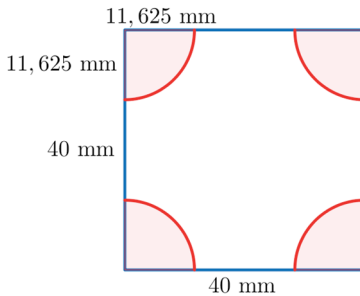
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{osuu neliön sivuun}) = \frac{1319,4375}{1600} = 0,824... \approx 0,82.$$

Kolikko osuu neliön sivuun todennäköisyydellä 0,82.

Vastaus: 0,82

- b) Kolikko peittää neliön kärjen, jos kolikon keskipisteen etäisyys neliön kärjestä on ympyrän säteen $r = \frac{23,25 \text{ mm}}{2} = 11,625 \text{ mm}$ suuruinen tai pienempi. Piirretään mallikuva.



Suotuisa alue koostuu neljästä yhtenevästä ympyräsektorista. Sektorit muodostavat yhdessä kokonaisen ympyrän, jonka säde on $r = 11,625 \text{ mm}$.

Suotuisan alueen pinta-ala on $\pi \cdot (11,625 \text{ mm})^2 = 424,556 \dots \text{ mm}^2$.

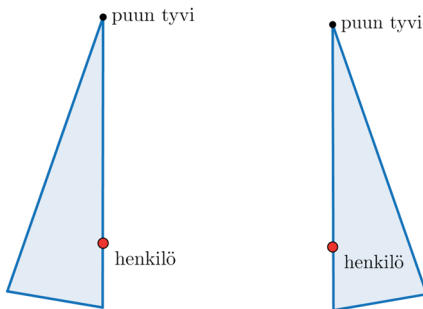
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{kolikko osuu neliön kärkeen}) = \frac{424,556 \dots}{1600} = 0,265 \dots \approx 0,27.$$

Kolikko osuu neliön kärkeen todennäköisyydellä 0,27.

Vastaus: 0,27

- 260.** Ylhäältä katsottuna kaatunut puu näyttää tasakylkiseltä kolmiolta, jonka korkeus on 19 m ja kanta $2 \cdot 3,2 \text{ m} = 6,4 \text{ m}$.



Puun mahdolliset kaatumissuunnat ovat 0° ja 360° välillä. Henkilö jää juuri ja juuri puun alle, jos kolmion kylki on henkilön päällä.

Lasketaan kolmion huippukulman puolikas α .

$$\tan \alpha = \frac{3,2}{19}$$
$$\alpha = 9,560\dots^\circ$$

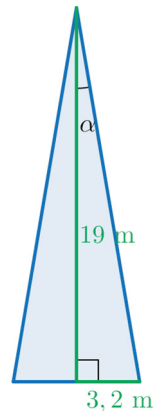
Kolmion huippukulma on siis $2 \cdot 9,560\dots^\circ = 19,120\dots^\circ$

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{kaatuu henkilön päälle}) = \frac{19,120\dots^\circ}{360^\circ} = 0,0531\dots \approx 0,053.$$

Puu osuu henkilöön todennäköisyydellä 0,053.

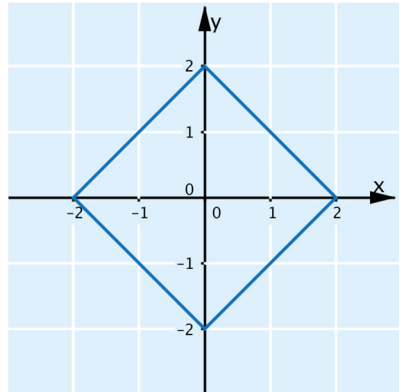
Vastaus: 0,053



261. Piirretään mallikuva.

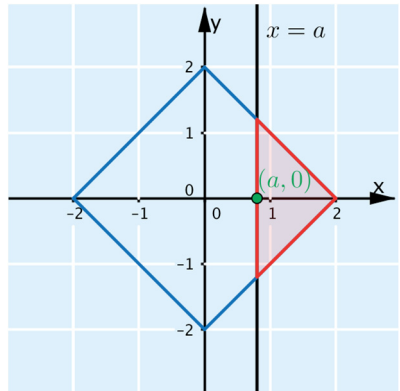
Sattumanvaraisesti neliön sisältä valitun pisteen x -koordinaatti on suurempi kuin a todennäköisyydellä $0,125$, eli satunnaisesti valittu neliön sisäpuolinen piste on suoran $x = a$ oikealla puolella todennäköisyydellä $0,125$, eli neliön pinta-alasta $12,5\%$ on suoran $x = a$ oikealla puolella.

Suora $x = a$ on y -akselin oikealla puolella, koska muuten vähintään puolet neliön pinta-alasta olisi suoran $x = a$ oikealla puolella.



Neliön sivun pituus on Pythagoraan lauseen mukaan $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, joten neliön pinta-ala on $\sqrt{8}^2 = 8$.

Koska $12,5\%$ neliön pinta-alasta on suoran $x = a$ oikealla puolella, niin kuvaan merkityn kolmion pinta-ala on $0,125 \cdot 8 = 1$.

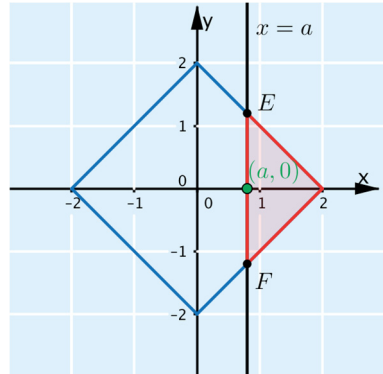


Valitaan suoran $x = a$ osa kolmion kannaksi. Määritetään kolmion kanta ja korkeus luvun a funktioina, jotta voitaisiin muodostaa kolmion pinta-alan lauseke ja ratkaista a siitä yhtälön avulla.

Kolmion korkeus on pisteiden $(2, 0)$ ja $(a, 0)$ välinen etäisyys eli $2 - a$.

Kolmion kannan toinen päätepiste E on pisteiden $(0, 2)$ ja $(2, 0)$ kautta kulkevalla suoralla. Kyseisen suoran vakiotermi on 2, koska suora leikkaa y -akselin pisteessä $(0, 2)$. Määritetään suoran kulmakerroin pisteiden $(0, 2)$ ja $(2, 0)$ koordinaattien avulla.

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1$, joten suoran yhtälö on $y = -x + 2$.



Piste E on suoralla $y = -x + 2$ ja sen x -koordinaatti on a , joten sen y -koordinaatti on $y = -a + 2$. Siis $E = (a, -a + 2)$.

Piste $(a, 0)$ on janan EF keskipiste, joten janan EF pituus on $2(-a + 2)$. Siis kolmion kanta on $2(-a + 2)$.

Kolmion pinta-alan lauseke on

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2-a) \cdot (-a+2)}{2} \\ &= (2-a)(-a+2) \\ &= -2a + 4 + a^2 - 2a \\ &= a^2 - 4a + 4. \end{aligned}$$

Toisaalta kolmion pinta-alan tiedetään olevan 1. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä luku a .

$$a^2 - 4a + 4 = 1$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$a = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$a = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$a = 3 \text{ tai } a = 1$$

Ratkaisu $a = 3$ ei tule kysymykseen, koska suora $x = 3$ on neliön ulkopuolella. Suora $x = 1$ taas on neliön sisällä. Siis $a = 1$.

Vastaus: $a = 1$

ALOITUSAUKEAMAAN LIITTYVIÄ TEHTÄVIÄ

1. Taulukoidaan mahdolliset alleeliparit.

		Isä	
		A	a
Äiti	A	AA	Aa
	a	Aa	aa

Lapsi on sairas, jos hänellä on alleelipari aa. Kaikkien mahdollisten alleeliparien määrä on 4, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{1}{4} = 0,25$.

Vastaus: 0,25

2. Taulukoidaan lapsen äidin mahdolliset alleeliparit.

		Äidinisä	
		A	A
Äidiniäiti	A	AA	AA
	a	Aa	Aa

Todennäköisyys sille, että äiti saa alleeliparin AA, on $\frac{2}{4} = 0,5$. Samoin äiti saa alleeliparin Aa todennäköisyydellä 0,5.

Isällä on täsmälleen sama tilanne kuin äidillä. Tutkitaan kaikki mahdolliset tilanteet.

Äiti	Isä	Tilanteen todennäköisyys
AA	AA	$0,5 \cdot 0,5 = 0,25$
AA	Aa	$0,5 \cdot 0,5 = 0,25$
Aa	AA	$0,5 \cdot 0,5 = 0,25$
Aa	Aa	$0,5 \cdot 0,5 = 0,25$

Lapsi voi sairastua vain, jos sekä äidillä että isällä on geenipari Aa, mikä tapahtuu taulukon mukaan todennäköisyydellä 0,25 eli yksi tapaus neljästä. Edellisen tehtävän ratkaisussa on laskettu, että tässä tilanteessa lapsi sairastuu todennäköisyydellä 0,25 eli yksi tapaus neljästä.

Tilanteessa lapsi voi saada $4 \cdot 4 = 16$ erilaista alleeliparia, joista alleelipari aa esiintyy yhdessä tapauksessa. Kysytty todennäköisyys on $\frac{1}{16} = 0,0625 \approx 0,63$.

Lapsi on sairas todennäköisyydellä 0,063.

Vastaus: 0,063