

3 TODENNÄKÖISYYDEN LASKUSÄÄNTÖJÄ

POHDITTAVAA

1. Pelaamalla peliä esimerkiksi 10 000 peliä havaitaan, että pelaaja jää lähes aina tappiolle. 10 000 pelissä kokonaistuotto voi olla esimerkiksi -3334 euroa eli sataa peliä kohti $-33,34$ euroa. Pelaaja näyttäisi jäävän sataa peliä kohti noin 30 euroa tappiolle.

Vastaus: n. 30 € tappiota

2. Kun pelipanos otetaan huomioon, niin keskimäärin yksi peli kymmenestä tuottaa $4 \text{ €} - 1 \text{ €} = 3 \text{ €}$ ja yhdeksän peliä kymmenestä tuottaa kukin -1 € . Kokonaistuotto on tällöin $9 \cdot (-1 \text{ €}) + 1 \cdot 3 \text{ €} = -6 \text{ €}$. Pelaaja on odotettavasti 6 euroa alkuperäistä köyhempi.

Vastaus: 6 € köyhempi

3.1 Kertolaskusääntö

ALOITA PERUSTEISTA

301. a) $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B) = 0,70 \cdot 0,89 = 0,623 \approx 0,62$

Vastaus: 0,62

b) $P(A) = 10 \% = 0,10$ ja $P(B) = 15 \% = 0,15$, joten
 $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B) = 0,10 \cdot 0,15 = 0,015 = 1,5 \%$.

Vastaus: 1,5 %

c) $P(A) = 82,1 \% = 0,821$ ja $P(B) = 0,6 \% = 0,006$, joten
 $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B) = 0,821 \cdot 0,006 = 0,004926 = 0,4926 \% \approx 0,49 \%$.

Vastaus: 0,49 %

302. Lapsi unohtaa sekä avaimen että puhelimen todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} &P(\text{unohtaa avaimen ja puhelimen}) \\ &= P(\text{unohtaa avaimen}) \cdot P(\text{unohtaa puhelimen}) \\ &= 0,2 \cdot 0,1, \end{aligned}$$

joten ilmaisu A ja lauseke II kuuluvat yhteen.

Lapsi muistaa ottaa molemmat mukaan todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} &P(\text{muistaa ottaa molemmat}) \\ &= P(\text{muistaa avaimen}) \cdot P(\text{muistaa puhelimen}) \\ &= [1 - P(\text{unohtaa avaimen})] \cdot [1 - P(\text{unohtaa puhelimen})] \\ &= (1 - 0,2) \cdot (1 - 0,1) \\ &= 0,8 \cdot 0,9, \end{aligned}$$

joten ilmaisu B ja lauseke III kuuluvat yhteen.

Lapsi muistaa avaimen mutta unohtaa puhelimen todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} &P(\text{muistaa avaimen ja unohtaa puhelimen}) \\ &= P(\text{muistaa avaimen}) \cdot P(\text{unohtaa puhelimen}) \\ &= [1 - P(\text{unohtaa avaimen})] \cdot P(\text{unohtaa puhelimen}) \\ &= (1 - 0,2) \cdot 0,1 \\ &= 0,8 \cdot 0,1, \end{aligned}$$

joten ilmaisu C ja lauseke I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: III ja C: I

- 303.** a) Ensimmäisen heiton tulos ei vaikuta toisen heiton tulokseen. Heittojen tulokset ovat toisistaan riippumattomia.

Vastaus: ei mitenkään, ovat

- b) Lasketaan ensin tarvittavat todennäköisyydet yksittäiselle heitolle.

$$P(\text{silmäluku on 1 tai 2}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{silmäluku on 4}) = \frac{1}{6}$$

Todennäköisyys tapahtumalle ” ensimmäisellä heitolla saadaan 1 tai 2 ja toisella 4 ” on

$$\begin{aligned} &P(\text{ensimmäisellä heitolla saadaan 1 tai 2 ja toisella heitolla 4}) \\ &= P(\text{silmäluku on 1 tai 2}) \cdot P(\text{silmäluku on 4}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{18} \\ &= 0,0556... \\ &\approx 0,056. \end{aligned}$$

Todennäköisyys, että silmäluku on ensimmäisellä heitolla 1 tai 2 ja toisella heitolla 4, on $\frac{1}{18} \approx 0,056$.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{18} \approx 0,056$$

- 304. a)** Sinun veriryhmäsi ja vieruskaverisi veriryhmä eivät vaikuta toisiinsa, joten tapahtumat ”Sinun veriryhmäsi on O” ja ”Vieruskaverisi veriryhmä on O” ovat toisistaan riippumattomia.

Vastaus: ovat

- b)** Lotossa arvotaan 7 numeroa 40 numeron joukosta.
Jos kupongin ensimmäinen numero on oikein, niin oikeita numeroita on jäljellä 6 ja kaikkia numeroita 39. Toinen numero on siis oikein todennäköisyydellä $\frac{6}{39}$.
Jos kupongin ensimmäinen numero on väärin, niin oikeita numeroita on jäljellä 7 ja kaikkia numeroita 39, joten toinen numero on oikein todennäköisyydellä $\frac{7}{39}$.
Tapahtumat ”Lottokupongin ensimmäinen numero on oikein” ja ”Lottokupongin toinen numero on oikein” eivät siis ole riippumattomia.

Vastaus: eivät ole

- c)** Ensimmäisen kolikon heiton tulos ei vaikuta toisen kolikon heiton tulokseen, joten tapahtumat ”ensimmäisellä kolikolla saadaan kruuna” ja ”toisella kolikolla saadaan kruuna” ovat riippumattomia.

Vastaus: ovat

- d) Korttipakassa on 52 korttia, joista 13 on herttoja ja 13 patoja. Jos ensimmäinen kortti on pata, niin herttoja on jäljellä 13 ja kaikkia kortteja 51, joten toinen kortti on hertta todennäköisyydellä $\frac{13}{51}$. Jos ensimmäinen kortti ei ole pata, niin se voi olla hertta tai joku muu maa. Herttoja on siis jäljellä 12 tai 13 ja kaikkia kortteja 51, joten toinen kortti on hertta todennäköisyydellä, joka on lukujen $\frac{12}{51}$ ja $\frac{13}{51}$ välissä. Tapahtumat ”ensimmäisenä korttipakasta jaettu kortti on pata” ja ”toisena samasta korttipakasta jaettu kortti on hertta” eivät siis ole riippumattomia.

Vastaus: eivät ole

- e) Tämän vuoden vappuaaton sää ei vaikuta ensi vuoden vappuaaton säähän, joten tapahtumat ”tämän vuoden vappuaattona on aurinkoista” ja ”ensi vuoden vappuaattona on aurinkoista” ovat riippumattomia.

Vastaus: ovat

305. Olkoon A = ”satunnainen suomalainen kuului kirkkoon vuonna 2015”. Tilastollinen todennäköisyys tapahtumalle A on $P(A) = 0,73$.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{kolme satunnaisesti valittua suomalaista kuuluivat ev-lut kirkkoon}) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) = P(A)^3 = 0,73^3 = 0,38901 \dots = 38,901 \% \approx 39 \%$$

Vuonna 2015 kolme satunnaisesti valittua suomalaista kuului evankelis-luterilaiseen kirkkoon 39 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 39 %

- 306.** Sateen todennäköisyys yhtenä päivänä on $P(\text{sataa}) = 0,9$.
Todennäköisyys sille, että ei sada, on $P(\text{ei sada}) = 1 - 0,9 = 0,1$.

- a) Todennäköisyys sille, että seitsemän seuraavaa päivää ovat sade päiviä, on
 $0,9^7 = 0,47829\dots = 47,829\dots \% \approx 48 \%$.

Vastaus: 48 %

- b) Todennäköisyys sille, että seitsemän seuraavaa päivää ovat sateettomia, on
 $0,1^7 = 0,0000001 = 0,00001 \%$

Nolla ei ole merkitsevä numero desimaaliluvun alussa, joten kahden merkitsevän numeron tarkkuudella vastaus on 0,000010 %.

Vastaus: 0,000010 %

- 307.** $P(\text{Sofia voittaa}) = 0,74$
 $P(\text{Alexandra voittaa}) = 1 - 0,74 = 0,26$

- a) $P(\text{Sofia voittaa 3 peräkkäistä peliä})$
 $= 0,74^3$
 $= 0,40522\dots$
 $= 40,522\dots \%$
 $\approx 41 \%$

Todennäköisyys sille, että Sofia voittaa 3 peräkkäistä peliä, on 41 %.

Vastaus: 41 %

- b) $P(\text{Sofia voittaa ensimmäisen pelin ja Alexandra kaksi seuraavaa peliä})$
 $= 0,74 \cdot 0,26^2$
 $= 0,05002\dots$
 $= 5,002\dots \%$
 $\approx 5,0 \%$

Todennäköisyys sille, että Sofia voittaa ensimmäisen pelin ja Alexandra kaksi seuraavaa peliä, on 5,0 %.

Vastaus: 5,0 %

308. Todennäköisyydet valojen väreille:

$$P(\text{ensimmäinen valo on vihreä}) = 0,35$$

$$P(\text{ensimmäinen valo on punainen}) = 1 - 0,35 = 0,65$$

$$P(\text{toinen valo on vihreä}) = 0,75$$

$$P(\text{toinen valo on punainen}) = 1 - 0,75 = 0,25$$

a) $P(\text{ensimmäinen valo on vihreä ja toinen valo on vihreä})$
 $= P(\text{ensimmäinen valo on vihreä}) \cdot P(\text{toinen valo on vihreä})$
 $= 0,35 \cdot 0,75$
 $= 0,2625$
 $= 26,25 \%$
 $\approx 26 \%$

Todennäköisyys sille, että molemmat valot ovat vihreitä, on 26 %.

Vastaus: 26 %

b) $P(\text{ensimmäinen valo on punainen ja toinen valo on punainen})$
 $= P(\text{ensimmäinen valo on punainen}) \cdot P(\text{toinen valo on punainen})$
 $= 0,65 \cdot 0,25$
 $= 0,1625$
 $= 16,25 \%$
 $\approx 16 \%$

Todennäköisyys sille, että molemmat valot ovat punaisia, on 16 %.

Vastaus: 16 %

c) $P(\text{ensimmäinen valo on vihreä ja toinen valo on punainen})$
 $= P(\text{ensimmäinen valo on vihreä}) \cdot P(\text{toinen valo on punainen})$
 $= 0,35 \cdot 0,25$
 $= 0,0875$
 $= 8,75 \%$
 $\approx 8,8 \%$

Todennäköisyys sille, että ensimmäinen valo on vihreä ja toinen valo punainen, on 8,8 %.

Vastaus: 8,8 %

- 309. a)** Jos ensimmäinen kaapista otettu jogurtti on mustikkajogurtti, niin kaapissa on ensimmäisen jogurtin ottamisen jälkeen vielä kolme mansikkajogurtia ja yksi mustikkajogurtti, eli yhteensä neljä jogurttipurkkia. Toinen jogurtti on tällöin mustikkajogurtti todennäköisyydellä $\frac{1}{4} = 0,25$.

Vastaus: $\frac{1}{4} = 0,25$

- b)** Eevi ottaa kaksi mustikkajogurtia todennäköisyydellä $P(\text{ensimmäinen on mustikkajogurtti}) \cdot P(\text{toinen on mustikkajogurtti})$
 $= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 0,05$.

Eeva ottaa kaksi mustikkajogurtia todennäköisyydellä 0,1.

Vastaus: $\frac{1}{10} = 0,1$

- 310.** a) Jos pakasta on nostettu yksi ässä eikä ässää ole palautettu pakkaan, pakassa on jäljellä $52 - 1 = 51$ korttia ja $4 - 1 = 3$ ässää.

Vastaus: 51 korttia, 3 ässää

- b) Jos ensimmäinen kortti on ässä eikä sitä palauteta pakkaan, niin toinen kortti on ässä todennäköisyydellä $\frac{3}{51} = \frac{1}{17} = 0,0588... \approx 0,059$.

Vastaus: $\frac{1}{17} \approx 0,059$

- c) Jos pakasta nostettu kortti palautetaan pakkaan, pakassa on 52 korttia ja 4 ässää. Toinen kortti on ässä todennäköisyydellä

$$\frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 0,0769... \approx 0,077.$$

Vastaus: $\frac{1}{13} \approx 0,077$

- d) Jos nostettua korttia ei palauteta pakkaan, niin ensimmäisen nostettavan kortin arvo vaikuttaa todennäköisyyteen, jolla toinen kortti on ässä. Tällöin tapahtumat ”ensimmäinen kortti on ässä” ja ”toinen kortti on ässä” eivät ole riippumattomia.

Jos nostettu kortti palautetaan pakkaan, ei ensimmäisen nostettavan kortin arvo vaikuta toisen nostettavan kortin arvoon. Tällöin tapahtumat ”ensimmäinen kortti on ässä” ja ”toinen kortti on ässä” ovat riippumattomia.

Vastaus: b-kohdan tilanteessa eivät ole, c-kohdan tilanteessa ovat

VAHVISTA OSAAMISTA

- 311.** Jos silmäluku 6 esiintyy neljän heiton sarjassa ainakin kerran, se voi tulla ensimmäisellä, toisella, kolmannella tai neljännellä heitolla tai useaan kertaan. Tapahtuman A = ”silmäluku 6 esiintyy ainakin kerran” vastatapahtuma on B = ”silmäluku 6 ei esiinny yhtään kertaa”. Lasketaan tapahtuman B todennäköisyys.

$$\begin{aligned}P(B) &= P(\text{joka heitolla muu silmäluku kuin 6}) \\&= P(1. \text{heitolla muu kuin 6}) \cdot P(2. \text{heitolla muu kuin 6}) \\&\quad \cdot P(3. \text{heitolla muu kuin 6}) \cdot P(4. \text{heitolla muu kuin 6}) \\&= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \\&= \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\&= 0,482\end{aligned}$$

Tapahtuman A todennäköisyys on

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0,482\dots = 0,517\dots$$

eli suurempi kuin tapahtuman B , joten kannattaa lyödä vetoa tapahtuman A puolesta.

Vastaus: tapahtuman A

- 312. a)** Puhelinmyyjä saa myytyä kolme lehtitilausta todennäköisyydellä $P(\text{myy tilauksen kaikilla kolmella puhelulla})$
 $= P(\text{myy tilauksen 1. puhelulla}) \cdot P(\text{myy tilauksen 2. puhelulla})$
 $\cdot P(\text{myy tilauksen 3. puhelulla})$
 $= 0,15 \cdot 0,15 \cdot 0,15$
 $= 0,15^3$
 $= 0,003375$
 $= 0,3375 \%$
 $\approx 0,34 \%$.

Puhelinmyyjä saa myytyä kolme lehtitilausta $0,34 \%$:n todennäköisyydellä.

Vastaus: $0,34 \%$

- b) Kun puhelinmyyjä soittaa yhden puhelun, todennäköisyys sille, että hän ei saa myytyä lehtitilausta on
- $$P(\text{ei myy tilausta}) = 1 - P(\text{myy tilauksen}) = 1 - 0,15 = 0,85.$$

Lasketaan todennäköisyys sille, että puhelinmyyjä ei saa kolmella puhelulla myytyä yhtään tilausta.

$$\begin{aligned} P(\text{ei myy kolmella puhelulla yhtään tilausta}) \\ &= [P(\text{ei myy tilausta})]^3 \\ &= 0,85^3 \\ &= 0,61412... \\ &= 61,412 \% \\ &\approx 61 \% \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, ettei puhelinmyyjä saa myytyä yhtään lehtitilausta, on 61 %.

Vastaus: 61 %

- c) Puhelinmyyjä saa myytyä ainakin yhden lehtitilauksen, jos hän saa myytyä 1, 2 tai 3 tilausta. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned} P(\text{myy ainakin yhden tilauksen}) \\ &= 1 - P(\text{ei myy yhtään tilausta}) \\ &= 1 - 0,61412... \\ &= 0,38587... \\ &= 38,587... \% \\ &\approx 39 \% \end{aligned}$$

Puhelinmyyjä saa myytyä ainakin yhden lehtitilauksen todennäköisyydellä 39 %.

Vastaus: 39 %

- 313. a)** Ensimmäisen paprikan jälkeen korissa on jäljellä 6 paprikaa, joista 3 on vihreitä. Toisella nostolla todennäköisyys saada vihreä paprika on $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, $\frac{1}{2}$

- b)** Kolmannella nostolla korissa on jäljellä 5 paprikaa, joista punaisia on 3. Kolmannella nostolla todennäköisyys saada punainen paprika on $\frac{3}{5}$, joten väite on tosi.

Vastaus: tosi

- c)** Ensimmäinen paprika on punainen todennäköisyydellä $\frac{4}{7}$.

Jos ensimmäinen paprika on punainen, niin toinen paprika on punainen todennäköisyydellä $\frac{3}{6}$.

Jos kaksi ensimmäistä paprikaa ovat punaisia, niin kolmas paprika on punainen todennäköisyydellä $\frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} &P(1., 2. \text{ ja } 3. \text{ paprika ovat punaisia}) \\ &= P(\text{ensimmäinen on punainen}) \cdot P(\text{toinen on punainen}) \\ &\cdot P(\text{kolmas on punainen}) \\ &= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{4}{35}. \end{aligned}$$

Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, $\frac{4}{35}$

314. Riippumattomille tapahtumille A ja B on voimassa yhtälö

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Sijoitetaan yhtälöön tiedot $P(B) = 0,50$ ja $P(A \text{ ja } B) = 0,15$, ja ratkaistaan yhtälöstä $P(A)$.

$$0,15 = P(A) \cdot 0,50 \quad || : 0,50$$

$$P(A) = \frac{0,15}{0,50}$$

$$P(A) = 0,30$$

Vastaus: 0,30

315. Opettaja ei tunnista kummankaan viestin lähettäjää, kun hän ei tunnista ensimmäisen ja ei tunnista toisen viestin lähettäjää.

Lasketaan tarvittavat todennäköisyydet.

$$P(\text{opettaja tunnistaa ensimmäisen lähettäjän}) = \frac{27}{35}$$

$$P(\text{opettaja ei tunnista ensimmäistä lähettäjää}) = 1 - \frac{27}{35} = \frac{8}{35}$$

Toinen lähettäjä on joku lopuista 34 opiskelijasta, eikä opettaja tunnistanut ensimmäistä lähettäjää.

$$P(\text{opettaja tunnistaa toisen lähettäjän}) = \frac{27}{34}$$

$$P(\text{opettaja ei tunnista toista lähettäjää}) = 1 - \frac{27}{34} = \frac{7}{34}$$

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{opettaja ei tunnista ensimmäistä eikä toista lähettäjää})$$

$$= P(\text{ei tunnista ensimmäistä}) \cdot P(\text{ei tunnista toista})$$

$$= \frac{8}{35} \cdot \frac{7}{34}$$

$$= 0,0470\dots$$

$$\approx 0,047.$$

Todennäköisyys sille, ettei opettaja tunnista kummankaan viestin lähettäjää nimen perusteella, on 0,047.

Vastaus: 0,047

- 316. a)** Kysytty todennäköisyys on
 $P(\text{ei saa yhtään voittoa})$
 $= P(1. \text{ arpa ei voita}) \cdot P(2. \text{ arpa ei voita, kun } 1. \text{ arpa ei voittanut})$
 $\cdot P(3. \text{ arpa ei voita, kun } 1. \text{ ja } 2. \text{ arpa eivät voittaneet})$
 $\cdot P(4. \text{ arpa ei voita, kun } 1., 2. \text{ ja } 3. \text{ arpa eivät voittaneet}).$

Jos voittoarpoja on 50, niin arpoja, jotka eivät voita, on
 $300 - 50 = 250$.

Lisäksi aina arvan oston jälkeen arpojen kokonaismäärä vähenee yhdellä, joten

$$P(1. \text{ ei voita}) = \frac{250}{300}$$

$$P(2. \text{ ei voita, kun } 1. \text{ ei voittanut}) = \frac{249}{299}$$

$$P(3. \text{ ei voita, kun } 1. \text{ ja } 2. \text{ eivät voittaneet}) = \frac{248}{298}$$

$$P(4. \text{ ei voita, kun } 1., 2. \text{ ja } 3. \text{ eivät voittaneet}) = \frac{247}{297}$$

Siis

$$\begin{aligned} &P(\text{ei saa yhtään voittoa}) \\ &= \frac{250}{300} \cdot \frac{249}{299} \cdot \frac{248}{298} \cdot \frac{247}{297} \\ &= 0,480... \\ &\approx 0,48. \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, ettei Perttu saa yhtään voittoa, on 0,48.

Vastaus: 0,48

- b)** Ainakin 1 arvoista voittaa, jos 1, 2, 3 tai 4 arpaa voittaa. Tapahtuman ”ainakin 1 arvoista voittaa” vastatapahtuma on ”yksikään arpa ei voita”. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$\begin{aligned} &P(\text{saa ainakin yhden voiton}) \\ &= 1 - P(\text{yksikään arpa ei voita}) \\ &= 1 - 0,480... \\ &= 0,519... \\ &\approx 0,52. \end{aligned}$$

Perttu saa ainakin yhden voiton todennäköisyydellä 0,52.

Vastaus: 0,52

- 317. a)** Ensimmäisellä heitolla arpakuution silmäluku voi tulla mikä tahansa kuudesta silmäluvusta. Toisella heitolla voi tulla mikä tahansa muu kuin ensimmäisen heiton silmäluku, joten suotuisia silmälukuja on viisi.

Kolmannella heitolla voi tulla mikä tahansa jäljellä olevista neljästä silmäluvusta.

$P(\text{kolmella heitolla tulee kaikilla eri silmäluku})$

$$= \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9} = 0,555... \approx 0,56.$$

Jokaisella kolmella heitolla tulee eri silmäluku todennäköisyydellä 0,56.

Vastaus: 0,56

- b)** Jatketaan a-kohdan tavalla kuudenteen heittoon asti.

$P(\text{kuudella heitolla tulee kaikilla eri silmäluku})$

$$= \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0,0154... \approx 0,015.$$

Jokaisella kolmella heitolla tulee eri silmäluku todennäköisyydellä 0,015.

Vastaus: 0,015

- c)** Tapahtuma ”seitsemällä heitolla tulee jokaisella eri silmäluku” on mahdoton, koska arpakuutiossa on vain kuusi eri silmälukua. Kysytty todennäköisyys on siis 0.

Vastaus: 0

- 318. a)** Tapahtuma ”5 korttia on herttoja” tapahtuu, jos 1. kortti on hertta, 2. kortti on hertta, 3. kortti on hertta, 4. kortti on hertta ja 5. kortti on hertta.

Pakassa on 52 korttia, joista 13 on herttoja. Jos ensimmäinen kortti on hertta, on pakassa sen nostamisen jälkeen yksi kortti ja yksi hertta vähemmän, eli 51 korttia, joista 12 on herttoja. Jatketaan vastaavalla tavalla.

$$\begin{aligned} P(5 \text{ korttia on herttoja}) &= P(1. \text{ on hertta}) \cdot P(2. \text{ on hertta}) \cdot \dots \cdot P(5. \text{ on hertta}) \\ &= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} \\ &= 0,000495\dots \\ &\approx 0,00050 \end{aligned}$$

Kaikki nostetut kortit ovat herttoja todennäköisyydellä 0,00050.

Vastaus: 0,00050

- b)** Pakassa on 52 korttia, joista 26 on mustia. Lasketaan kuten a-kohdassa.

$$\begin{aligned} P(5 \text{ korttia on mustia}) &= P(1. \text{ on musta}) \cdot P(2. \text{ on musta}) \cdot \dots \cdot P(5. \text{ on musta}) \\ &= \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49} \cdot \frac{22}{48} \\ &= 0,0253\dots \\ &\approx 0,025 \end{aligned}$$

Kaikki nostetut kortit ovat mustia todennäköisyydellä 0,025.

Vastaus: 0,025

- c)** Pakassa on vain neljä kakkosta, joten tapahtuma ”5 korttia ovat kakkosia” on mahdoton. Kysytty todennäköisyys on siis 0.

Vastaus: 0

319. Jokaisessa kysymyksessä on 5 vaihtoehtoa, joista 1 on oikein.

$$P(\text{vastaus on oikein}) = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$P(\text{vastaus on väärin}) = \frac{4}{5} = 0,8$$

- a)** Kilpailija vastaa 30 kysymykseen arvaamalla. Kaikki vastaukset menevät oikein vain silloin, jos tapahtuma ”vastaus on oikein” toistuu 30 kertaa.

$$\begin{aligned} P(\text{kilpailija vastaa kaikkiin oikein}) &= [P(\text{vastaus on oikein})]^{30} \\ &= 0,2^{30} \\ &= 1,073 \dots \cdot 10^{-21} \\ &\approx 1,07 \cdot 10^{-21} \end{aligned}$$

Kilpailija saa kaikki vastaukset oikein todennäköisyydellä $1,07 \cdot 10^{-21}$.

Vastaus: $1,07 \cdot 10^{-21}$

- b)** Kilpailija vastaa 30 kysymykseen arvaamalla. Kaikki vastaukset menevät väärin vain silloin, jos tapahtuma ”vastaus on väärin” toistuu 30 kertaa.

$$\begin{aligned} P(\text{kilpailija vastaa kaikkiin väärin}) &= [P(\text{vastaus on väärin})]^{30} \\ &= 0,8^{30} \\ &= 0,001237 \dots \\ &\approx 0,00124 \end{aligned}$$

Kilpailija saa kaikki vastaukset väärin todennäköisyydellä 0,00124.

Vastaus: 0,00124

- c) Kilpailija vastaa kolmeen kysymykseen arvaamalla. Kaikki vastaukset menevät oikein vain silloin, jos tapahtuma ”vastaus on oikein” toistuu 3 kertaa.

$$\begin{aligned} P(\text{kilpailija vastaa kaikkiin oikein}) \\ &= [P(\text{vastaus on oikein})]^3 \\ &= 0,2^3 \\ &= 0,008 \end{aligned}$$

Nolla ei ole desimaaliluvun alussa merkitsevä numero, mutta se on merkitsevä numero desimaaliluvun lopussa. Kilpailija saa kaikki vastaukset oikein todennäköisyydellä 0,00800.

Vastaus: 0,00800

320. Ainakin yhdellä matkustajalla on syntymäpäivä, jos yhdellä, kahdella, kolmella, ... tai kuudellatoista matkustajalla on syntymäpäivä. Tapahtuman ”ainakin yhdellä matkustajalla on syntymäpäivä” vastatapahtuma on ”kellään matkustajista ei ole syntymäpäivää matkustuspäivänä”. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

Bussimatka tapahtuu yhtenä päivänä vuodessa, joten kaikilla matkustajilla tulee olla syntymäpäivä jonain muuna vuoden 364 päivästä.

$$\begin{aligned} P(\text{matkustajalla ei ole syntymäpäivää}) &= \frac{364}{365} \\ P(\text{kellään kuudestatoista matkustajasta ei ole syntymäpäivää nyt}) \\ &= [P(\text{matkustajalla ei ole syntymäpäivää nyt})]^{16} = \left(\frac{364}{365}\right)^{16} \end{aligned}$$

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin yhdellä matkustajalla on syntymäpäivä sinä päivänä}) \\ &= 1 - P(\text{kellään 16 matkustajasta ei ole syntymäpäivä sinä päivänä}) \\ &= 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{16} \\ &= 0,0429... \\ &\approx 0,043. \end{aligned}$$

Ainakin yhdellä matkustajalla on syntymäpäivä todennäköisyydellä 0,043.

Vastaus: 0,043

- 321.** Tapahtuma koostuu kahdesta nostosta, joista joko ensimmäisellä, toisella tai molemmilla voi tulla pari.

Nostetuista kahdesta kortista ensimmäinen kortti voi olla mikä tahansa 52 kortista, jolloin toisen on oltava mikä tahansa 48 eriarvoisesta kortista, jotta ei muodostuisi paria. Saman täytyy vielä tapahtua uudestaan toisella nostolla.

$$\begin{aligned} &P(\text{ensimmäisellä nostolla ei tule paria ja toisella nostolla ei tule paria}) \\ &= P(\text{ensimmäisellä nostolla ei tule paria}) \cdot P(\text{toisella nostolla ei tule paria}) \\ &= [P(\text{nostolla ei tule paria})]^2 \\ &= \left(\frac{52}{52} \cdot \frac{48}{51}\right)^2 \\ &= 0,885... \\ &\approx 0,89 \end{aligned}$$

Nostettaessa kaksi kertaa kaksi korttia korttipakasta todennäköisyys sille, ettei saada paria, on 0,89.

Vastaus: 0,89

- 322. a)** Satunnaisessa tolpassa on kamera 16 % todennäköisyydellä. Kamera kuvaa jokaisen, joka ajaa ylinopeutta yli 7 km/h. Ylinopeutta ajavia autoilijoita on 4 %, joten

$$\begin{aligned} &P(\text{tolpassa on kamera ja kamera ottaa kuvan ohiajavasta autosta}) = 0,16 \cdot 0,04 \\ &= 0,0064 \\ &= 0,64 \% \end{aligned}$$

Kamera ottaa autosta kuvan todennäköisyydellä 0,064 %.

Vastaus: 0,64 %

b) Koska kamera ottaa kuvan todennäköisyydellä 0,04, niin

$$P(\text{kamera ei ota kuvaa ohiajavasta autosta}) = 1 - 0,04 = 0,96.$$

Sama tapahtuma toistuu 10 kertaa.

$P(\text{kamera ei ota kuvaa yhdestäkään ohiajavasta kymmenestä autoilijasta})$

$$= [P(\text{kamera ei ota kuvaa ohiajavasta autosta})]^{10}$$

$$= 0,96^{10}$$

$$= 0,66483\dots$$

$$= 66,483\dots \%$$

$$\approx 66 \%$$

Todennäköisyys sille, että kamera ei ota kuvaa yhdestäkään autosta, on 66 %.

Vastaus: 66 %

323. Appletista nähdään, kuinka monta vaihtoehtoa kullekin numerolle on.

1. nro	1				
2. nro	0	2	4	6	8
3. nro	5	6			
4. nro	5/6				

- ☒ Ensimmäinen numero on 1.
- ☒ Toinen numero on parillinen.
- ☒ Kolmas ja neljäs numero ovat 5 ja 6 jommassakummassa järjestyksessä.

Ensimmäinen numero voi olla vain 1, toiselle on mahdollisia numeroita 5 ja viimeiset kaksi numeroa tuottavat 2 mahdollista paria. Vaihtoehtoja PIN-koodille on siis $1 \cdot 5 \cdot 2 = 10$.

Koodeista vain 1 on oikea, joten väärää on 9 ja jokaisella uudella yrityksellä kokeillaan koodia, jota ei ole vielä yritetty.

$$\begin{aligned} P(\text{arvaa koodin oikein korkeintaan kolmella yrityksellä}) \\ &= 1 - P(\text{arvaa väärin jokaisella kolmesta yrityksestä}) \\ &= 1 - P(\text{arvaa väärin ensimmäisellä yrityksellä}) \cdot P(\text{arvaa väärin toisella yrityksellä}) \cdot P(\text{arvaa väärin kolmannella yrityksellä}) \\ &= 1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

Kristian saa koodin oikein korkeintaan kolmella yrityksellä todennäköisyydellä 0,3.

Vastaus: 0,3

324. Satunnaisesti valittu suomalainen on lääkäri todennäköisyydellä

$$\frac{28\,500}{5\,500\,000} = 0,00518..., \quad \text{joten hän on joku muu kuin lääkäri}$$

todennäköisyydellä $1 - 0,00518... = 0,994...$

- a)** Jotta kymmenestä satunnaisesti valitusta suomalaisesta kaikki olisivat lääkäreitä, tulee tapahtuman ”satunnaisesti valittu suomalainen on lääkäri” toistua 10 kertaa. Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{kymmenestä suomalaisesta kaikki ovat lääkäreitä}) \\ &= [P(\text{suomalainen on lääkäri})]^{10} \\ &= 0,00518...^{10} \\ &= 1,395... \cdot 10^{-23} \\ &\approx 1,4 \cdot 10^{-23}. \end{aligned}$$

Kaikki kymmenen suomalaista ovat lääkäreitä todennäköisyydellä $1,4 \cdot 10^{-23}$.

Vastaus: $1,4 \cdot 10^{-23}$

- b)** Jotta kymmenestä satunnaisesti valitusta suomalaisesta kukaan ei olisi lääkäri, tulee tapahtuman ”satunnaisesti valittu suomalainen ei ole lääkäri” toistua 10 kertaa. Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{kymmenestä suomalaisesta kukaan ei ole lääkäri}) \\ &= [P(\text{suomalainen ei ole lääkäri})]^{10} \\ &= 0,994^{10} \\ &= 0,949... \\ &\approx 0,95. \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, ettei kukaan kymmenestä suomalaisesta ole lääkäri, on 0,95.

Vastaus: 0,95

- c) Tapahtuma ”ainakin yksi satunnaisesti valitusta kymmenestä suomalaisesta on lääkäri” on vastatapahtuma tapahtumalle ”kukaan kymmenestä satunnaisesti valitusta suomalaisesta ei ole lääkäri”, joten b-kohdan perusteella

$$\begin{aligned} P(\text{kymmenestä suomalaisesta ainakin yksi on lääkäri}) \\ &= 1 - P(\text{kymmenestä suomalaisesta kukaan ei ole lääkäri}) \\ &= 1 - 0,949\dots = 0,0506\dots \approx 0,051. \end{aligned}$$

Kymmenestä suomalaisesta ainakin yksi on lääkäri todennäköisyydellä 0,051.

Vastaus: 0,051

325. a) Ensimmäinen mitali menee oikealle kilpailijalle todennäköisyydellä $\frac{1}{5}$. Jos ensimmäinen mitali menee oikealle kilpailijalle, niin toinen mitali menee oikealle kilpailijalle todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$ ja kolmas mitali vastaavasti todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$.
Kaikki kolme mitalia menevät oikeille kilpailijoille todennäköisyydellä

$$\begin{aligned} P(\text{kaikki 3 mitalia oikeille kilpailijoille}) \\ &= P(1. mitali oikealle kilpailijalle) \cdot P(2. mitali oikealle kilpailijalle) \\ &\quad \cdot P(3. mitali oikealle kilpailijalle) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{60} \\ &= 0,0166\dots \\ &\approx 0,017. \end{aligned}$$

Kaikki kolme mitalia menevät juuri oikeille kilpailijoille todennäköisyydellä 0,017.

Vastaus: 0,017

- b) Viidestä henkilöstä voidaan muodostaa kolmen henkilön joukko $\binom{5}{3} = 10$ tavalla. Vain yksi niistä on oikea mitalikolmikko, joten

kysytty todennäköisyys on $\frac{1}{10} = 0,1$.

Mitalikolmikko on oikea todennäköisyydellä 0,1.

Vastaus: 0,1

326. Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} &P(\text{Leena ei opeta Tenhoa yhdelläkään 9:stä kurssista}) \\ &= [P(\text{Leena ei opeta Tenhoa yksittäisellä kurssilla})]^9 \\ &= [P(\text{Tenholla on kurssilla joku muu opettaja kuin Leena})]^9 \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^9 \\ &= 0,134... \\ &\approx 0,13. \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, ettei Leena opeta Tenhoa kertaakaan, on 0,13.

Vastaus: 0,13

- 327.** Presidentti saa sairauden yhdellä kättelyllä, jos kättelevällä henkilöllä on sairaus ja sairaus tarttuu kättelyssä.

$$P(\text{presidentti saa sairauden yhdellä kättelyllä}) = 0,03 \cdot 0,05 = 0,0015$$

$$P(\text{Presidentti ei saa sairautta yhdellä kättelyllä}) = 1 - 0,0015 = 0,9985$$

- a) $P(\text{presidentti saa sairauden 12 kättelyllä})$
 $= 1 - P(\text{presidentti ei saa sairautta 12 kättelyllä})$
 $= 1 - P(\text{presidentti ei saa sairautta ensimmäisellä kättelyllä}) \cdot P(\text{ei toisella}) \cdot \dots \cdot P(\text{ei kahdennellatoista})$
 $= 1 - 0,9985^{12}$
 $= 0,01785\dots$
 $= 1,785\dots \%$
 $\approx 1,8 \%$

Kun presidentti kättelee 12 henkilöä, hän saa sairauden 1,8 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 1,8 %

- b) Tapahtuma ”sairaus tarttuu ainakin kerran” on tapahtuman ”sairaus ei tartu kertaakaan” vastatapahtuma. Kun presidentti kättelee n kertaa, niin

$$P(\text{sairaus tarttuu ainakin kerran}) = 1 - 0,9985^n.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä kysytty kättelyjen määrä.

$$\begin{aligned} 1 - 0,9985^n &= 0,5 \\ -0,9985^n &= -0,5 & \| \cdot (-1) \\ 0,9985^n &= 0,5 \\ n &= \log_{0,9985} 0,5 \\ n &= 461,751\dots \end{aligned}$$

Presidentti voi kätellä korkeintaan 461 kertaa, jotta todennäköisyys saada sairaus pysyisi alle 50 prosentissa.

Vastaus: 461 kertaa

328. Merkitään A = ”henkilö on vasenkätinen”, jolloin $\bar{A}$ = ”henkilö ei ole vasenkätinen”.

$$P(A) = 0,1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,1 = 0,9$$

Tapahtuma ” n -jäsenisessä ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen” sisältää tilanteet ”tasan 1 vasenkätinen”, ”tasan 2 vasenkätistä”, ... tai ”tasan n vasenkätistä”. Vastatapahtuma on ”ei yhtään vasenkätistä”.

Muodostetaan lauseke tapahtuman ” n -jäsenisessä ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen” todennäköisyydelle.

$$\begin{aligned} &P(n\text{-jäsenisessä ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen}) \\ &= 1 - P(n\text{-jäsenisessä ryhmässä ei ole yhtään vasenkätistä}) \\ &= 1 - P(1.\text{ jäsen ei ole vasenkätinen ja } 2.\text{ jäsen ei ole vasenkätinen ja } \dots \text{ ja } n.\text{ jäsen ei ole vasenkätinen}) \\ &= 1 - P(1.\text{ jäsen ei ole vasenkätinen}) \cdot P(2.\text{ jäsen ei ole vasenkätinen}) \cdot \dots \cdot P(n.\text{ jäsen ei ole vasenkätinen}) \\ &= 1 - \underbrace{0,9 \cdot 0,9 \cdot \dots \cdot 0,9}_{n \text{ kpl}} \\ &= 1 - 0,9^n \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö, kun todennäköisyys tapahtumalle ” n -jäsenisessä ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen” on 0,8. Ratkaistaan yhtälöstä kysytty ryhmäkoko n .

$$\begin{aligned} 1 - 0,9^n &= 0,8 \\ -0,9^n &= -0,2 && \| \cdot (-1) \\ 0,9^n &= 0,2 \\ n &= \log_{0,9} 0,2 \\ n &= 15,275\dots \end{aligned}$$

Ryhmässä tulee olla 16 henkilöä, jotta siinä olisi ainakin yksi vasenkätinen todennäköisyydellä 0,8.

Vastaus: 16 henkilöä

329. Merkitään kahden euron kolikoiden määrää kirjaimella n .
Todennäköisyys sille, että ensimmäinen otettu kolikko on kahden euron kolikko, on $\frac{n}{12}$.

Jos ensimmäinen kolikko oli kahden euron kolikko, niin kahden euron kolikoita on taskussa jäljellä $n - 1$ kappaletta, ja kolikoita on yhteensä jäljellä 11. Todennäköisyys sille, että toinen otettu kolikko on kahden euron kolikko, on siis $\frac{n-1}{11}$.

Muodostetaan lauseke sen todennäköisyydelle, että saadaan kaksi kahden euron kolikkoa.

$$P(\text{saadaan 2 kahden euron kolikkoa}) = \frac{n}{12} \cdot \frac{n-1}{11}$$

Ratkaistaan kahden euron kolikoiden lukumäärä n yhtälön avulla.

$$\begin{aligned}\frac{n}{12} \cdot \frac{n-1}{11} &= \frac{1}{11} & \parallel \cdot 11 \\ \frac{n}{12} \cdot (n-1) &= 1 & \parallel \cdot 12 \\ n(n-1) &= 12 \\ n^2 - n - 12 &= 0 \\ n &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} \\ n &= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \\ n &= \frac{1 \pm 7}{2} \\ n &= \frac{1+7}{2} \text{ tai } n = \frac{1-7}{2} \\ n &= 4 \quad \text{tai } n = -3\end{aligned}$$

Kolikoiden määrä ei voi olla negatiivinen, joten hylätään ratkaisu $n = -3$.
Kahden euron kolikoita on siis 4 kappaletta.

Vastaus: 4 kolikkoa

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 330. a)** Williamilla on Facebook-kavereita enemmän kuin eri syntymäpäiviä on olemassa, joten kaikilla heistä ei voi olla eri syntymäpäivä. Kysytty todennäköisyys on siis 0.

Vastaus: 0

- b)** Williamilla on syntymäpäivä jonain vuoden 365 päivästä. Kaikilla hänen Facebook-kavereillaan tulee olla syntymäpäivä jonakin vuoden muista 364 päivästä.

Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{kellään Williamin 1470 Facebook-kaverista ei ole samaa syntymäpäivää kuin Williamilla})$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{364}{365} \right)^{1470} \\ &= 0,0177... \\ &\approx 0,018 \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, ettei kellään Williamin 1470 Facebook-kaverilla ei ole samaa syntymäpäivää kuin Williamilla, on 0,018.

Vastaus: 0,018

- 331.** Tapahtuma ”yksikään 12 heitosta ei ole kuutonen” tapahtuma voidaan kirjoittaa ”ensimmäinen heitto ei ole kuutonen ja toinen heitto ei ole kuutonen ja ... ja 12. heitto ei ole kuutonen”. Kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} &P(\text{yksikään 12 heitosta ei ole kuutonen}) \\ &= P(\text{ensimmäinen heitto ei ole kuutonen ja toinen heitto ei ole kuutonen ja} \\ &\quad \dots \text{ ja 12. heitto ei ole kuutonen}) \\ &= P(\text{ensimmäinen heitto ei ole kuutonen}) \cdot P(\text{toinen ei ole kuutonen}) \cdot \dots \\ &\quad \cdot P(12. \text{ heitto ei ole kuutonen}) \\ &= [P(\text{heitto ei ole kuutonen})]^{12}. \end{aligned}$$

Merkitään todennäköisyyttä $P(\text{heitto ei ole kuutonen})$ kirjaimella x ja muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} x^{12} &= 0,014 \\ x &= \sqrt[12]{0,014} \\ x &= (\pm)0,700\dots \end{aligned}$$

Koska silmäluku on joku muu kuin kuutonen todennäköisyydellä 0,700... niin silmäluku on kuutonen todennäköisyydellä $1 - 0,700\dots = 0,299\dots \approx 0,30$.

Viallisessa arpakuutiossa saadaan yhdellä heitolla kuutonen todennäköisyydellä 0,30.

Vastaus: 0,30

332. Jokaisella nostolla jommankumman värin määrä kasvaa.

a) Ensimmäisellä nostolla laatikossa on 1 valkoinen ja 1 musta pallo,

$$\text{joten } P(1. \text{ nostolla tulee valkoinen}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Suotuisassa tapauksessa ensimmäisellä nostolla laatikosta nousi valkoinen pallo, joten nyt laatikossa on 1 musta ja 2 valkoista palloa.

$$P(2. \text{ nostolla tulee valkoinen}) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

Suotuisassa tapauksessa ensimmäisellä ja toisella nostolla laatikosta nousi valkoinen pallo, joten nyt laatikossa on 1 musta ja 3 valkoista palloa.

$$P(3. \text{ nostolla tulee valkoinen}) = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}.$$

$P(\text{kolmella ensimmäisellä nostolla tulee valkoinen pallo})$

$= P(\text{ensimmäisellä ja toisella ja kolmannella nostolla tulee valkoinen pallo})$

$= P(1. \text{ nostolla tulee valkoinen}) \cdot P(2. \text{ nostolla tulee valkoinen})$

$\cdot P(3. \text{ nostolla tulee valkoinen})$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$= 0,25.$$

Todennäköisyys sille, että kaikki kolme palloa ovat valkoisia, on 0,25.

Vastaus: 0,25

b) Listataan pallojen määrät jokaisen noston kohdalla.

Noston järjestysluku	Palloja ennen nostoa	Haluttu pallon väri	Todennäköisyys sille, että saadaan haluttu väri
1	1 musta ja 1 valkoinen	musta	$\frac{1}{2}$
2	2 mustaa ja 1 valkoinen	musta	$\frac{2}{3}$
3	3 mustaa ja 1 valkoinen	valkoinen	$\frac{1}{4}$
4	3 mustaa ja 2 valkoista	valkoinen	$\frac{2}{5}$
5	3 mustaa	valkoinen	$\frac{3}{6}$

Kertolaskusäännön mukaan

$P(1. \text{ musta ja } 2. \text{ musta ja } 3. \text{ valkoinen ja } 4. \text{ valkoinen ja } 5. \text{ valkoinen})$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\cancel{1}2} \cdot \frac{\cancel{1}2}{\cancel{1}3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}4} \cdot \frac{\cancel{1}2}{5} \cdot \frac{\cancel{1}3}{6} \\
 &= \frac{1}{60} \\
 &= 0,01666... \\
 &\approx 0,017.
 \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että kaksi ensimmäistä palloa ovat mustia ja kolme seuraavaa valkoisia, on 0,017.

Vastaus: 0,017

c) Kun mustia palloja on nostettu n kpl, niin laatikossa on yksi valkoinen ja $n + 1$ mustaa palloa. Todennäköisyys saada valkoinen pallo on

$$\frac{1}{1+n}.$$

Vastaus: $\frac{1}{1+n}$

333. Kun kortti nostetaan n kertaa, niin
 $P(n)$:llä nostolla tulee ainakin yksi pata)
 $= 1 - P(n)$:llä nostolla ei tule yhtään pataa)
 $= 1 - P(1. \text{ nostolla ei tule pataa}) \cdot P(2. \text{ nostolla ei tule pataa}) \cdot \dots$
 $\cdot P(n. \text{ nostolla ei tule pataa})$.

- a)** Nostot ovat riippumattomia, sillä nostettu kortti palautetaan pakkaan.
 $P(1. \text{ nostolla ei tule pataa}) = P(2. \text{ nostolla ei tule pataa}) = \dots$
 $= P(n. \text{ nostolla ei tule pataa})$
Siis
 $P(n)$:llä nostolla tulee ainakin yksi pata)
 $= 1 - [P(\text{nostolla ei tule pataa})]^n$.

Etsitään muuttujan n arvo, jolla todennäköisyys saada n :llä nostolla ainakin 1 pata on 0,99, kun yksittäisellä nostolla tulee muu kortti kuin pata todennäköisyydellä $\frac{39}{52} = \frac{3}{4} = 0,75$.

$$\begin{aligned}1 - 0,75^n &= 0,99 \\-0,75^n &= -0,01 \quad ||: (-1) \\0,75^n &= 0,01 \\n &= \log_{0,75} 0,01 \\n &= 16,007\dots\end{aligned}$$

Pakasta on nostettava 16,007... korttia, joten 16 korttia ei riitä. Pakasta on nostettava 17 korttia.

Vastaus: 17 korttia

- b) Nostot eivät ole riippumattomia, sillä jokaisella nostolla pakan koko pienenee. Määritetään kyseinen todennäköisyys vastatapahtuman ”yksikään nostettu kortti ei ole pata” avulla.

Todennäköisyys saada muu kortti kuin pata on ensimmäisellä nostolla $\frac{39}{52}$.

Jos ensimmäisellä nostolla ei tule pataa, pakassa on yksi kortti vähemmän ja yksi muu kuin patakortti vähemmän. Tällöin

todennäköisyys saada muu kortti kuin pata on $\frac{38}{51}$.

Kun jatketaan samalla tavalla, ovat todennäköisyydet saada seuraavilla korteilla muu kuin pata $\frac{37}{50}, \frac{36}{49}, \frac{35}{48}, \dots$

Videossa <https://vimeo.com/228964747/ff68e6a2ad> näytetään, miten tehtävä ratkaistaan loppuun taulukkolaskentaohjelmalla.

Vastatapahtuman ”ei yhtään pataa” todennäköisyys alittaa 1 % neljännellätoista nostolla. Tarvitaan 14 nostoa, jotta todennäköisyys saada ainakin yksi pata on yli 99 %.

Vastaus: 14 korttia

- 334.** Todennäköisyys sille, että puttaus onnistuu, kun pallon etäisyys reiästä on r metriä, on kääntäen verrannollinen pallon ja reiän välisen etäisyyden neliöön, joten se on muotoa $P(r) = \frac{a}{r^2}$, jossa $r \geq 0,8$.

Koska puttaus onnistuu varmasti 0,8 metrin etäisyydeltä, niin $P(0,8) = 1$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä kerroin a .

$$\begin{aligned}\frac{a}{0,8^2} &= 1 \\ a &= 0,8^2 \\ a &= 0,64\end{aligned}$$

$$\text{Siis } P(r) = \frac{0,64}{r^2}.$$

Todennäköisyys, että puttaus onnistuu 3 metrin etäisyydeltä, on

$$P(3) = \frac{0,64}{3^2} = 0,0711\dots$$

Todennäköisyys, että puttaus ei onnistu 3 metrin etäisyydeltä, on $1 - 0,0711\dots = 0,928\dots$

Todennäköisyys sille, että yksikään kymmenestä pallosta ei mene reikään, on

$$\begin{aligned}P(\text{yksikään ei mene reikään}) \\ &= 0,928\dots^{10} \\ &= 0,478\dots\end{aligned}$$

Todennäköisyys, että ainakin yksi kymmenestä pallosta menee reikään, on

$$\begin{aligned}P(\text{ainakin yksi menee reikään}) \\ &= 1 - P(\text{yksikään ei mene reikään}) \\ &= 1 - 0,478\dots \\ &= 0,521\dots\end{aligned}$$

Ainakin yksi kymmenestä pallosta menee reikään todennäköisyydellä $0,521\dots \approx 0,52$.

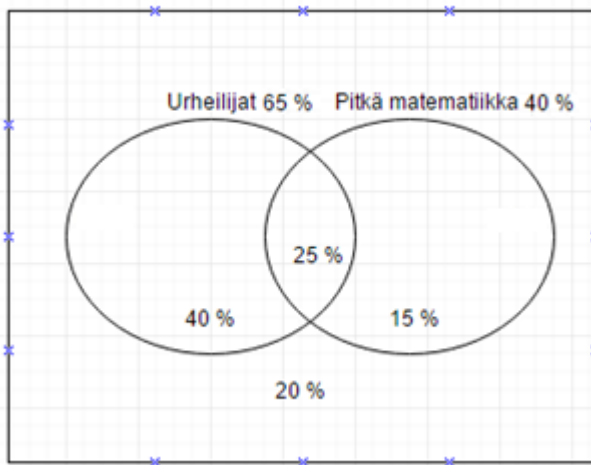
Vastaus: 0,52

- 335. a)** $P(B | A)$ tarkoittaa todennäköisyyttä tapahtumalle B , kun tapahtuma A tapahtuu, eli ”satunnaisesti valittu henkilö opiskelee pitkää matematiikkaa, kun hän urheilee”, eli ”satunnaisesti valittu urheilija opiskelee pitkää matematiikkaa”.
 $P(B | A)$ tarkoittaa siis todennäköisyyttä sille, että satunnaisesti valittu urheilija opiskelee pitkää matematiikkaa.

Vastaavasti $P(A | B)$ tarkoittaa todennäköisyyttä tapahtumalle ”satunnaisesti valittu pitkän matematiikan opiskelija urheilee”.

Vastaus: $P(B | A)$: todennäköisyys, että satunnaisesti valittu urheilija opiskelee pitkää matematiikkaa. $P(A | B)$: todennäköisyys, että satunnaisesti valittu pitkän matematiikan opiskelija urheilee.

- b)** Koska 65 % opiskelijoista urheilee, niin 35 % opiskelijoista ei urheile. 20 % ei urheile eikä opiskele pitkää matematiikkaa, jolloin $35 \% - 20 \% = 15 \%$ ei urheile, mutta opiskelee pitkää matematiikkaa. Siis lukion opiskelijoista opiskelee pitkää matematiikkaa ja urheilee $40 \% - 15 \% = 25 \%$. Piirretään havainnollistus ja määritetään sen avulla kysytyt todennäköisyydet.



Olkoon lukiolaisia n kappaletta. Tällöin:

$0,4n$ lukiolaista urheilee, mutta ei opiskele pitkää matematiikkaa.

$0,25n$ lukiolaista urheilee ja opiskelee pitkää matematiikkaa.

$0,15n$ lukiolaista opiskelee pitkää matematiikkaa, mutta ei urheile.

Kysytyt todennäköisyydet ovat

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(\text{urheilija opiskelee pitkää matematiikkaa}) \\ &= \frac{0,25n}{0,65n} \\ &= 0,38461... \\ &= 38,481\% \\ &\approx 38\%. \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(\text{pitkän matematiikan opiskelija urheilee}) \\ &= \frac{0,25n}{0,40n} \\ &= 0,625 \\ &= 62,5\% \\ &\approx 63\% \end{aligned}$$

Vastaus: $P(B | A) = 38\%$, $P(A | B) = 63\%$

- 336.** Määritetään ryhmän koko vastatapahtuman ”kaikilla on eri syntymäpäivä” avulla. Jos ryhmän koko on 2 henkilöä, niin todennäköisyys, jolla heillä on sama syntymäpäivä, saadaan laskettua vastatapahtuman avulla. Jos ensimmäisellä henkilöllä on syntymäpäivä jonakin vuoden 365 päivästä, niin toisella henkilöllä on oltava syntymäpäivä minä tahansa muuna vuoden 364 päivästä.

$$\begin{aligned} P(\text{kahdella henkilöllä on sama syntymäpäivä}) \\ &= 1 - P(\text{kahdella henkilöllä ei ole samaa syntymäpäivää}) \\ &= 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \end{aligned}$$

Vastaavasti jatkamalla saadaan kolmen henkilön ryhmälle

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin kahdella kolmesta henkilöstä on sama syntymäpäivä}) \\ &= 1 - P(\text{kenelläkään kolmesta henkilöstä ei ole samaa syntymäpäivää}) \\ &= 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \end{aligned}$$

Taulukoidaan taulukkolaskentaohjelmassa todennäköisyyksiä vastaavalla tavalla eteenpäin.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Henkilöitä	Päiviä "vapaana"	Todennäköisyys					
3	1	365	0,000					
4	2	364	0,003					
5	3	363	0,008					
6	4	362	0,016					
7	5	361	0,027					
8	6	360	0,040					
9	7	359	0,056					
10	8	358	0,074					
11	9	357	0,095					
12	10	356	0,117					
13	11	355	0,141					
14	12	354	0,167					
15	13	353	0,194					
16	14	352	0,223					
17	15	351	0,253					
18	16	350	0,284					
19	17	349	0,315					
20	18	348	0,347					
21	19	347	0,379					
22	20	346	0,411					
23	21	345	0,444					
24	22	344	0,476					
25	23	343	0,507	Ensimmäisen kerran yli 50 % todennäköisyys				
26	24	342	0,538					
27	25	341	0,569					
28	26	340	0,598					
29	27	339	0,627					
30	28	338	0,654					
31	29	337	0,681					
32	30	336	0,706					
33	Kaava:		1-PRODUCT(B\$3:B33)/365^A33					
34								

Taulukoinnin perusteella 23 hengen ryhmässä ainakin kahdella on sama syntymäpäivä yli 50 % todennäköisyydellä.

Vastaus: 23 henkeä

337. Listataan kolmilapsisen perheen mahdolliset lapsikokoonpanot.

TTT

TTP

TPT

TPP

PTP

PTT

PPT

PPP

Merkitään tapahtumat A ja B seuraavasti:

A = ”perheessä on sekä tyttöjä että poikia”

B = ”perheessä on enintään yksi tyttö”

$$\text{Tällöin } P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ ja } P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Tapahtuma ” A ja B ” tarkoittaa tapahtumaa ”perheessä on täsmälleen yksi tyttö”, joten $P(A \text{ ja } B) = \frac{3}{8}$.

Riippumattomuuden ehto on

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B).$$

Sijoitetaan yhtälöön tiedossa olevat todennäköisyydet ja tutkitaan, toteutuuko yhtälö.

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Yhtälö toteutuu, joten tapahtumat ovat riippumattomat.

Vastaus: ovat

- 338.** Tutkitaan väitettä ”Jos tapahtumat A ja B ovat riippumattomia ja tapahtumat B ja C ovat riippumattomia, tapahtumat A ja C ovat riippumattomia” valitsemalla jotkut tapahtumat, joilla väite mahdollisesti ei ole voimassa. Valitaan tapahtumat A , B ja C seuraavasti:
 A : ”arpakuution silmäluku on 1 tai 2”
 B : ”korttipakasta nostettu kortti on ässä”
 C : ”arpakuution silmäluku on 1”

Arpakuutio ja korttipakka eivät vaikuta toisiinsa, joten tapahtumat A ja B ovat riippumattomia. Samasta syystä tapahtumat B ja C ovat riippumattomia. Jos tutkittava väite on tosi, niin tällöin myös tapahtumat A ja C ovat riippumattomia. Tutkitaan, ovatko A ja C riippumattomia.

Jos A tapahtuu, niin arpakuution silmäluku on 1 tai 2. Tällöin todennäköisyys sille, että arpakuution silmäluku on 1, on 0,5, eli tapahtuman C todennäköisyys on 0,5, kun A tapahtuu.

Jos taas A ei tapahdu, niin arpakuution silmäluku on 3, 4, 5 tai 6. Tällöin todennäköisyys sille, että arpakuution silmäluku on 1, on 0, eli tapahtuman C todennäköisyys on 0, kun A tapahtuu.

Siis tapahtuman A tapahtuminen vaikuttaa tapahtuman C todennäköisyyteen, joten tapahtumat A ja C eivät ole riippumattomia. Tutkittava väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi

3.2 Yhteenlaskusääntö

ALOITA PERUSTEISTA

- 339.** a) Helteellä ei voi sataa lunta, joten tapahtumat $A = \text{”sataa lunta”}$ ja $B = \text{”on hellettä”}$ ovat erillisiä.

Vastaus: ei voi, ovat

- b) Pakkasella voi sataa lunta, joten tapahtumat $A = \text{”sataa lunta”}$ ja $B = \text{”on pakkasta”}$ eivät ole erillisiä.

Vastaus: voi, eivät ole

- c) Jari voi treenata samaan aikaan kuin Mari jumppaa, joten tapahtumat $A = \text{”Jari treenaa”}$ ja $B = \text{”Mari jumppaa”}$ eivät ole erillisiä.

Vastaus: voi, eivät ole

- d) Ari ei voi luistella ja ajaa autoa yhtä aikaa, joten tapahtumat $A = \text{”Ari luistelee”}$ ja $B = \text{”Ari ajaa autoa”}$ ovat erillisiä.

Vastaus: ei voi, ovat

- 340.** Koska pakkasta ja hellettä ei voi olla samassa paikassa samaan aikaan, niin tapahtumat ”on hellettä” ja ”on pakkasta” ovat erillisiä. Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} P(\text{on hellettä tai pakkasta}) \\ &= P(\text{on hellettä}) + P(\text{on pakkasta}) \\ &= 2 \% + 17 \% \\ &= 19 \%. \end{aligned}$$

Kaupungissa on pakkasta tai hellettä 19 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 19 %

- 341. a)** Koska tapahtumat A ja B ovat erillisiä, niin
 $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) = 0,24 + 0,39 = 0,63$.

Vastaus: 0,63

- b)** Yleisen yhteenlaskusäännön mukaan
 $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B) = 0,24 + 0,39 - 0,09 = 0,54$.

Vastaus: 0,54

- 342. a)** Tapahtuma ”molemmat ehtivät lentokoneeseen” voidaan ilmaista muodossa ”Virpi ehtii lentokoneeseen ja Petri ehtii lentokoneeseen.” Väite on oikein.

Vastaus: oikein

- b)** Tapahtumaa ”Vain toinen ehtii lentokoneeseen ” tarkoittaa, että Virpi ehtii ja Petri ei ehdi, tai sitten Petri ehtii ja Virpi ei ehdi. Väite on siis väärin.

Vastaus: väärin, ”Virpi ehtii lentokoneeseen ja Petri ei ehdi lentokoneeseen, tai Petri ehtii lentokoneeseen ja Virpi ei ehdi lentokoneeseen”.

- c)** Tapahtuma ”Kumpikaan ei ehdi lentokoneeseen” tarkoittaa, että Virpi ei ehdi lentokoneeseen ja Petri ei ehdi lentokoneeseen. Lause ”Virpi ei ehdi lentokoneeseen tai Petri ei ehdi lentokoneeseen” tarkoittaa, että ainakin toinen myöhästyy, mutta ei tarkoita sitä, että molemmat myöhästyvät. Väite on siis väärin.

Vastaus: väärin, ”Virpi ei ehdi lentokoneeseen ja Petri ei ehdi lentokoneeseen”

- 343. a)** Kertolaskusäännön mukaan todennäköisyys sille, että kaikki kolme lasta ovat poikia, on
- $$\begin{aligned} &P(1. \text{ lapsi on poika}) \cdot P(2. \text{ lapsi on poika}) \cdot P(3. \text{ lapsi on poika}) \\ &= 0,512 \cdot 0,512 \cdot 0,512 \\ &= 0,512^3 \\ &= 0,13421\dots \\ &= 13,421\dots \% \\ &\approx 13,4 \% \end{aligned}$$

Kaikki kolme lasta ovat poikia todennäköisyydellä 13,4 %.

Vastaus: 13,4 %

- b)** Koska syntyvistä lapsista 51,2 % on poikia, niin tyttöjä on $100 \% - 51,2 \% = 48,8 \%$. Kertolaskusäännön mukaan todennäköisyys sille, että kaikki kolme lasta ovat tyttöjä, on
- $$\begin{aligned} &P(1. \text{ lapsi on tyttö}) \cdot P(2. \text{ lapsi on tyttö}) \cdot P(3. \text{ lapsi on tyttö}) \\ &= 0,488 \cdot 0,488 \cdot 0,488 \\ &= 0,488^3 \\ &= 0,11621\dots \\ &= 11,621\dots \% \\ &\approx 11,6 \% \end{aligned}$$

Kaikki kolme lasta ovat tyttöjä todennäköisyydellä 11,6 %.

Vastaus: 11,6 %

- c)** Kaikki kolme lasta ovat samaa sukupuolta, jos he ovat kaikki poikia tai he ovat kaikki tyttöjä. Tapahtumat ”kaikki kolme ovat poikia” ja ”kaikki kolme ovat tyttöjä” ovat erillisiä, joten erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan
- $$\begin{aligned} &P(\text{kaikki kolme lasta ovat samaa sukupuolta}) \\ &= P(\text{kaikki kolme ovat poikia}) + P(\text{kaikki kolme ovat tyttöjä}) \\ &= 13,421\dots \% + 11,621\dots \% \\ &= 25,043\dots \% \\ &\approx 25,0 \% \end{aligned}$$

Kaikki kolme lasta ovat samaa sukupuolta todennäköisyydellä 25,0 %.

Vastaus: 25,0 %

- 344.** Tiedetään, että $P(\text{lukiolainen pitää ruotsista ja lukiolainen pitää englannista}) = 0,35$, joten tapahtumat ”lukiolainen pitää ruotsista” ja ”lukiolainen pitää englannista” eivät ole erillisiä. Käytetään yleistä yhteenlaskusääntöä.

$$\begin{aligned} &P(\text{lukiolainen pitää ruotsista tai englannista}) \\ &= P(\text{lukiolainen pitää ruotsista}) + P(\text{lukiolainen pitää englannista}) \\ &\quad - P(\text{lukiolainen pitää ruotsista ja lukiolainen pitää englannista}) \\ &= 0,45 + 0,60 - 0,35 \\ &= 0,70 \\ &= 70 \% \end{aligned}$$

Satunnainen lukion opiskelija pitää ruotsista tai englannista 70 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 70 %

- 345.** Merkitään tapahtumia seuraavasti:
 A = sanomalehti saapuu kello 4–5
 B = sanomalehti saapuu kello 5–6
Tiedetään, että $P(B) = 0,67$.
Koska sanomalehti tulee joka aamu klo 4–6, niin $P(A \text{ tai } B) = 1$.
Tapahtumat A ja B ovat erilliset, sillä sama lehti ei voi saapua kahtena eri aikana.

Muodostetaan yhtälö erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla. Sijoitetaan tunnetut tiedot ja ratkaistaan $P(A)$.

$$\begin{aligned} 1 &= P(A) + 0,67 \\ P(A) &= 1 - 0,67 \\ P(A) &= 0,33 \end{aligned}$$

Lehti saapuu kello 4–5 todennäköisyydellä 0,33

Vastaus: 0,33

346. Taulukossa olevien nappuloiden yhteismäärä on
 $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 5 + 12 = 30$.

1 Afrikan tähti
2 rubiinia
3 smaragdia
4 topaasia
3 rosvoa
5 hevosenkenkää
12 tyhjää

a) Tiedetään, että

$$P(\text{1. kiekko on rubiini}) = \frac{2}{30},$$

$$P(\text{1. kiekko on smaragdi}) = \frac{3}{30} \text{ ja}$$

$$P(\text{1. kiekko on topaasi}) = \frac{4}{30}.$$

Tapahtumat ”1. kiekko on rubiini”, ”1. kiekko on smaragdi” ja ”1. kiekko on topaasi” ovat erillisiä. Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$P(\text{1. kiekko on rubiini, smaragdi tai topaasi})$$

$$= \frac{2}{30} + \frac{3}{30} + \frac{4}{30}$$

$$= \frac{9}{30}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$= 0,3.$$

Ensimmäinen käännetty kiekko on rubiini, smaragdi tai topaasi todennäköisyydellä 0,30.

Vastaus: 0,30

- b) Koska kiekkoja on käännetty 6, kääntämättömien kiekkojen yhteismäärä on enää $30 - 6 = 24$. Käännettyistä kiekkoista yksikään ei ollut rubiini eikä hevosenkenkä, joten niiden määrät ovat ennallaan.

Sama kiekko ei voi olla sekä rubiini että hevosenkenkä, joten tapahtumat ”7. kiekko on rubiini” ja ”7. kiekko on hevosenkenkä” ovat erillisiä. Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} &P(7. \text{ kiekko on hevosenkenkä tai rubiini}) \\ &= P(7. \text{ kiekko on hevosenkenkä}) + P(7. \text{ kiekko on rubiini}) \\ &= \frac{2}{24} + \frac{5}{24} \\ &= \frac{7}{24} \\ &= 0,291\dots \\ &\approx 0,29. \end{aligned}$$

Seuraava käännetty pahvikiekko on hevosenkenkä tai rubiini todennäköisyydellä 0,29.

Vastaus: 0,29

347. a) Jos ensimmäinen sukka on vasemman jalan sukka, laatikossa on jäljellä kaksi vasemman jalan sukkaa ja kolme oikean jalan sukkaa, eli yhteensä 5 sukkaa. Toinen sukka on oikean jalan sukka todennäköisyydellä $\frac{3}{5} = 0,6$.

Vastaus: 0,6

- b) Hanna saa sukkaparin, jos hän ottaa ensin vasemman jalan sukan ja sitten oikean jalan sukan, tai jos hän ottaa ensin oikean jalan sukan ja sitten vasemman jalan sukan.

$$P(\text{sukkapari}) = P(\text{vasen}) \cdot P(\text{oikea}) + P(\text{oikea}) \cdot P(\text{vasen})$$

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Hanna saa sukkaparin todennäköisyydellä 0,6.

Vastaus: 0,6

348. Merkitään tapahtumia seuraavasti:

A = ”matkustajalla on käsiineet”

B = ”matkustajalla on pipo”

Tiedetään, että

$$P(A) = 0,30$$

$$P(A \text{ ja } B) = 0,20$$

$$P(A \text{ tai } B) = 0,65$$

Tapahtumat A ja B eivät ole erillisiä, sillä samalla henkilöllä voi olla käsiineet ja pipo. Muodostetaan yhtälö yleisen yhteenlaskusäännön

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

avulla ja ratkaistaan $P(B)$.

$$0,65 = 0,30 + P(B) - 0,20$$

$$0,65 = 0,10 + P(B)$$

$$P(B) = 0,65 - 0,10$$

$$P(B) = 0,55$$

Matkustajista 55 prosentilla on pipo päässään.

Vastaus: 55 %

349. Matilda saa täsmälleen yhden voittoarvan, jos ensimmäinen voittaa ja toinen ei voita, tai jos ensimmäinen ei voita ja toinen voittaa.

Koska arpoja on suuri määrä, ei yhden voittoarvon poistaminen vaikuta toisen arvan voiton todennäköisyyteen. Ensimmäisen ja toisen arvan voitto ovat siis riippumattomia.

Todennäköisyys sille, että yksittäinen arpa ei voita, on $1 - 0,15 = 0,85$.

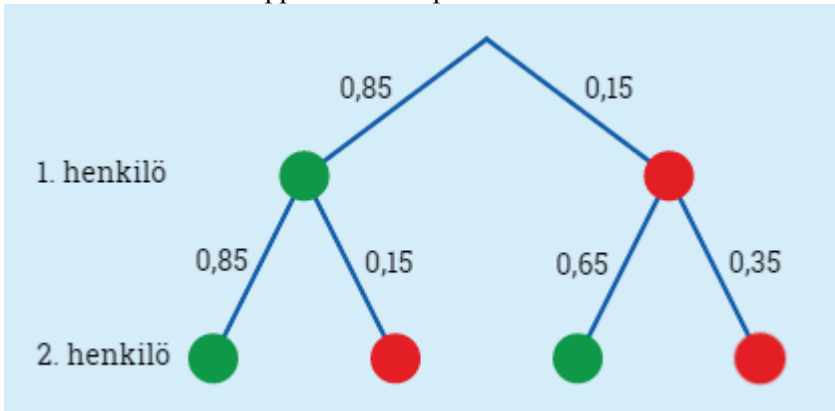
$$\begin{aligned} &P(\text{Matilda saa tasan yhden voittoarvan}) \\ &= P(\text{ensimmäinen arpa voittaa ja toinen ei voita}) \\ &+ P(\text{ensimmäinen arpa ei voita ja toinen arpa voittaa}) \\ &= P(\text{arpa voittaa}) \cdot P(\text{arpa ei voita}) + P(\text{arpa ei voita}) \cdot P(\text{arpa voittaa}) \\ &= 0,15 \cdot 0,85 + 0,85 \cdot 0,15 \\ &= 0,255 \\ &= 25,5 \% \end{aligned}$$

Matilda saa täsmälleen yhden voittoarvan 25,5 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 25,5 %

VAHVISTA OSAAMISTA

350. Piirretään tilanteesta appletin avulla puukaavio.



- a) Puumallissa suotuisa haara on oikeanpuoleisin haara, jossa molemmat valot ovat punaisia.

$$P(\text{molemmat kävelevät punaisia päin}) = 0,15 \cdot 0,35 = 0,0525 \approx 0,053$$

Molemmat kävelevät punaisia päin todennäköisyydellä 0,053.

Vastaus: 0,053

- b) Suotuisa haara on vasemmanpuoleisin haara, jossa molemmat valot ovat vihreitä.

$$P(\text{kumpikaan ei kävele punaisia päin}) = 0,85 \cdot 0,85 = 0,7225 \approx 0,72$$

Todennäköisyys sille, ettei kumpikaan kävele punaisia päin, on 0,72.

Vastaus: 0,72

- c) Suotuisia haaroja on molemmat keskimmäiset haarat, joissa toinen valo on vihreä ja toinen punainen.

$$P(\text{täsmälleen yksi heistä kävelee punaisia päin}) \\ = 0,85 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,65 = 0,225 \approx 0,23$$

Todennäköisyys sille, että täsmälleen yksi jalankulkijoista kävelee punaisia päin, on 0,23.

Vastaus: 0,23

351. Tiedetään, että $P(A \text{ tai } B) = 0,46$ ja $P(A) = 0,31$.

- a)** Muodostetaan yhtälö erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$ avulla ja ratkaistaan $P(B)$.

$$0,46 = 0,31 + P(B)$$

$$P(B) = 0,46 - 0,31$$

$$P(B) = 0,15$$

Vastaus: 0,15

- b)** Tapahtumat A ja B eivät ole erillisiä, sillä $P(A \text{ ja } B) = 0,12$.
Muodostetaan yhtälö yleisen yhteenlaskusäännön $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$ avulla ja ratkaistaan $P(B)$.

$$0,46 = 0,31 + P(B) - 0,12$$

$$0,46 = 0,19 + P(B)$$

$$P(B) = 0,46 - 0,19$$

$$P(B) = 0,27$$

Vastaus: 0,27

352. Merkitään tapahtumia seuraavasti:

A = ”satunnaisesti valittu osallistuja on festareilla 1. päivänä”

B = ”satunnaisesti valittu osallistuja on festareilla 2. päivänä”

a) Koska 1. päivänä osallistuu 8300 henkilöä ja yhteensä 11 400

$$\text{henkilöä, niin } P(A) = \frac{8300}{11\,400}.$$

$$\text{Vastaavasti } P(B) = \frac{10\,100}{11\,400}.$$

Koska kaikki satunnaisesti valitut osallistujat osallistuvat ainakin jompanakumpana päivänä, niin $P(A \text{ tai } B) = 1$.

Muodostetaan yhtälö yleisen yhteenlaskusäännön

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

avulla ja ratkaistaan siitä $P(A \text{ ja } B)$.

$$1 = \frac{8300}{11\,400} + \frac{10\,100}{11\,400} - P(A \text{ ja } B)$$

$$1 = \frac{18\,400}{11\,400} - P(A \text{ ja } B)$$

$$1 - \frac{18\,400}{11\,400} = -P(A \text{ ja } B)$$

$$-\frac{7000}{11\,400} = -P(A \text{ ja } B)$$

$$P(A \text{ ja } B) = \frac{7000}{11\,400}$$

$$P(A \text{ ja } B) = 0,614\dots$$

Satunnaisesti valittu osallistuja on festareilla molempina päivinä todennäköisyydellä $0,614\dots \approx 0,61$.

Vastaus: 0,61

- b) Todennäköisyys sille, että satunnaisesti valittu osallistuja on festareilla 1. päivänä, on $P(A) = \frac{8300}{11\,400}$, ja a-kohdan perusteella todennäköisyys sille, että satunnaisesti valittu osallistuja on festareilla molempina päivinä, on $P(A \text{ ja } B) = \frac{7000}{18\,400}$.

Todennäköisyys sille, että satunnaisesti valittu osallistuja on festareilla vain ensimmäisenä päivänä, voidaan ilmaista muodossa $P(A \text{ ja ei-}B)$. Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan $P(A) = P("A \text{ ja } B" \text{ tai } "A \text{ ja ei-}B") = P(A \text{ ja } B) + P(A \text{ ja ei-}B)$.

Muodostetaan tästä yhtälö sijoittamalla tunnetut tiedot. Ratkaistaan yhtälöstä kysytty todennäköisyys $P(A \text{ ja ei-}B)$.

$$\begin{aligned}\frac{8300}{11\,400} &= \frac{7000}{18\,400} + P(A \text{ ja ei-}B) \\ P(A \text{ ja ei-}B) &= \frac{8300}{11\,400} - \frac{7000}{18\,400} \\ P(A \text{ ja ei-}B) &= \frac{1300}{11\,400} \\ P(A \text{ ja ei-}B) &= 0,114...\end{aligned}$$

Satunnainen festareille osallistuva henkilö on festareilla vain ensimmäisenä päivänä todennäköisyydellä $0,114... \approx 0,11$.

Vastaus: 0,11

353. Merkitään tapahtumia seuraavasti:

A = ”vieras söi munia”

B = ”vieras söi pekonia”

Tiedetään seuraavat todennäköisyydet:

$$P(A) = 0,40$$

$$P(B) = 0,30$$

Tapahtumat A ja B eivät ole erillisiä, sillä vieras voi syödä molempia.

Tapahtuma ”vieras ei syönyt kumpaakaan” on tapahtuman ”vieras söi munia tai pekonia” vastatapahtuma.

$$P(\text{vieras ei syönyt kumpaakaan}) = 0,55, \\ \text{joten } P(A \text{ tai } B) = 1 - 0,55 = 0,45.$$

Muodostetaan yhtälö yleisen yhteenlaskusäännön

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

avulla ja ratkaistaan kysytty todennäköisyys $P(A \text{ ja } B)$.

$$0,45 = 0,30 + 0,40 - P(A \text{ ja } B)$$

$$0,45 = 0,7 - P(A \text{ ja } B)$$

$$P(A \text{ ja } B) = 0,7 - 0,45$$

$$P(A \text{ ja } B) = 0,25$$

Vieras söi sekä pekonia että munia todennäköisyydellä 0,25.

Vastaus: 0,25

- 354.** a) Erilliset tapahtumat ovat tapahtumia, joilla ei ole yhteisiä alkeistapauksia. Esimerkiksi tapahtumat ”arpakuution heitossa tulee pariton silmäluku” ja ”arpakuution heitossa tulee parillinen silmäluku” ovat erillisiä.
- b) Riippumattomat tapahtumat ovat tapahtumia, joissa toisen tapahtuminen ei vaikuta toisen todennäköisyyteen. Esimerkiksi tapahtumat ”korttipakan päällimmäinen kortti on ässä” ja ”arpakuution heitossa tulee silmäluku 2” ovat riippumattomia.

- 355. a)** Soittolistalla on kappaleita yhteensä $6 + 5 + 4 = 15$. Näistä 6 on bluesia, joten $P(\text{1. kappale on bluesia}) = \frac{6}{15}$. Jos ensimmäinen kappale on bluesia, listalla on vielä jäljellä 14 kappaletta, joista 5 on bluesia, joten $P(\text{2. kappale on bluesia}) = \frac{5}{14}$.

Todennäköisyys sille, että kaksi ensimmäistä kappaletta ovat bluesia, on

$$\begin{aligned} &P(\text{1. ja 2. kappale ovat bluesia}) \\ &= P(\text{1. kappale on bluesia}) \cdot P(\text{2. kappale on bluesia}) \\ &= \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} \\ &= 0,142... \\ &\approx 0,14. \end{aligned}$$

Kaksi ensimmäistä kappaletta ovat bluesia todennäköisyydellä 0,14.

Vastaus: 0,14

- b)** Soittolistan 15 kappaleesta on muuta kuin bluesia 9 kappaletta, joten $P(\text{1. kappale ei ole bluesia}) = \frac{9}{15}$. Jos ensimmäinen kappale on muuta kuin bluesia, listalla on vielä jäljellä 14 kappaletta, joista 8 on bluesia, joten $P(\text{2. kappale ei ole bluesia}) = \frac{8}{14}$.

Todennäköisyys sille, että kaksi ensimmäistä kappaletta ovat blueskappaleita, on

$$\begin{aligned} &P(\text{1. ja 2. kappale ovat muuta kuin bluesia}) \\ &= P(\text{1. kappale ei ole bluesia}) \cdot P(\text{2. kappale ei ole bluesia}) \\ &= \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} \\ &= 0,342... \\ &\approx 0,34. \end{aligned}$$

Kaksi ensimmäistä kappaletta ovat muuta kuin bluesia todennäköisyydellä 0,34.

Vastaus: 0,34

- c) Soittolistan 15 kappaleesta reggaeta tai bluesia on 11, joten

$$P(1. \text{ kappale on reggaeta tai bluesia}) = \frac{11}{15}.$$

Jos ensimmäinen kappale on reggaeta tai bluesia, listalla on vielä jäljellä 14 kappaletta, joista 10 on reggaeta tai bluesia, joten

$$P(2. \text{ kappale on reggaeta tai bluesia}) = \frac{10}{14}.$$

Todennäköisyys sille, että kaksi ensimmäistä kappaletta ovat reggaeta tai bluesia, on

$$\begin{aligned} &P(1. \text{ ja } 2. \text{ kappale ovat reggaeta tai bluesia}) \\ &= P(1. \text{ kappale reggaeta tai bluesia}) \cdot P(2. \text{ kappale reggaeta tai bluesia}) \\ &= \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} \\ &= 0,523... \\ &\approx 0,52. \end{aligned}$$

Kaksi ensimmäistä kappaletta ovat reggaeta tai bluesia todennäköisyydellä 0,52.

Vastaus: 0,52

356. Suotuisia arpakuution silmälukujen summia ovat ”ensimmäisellä heitolla 2 ja toisella heitolla 3” sekä ”ensimmäisellä heitolla 3 ja toisella heitolla 2”. Lasketaan todennäköisyydet, joilla kahta arpakuutiota heitettäessä tulee silmälukujen summaksi 2 tai 3.

Kahdella heitolla silmälukujen summa 2 voi tulla ainoastaa parilla 1 + 1 kaikista 36:sta mahdollisesta parista. Siis $P(\text{summa on } 2) = \frac{1}{36}$.

Kahdella arpakuutiolla silmälukujen summa 3 voi tulla pareilla 1 + 2 ja 2 + 1 kaikista 36:sta mahdollisesta parista. Siis

$$P(\text{summa on } 3) = \frac{2}{36}.$$

Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{yhteensä } 5 \text{ askelta})$

$$= P(\text{summa on } 2) \cdot P(\text{summa on } 3) + P(\text{summa on } 3) \cdot P(\text{summa on } 2)$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{36} + \frac{2}{36} \cdot \frac{1}{36}$$

$$= 0,003086\dots$$

$$\approx 0,0031$$

Pelaaja etenee kahden heittovuoron aikana täsmälleen viisi askelta todennäköisyydellä 0,0031.

Vastaus: 0,0031

- 357.** Mummon tietokone alkaa asentaa päivityksiä tai jumiutuu muuten vaan, jos se alkaa asentaa päivityksiä, tai se ei ala asentaa päivityksiä ja jumiutuu muuten vaan.

Merkitään tapahtumia seuraavasti:

A = ”kone alkaa asentaa päivityksiä”

B = ”kone jumiutuu muista syistä”

Tiedetään, että jos tapahtuma A ei tapahdu, niin tapahtuma B tapahtuu todennäköisyydellä 0,04. Koska tapahtumat A ja B ovat erillisiä, niin B voi tapahtua vain silloin, kun A ei tapahdu. Kertolaskusäännön mukaan $P(B) = P(A \text{ ei tapahdu}) \cdot 0,04 = (1 - 0,18) \cdot 0,04 = 0,0328$.

Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$P(A \text{ tai } B) = 0,18 + 0,0328 = 0,2128 \approx 0,21.$$

Mummon tietokone alkaa asentaa päivityksiä tai jumiutuu muuten vaan todennäköisyydellä $0,21 = 21\%$.

Vastaus: 21 %

358. Olkoon A = veriryhmä on A, B = veriryhmä on B, C = veriryhmä on AB ja O = veriryhmä on O. Tunnetaan seuraavat todennäköisyydet:

$$P(A) = 0,44$$

$$P(B) = 0,17$$

$$P(C) = 0,08$$

$$P(O) = 0,31$$

Jos valitaan kaksi henkilöä, muodostuu pareja AA , AB , AC ...
Sama veriryhmä on pareilla AA , BB , CC ja OO .

$$P(AA) = P(A \text{ ja } A) = P(A) \cdot P(A) = 0,44^2$$

$$P(BB) = P(B \text{ ja } B) = P(B) \cdot P(B) = 0,17^2$$

$$P(CC) = P(C \text{ ja } C) = P(C) \cdot P(C) = 0,08^2$$

$$P(OO) = P(O \text{ ja } O) = P(O) \cdot P(O) = 0,31^2$$

Tapahtuma ”puolisot kuuluvat samaan veriryhmään pitää” voidaan kirjoittaa muodossa ” AA tai BB tai CC tai OO ”.

$$\begin{aligned} &P(AA \text{ tai } BB \text{ tai } CC \text{ tai } OO) \\ &= 0,44^2 + 0,17^2 + 0,08^2 + 0,31^2 \\ &= 0,325 \\ &= 32,5 \% \\ &\approx 33 \% \end{aligned}$$

Puolisot kuuluvat samaan veriryhmään 33 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 33 %

359. Olkoon $A =$ ”päivä on kirkollinen juhlapyhä” ja $B =$ ”päivä on viikonloppuna”.

Tiedetään seuraavat todennäköisyydet:

$$P(A \text{ tai } B) = 0,3014$$

$$P(A) = 0,0274$$

$$P(B) = 0,2877$$

Muodostetaan yhtälö yleisen yhteenlaskusäännön

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

avulla ja ratkaistaan todennäköisyys $P(A \text{ ja } B)$.

$$0,3014 = 0,0274 + 0,2877 - P(A \text{ ja } B)$$

$$0,3014 = 0,3151 - P(A \text{ ja } B)$$

$$P(A \text{ ja } B) = 0,3151 - 0,3014$$

$$P(A \text{ ja } B) = 0,0137$$

Satunnainen päivä on siis sekä kirkollinen juhlapyhä että viikonloppu todennäköisyydellä 0,0137. Koska päiviä oli vuodessa 365, niin viikonlopulle osuvia kirkollisia juhlapyhiä oli tuona vuonna $0,0137 \cdot 365 = 5,0005 \approx 5$.

Kyseisenä vuonna 5 kirkollista juhlapyhää osui viikonlopulle.

Vastaus: 5 juhlapyhää

360. Viallinen tuote pääsee läpi jos tarkastaja A ei huomaa virhettä ja tarkastaja C ei huomaa virhettä, tai tarkastaja B ei huomaa virhettä ja tarkastaja C ei huomaa virhettä.

Olkoon A = ”tarkastaja A huomaa virheen”, B = ”tarkastaja B huomaa virheen” ja C = ”tarkastaja C huomaa virheen”.

$$P(A) = 0,90, \text{ joten } P(\bar{A}) = 1 - 0,90 = 0,10$$

$$P(B) = 0,92, \text{ joten } P(\bar{B}) = 1 - 0,92 = 0,08$$

$$P(C) = 0,98, \text{ joten } P(\bar{C}) = 1 - 0,98 = 0,02$$

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} &P(\bar{A} \text{ ja } \bar{C} \text{ tai } \bar{B} \text{ ja } \bar{C}) \\ &= P(\bar{A}) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) \\ &= 0,10 \cdot 0,02 + 0,08 \cdot 0,02 \\ &= 0,0036 \\ &= 0,36 \% \end{aligned}$$

Satunnainen viallinen tuote pääsee linjastosta läpi 0,36 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 0,36 %

361. Merkitään tapahtumia seuraavasti.

A = ”Anni pääsee jatsoon”

E = ”Erno pääsee jatsoon”

P = ”Pazilaiti pääsee jatsoon”

Listataan kaikki tapahtumat joissa ainakin kaksi heistä pääsee jatsoon.

Kolme pääsee:

” A ja E ja P ”

Kaksi pääsee:

” A ja E ja $\bar{P}$ ”

” A ja P ja $\bar{E}$ ”

” E ja P ja $\bar{A}$ ”

Lasketaan yksittäisten kilpailijoiden kohdalla todennäköisyydet sille, että kilpailija ei pääse jatsoon.

$$P(A) = 0,90, \text{ joten } P(\bar{A}) = 1 - 0,90 = 0,10$$

$$P(E) = 0,85, \text{ joten } P(\bar{E}) = 1 - 0,85 = 0,15$$

$$P(P) = 0,95, \text{ joten } P(\bar{P}) = 1 - 0,95 = 0,05$$

Todennäköisyys sille, että kaikki kolme pääsevät jatsoon, on
 $P(A \text{ ja } E \text{ ja } P) = P(A) \cdot P(E) \cdot P(P) = 0,90 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,72675$.

Lasketaan todennäköisyydet kullekin kahden kilpailijan jatsoon pääsijöiden joukolle.

$$P(A \text{ ja } E \text{ ja } \bar{P}) = 0,90 \cdot 0,85 \cdot 0,05 = 0,03825$$

$$P(A \text{ ja } P \text{ ja } \bar{E}) = 0,90 \cdot 0,95 \cdot 0,15 = 0,12825$$

$$P(E \text{ ja } P \text{ ja } \bar{A}) = 0,85 \cdot 0,95 \cdot 0,10 = 0,08075$$

$P(\text{ainakin kaksi heistä pääsee jatsoon})$

$$= P("A \text{ ja } E \text{ ja } P" \text{ tai } "A \text{ ja } E \text{ ja } \bar{P}" \text{ tai } "A \text{ ja } P \text{ ja } \bar{E}" \text{ tai } "E \text{ ja } P \text{ ja } \bar{A}")$$

$$= P(A \text{ ja } E \text{ ja } P) + P(A \text{ ja } E \text{ ja } \bar{P}) + P(A \text{ ja } P \text{ ja } \bar{E}) + P(E \text{ ja } P \text{ ja } \bar{A})$$

$$= 0,72675 + 0,03825 + 0,12825 + 0,08075$$

$$= 0,974$$

$$= 97,4 \%$$

$$\approx 97 \%$$

Todennäköisyys sille, että ainakin kaksi kilpailijoista pääsee jatsoon, on 97 %.

Vastaus: 97 %

362. a) Kyseisessä lukiossa on opiskelijoita yhteensä $133 + 106 = 239$.

Satunnainen opiskelija on tyttö todennäköisyydellä $\frac{133}{239} = 0,556\dots$ ja poika todennäköisyydellä $\frac{106}{239} = 0,443\dots$

Kysytty todennäköisyys on erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} &P(\text{satunnainen lukiolainen on värisokea}) \\ &= P(\text{satunnainen lukiolainen on värisokea tyttö tai värisokea poika}) \\ &= P(\text{satunnainen lukiolainen on tyttö ja värisokea}) \\ &\quad + P(\text{satunnainen lukiolainen on poika ja värisokea}). \end{aligned}$$

Kertolaskusäännön mukaan tämä todennäköisyys on

$$\begin{aligned} &0,556\dots \cdot 0,005 + 0,443\dots \cdot 0,10 \\ &= 0,04713\dots \\ &= 4,713\dots \% \\ &\approx 5 \%. \end{aligned}$$

Satunnainen lukion opiskelija on värisokea 5 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 5 %

b) Värisokeus ja vasenkätisyys voidaan ajatella riippumattomiksi.

$$\begin{aligned} &P(\text{satunnainen lukiolainen on värisokea ja vasenkätinen}) \\ &= P(\text{satunnainen lukiolainen on värisokea}) \\ &\quad \cdot P(\text{satunnainen lukiolainen on vasenkätinen}) \\ &= 0,04713\dots \cdot 0,10 \\ &= 0,00471\dots \\ &= 0,471\dots \% \\ &\approx 0,5 \% \end{aligned}$$

Satunnainen lukion opiskelija on värisokea ja vasenkätinen 0,5 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 0,5 %

363. Lasketaan todennäköisyys sille, että kaikki kortit ovat eriarvoisia. Ensimmäinen kortti voi olla mikä tahansa 52:sta kortista. Toisen pitää olla eriarvoinen kuin ensimmäinen, joten toiselle kortille on 48 suotuisaa vaihtoehtoa 51:stä pakassa olevasta kortista. Todennäköisyys, että toinen kortti on eriarvoinen kuin ensimmäinen, on siis $\frac{48}{51}$.

Vastaavalla tavalla todennäköisyys sille, että kolmas kortti on eriarvoinen kuin kaksi ensimmäistä keskenään eriarvoista korttia, on $\frac{44}{50}$. Jatkamalla tähän tapaan saadaan

$$P(\text{kaikki eriarvoisia}) = \frac{52}{52} \cdot \frac{48}{51} \cdot \frac{44}{50} \cdot \frac{40}{49} \cdot \frac{36}{48} = 0,507... \approx 0,51.$$

Kaikki kortit ovat eriarvoisia todennäköisyydellä 0,51.

Vastaus: 0,51

364. Positiivisia kaksinumeroisia kokonaislukuja ovat luvut $10 - 99$, joita on 90 kappaletta.

Pienin kaksinumeroinen kolmella jaollinen positiivinen kokonaisluku on 12 ja suurin kaksinumeroinen kolmella jaollinen kokonaisluku on 99.

Näiden erotus on $99 - 12 = 79$, ja luku 3 sisältyy erotukseen $\frac{99-12}{3} = 29$ kertaa.

Kaksinumeroisten kolmella jaollisten positiivisten kokonaislukujen määrää laskettaessa tähän on lisättävä yksi, koska esimerkiksi lukujen 12 ja 15 erotus on 3 ja luku 3 sisältyy erotukseen $\frac{3}{3} = 1$ kertaa, mutta lukuja on kuitenkin 2 eikä 1. Kaksinumeroisia positiivisia kolmella jaollisia kokonaislukuja on siis $29 + 1 = 30$.

$$P(\text{kaksinumeroinen positiivinen kokonaisluku on jaollinen kolmella}) \\ = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

Pienin kaksinumeroinen neljällä jaollinen positiivinen kokonaisluku on 12 ja suurin kaksinumeroinen neljällä jaollinen kokonaisluku on 96.

Kaksinumeroisia neljällä jaollisia positiivisia kokonaislukuja on $\frac{96-12}{4} + 1 = 22$.

$$P(\text{kaksinumeroinen positiivinen kokonaisluku on jaollinen neljällä}) \\ = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}.$$

Tapahtumat ”luku on kolmella jaollinen” ja ”luku on neljällä jaollinen” eivät ole erillisiä, sillä luku on jaollinen kolmella ja neljällä, jos se on jaollinen luvulla $3 \cdot 4 = 12$.

Suurin kaksinumeroinen kahdellatoista jaollinen kokonaisluku on 96 ja pienin 12.

$$\text{Kahdellatoista jaollisia kaksinumeroisia positiivisia kokonaislukuja on} \\ \frac{96-12}{12} + 1 = 8.$$

$$P(\text{kaksinumeroinen positiivinen kokonaisluku on jaollinen kahdellatoista}) \\ = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}.$$

$P(\text{kaksinumeroinen positiivinen kokonaisluku on jaollinen neljällä tai kolmella})$

$$= P(\text{kaksinumeroinen positiivinen kokonaisluku on jaollinen kolmella}) \\ + P(\text{kaksinumeroinen positiivinen kokonaisluku on jaollinen neljällä}) \\ - P(\text{kaksinumeroinen positiivinen kokonaisluku on jaollinen kahdellatoista})$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{11}{45} - \frac{4}{45} = \frac{22}{45} = 0,488... \approx 0,49.$$

Satunnainen kaksinumeroinen kokonaisluku on jaollinen kolmella tai neljällä todennäköisyydellä 0,49.

Vastaus: 0,49

365. Jan ehtii junaan, jos hän ehtii bussiin ja junaan tai ei ehdi bussiin, mutta ehtii junaan.

Jos Jan ehtii bussiin, hän myöhästyy junasta todennäköisyydellä 0,1 ja ehtii junaan todennäköisyydellä $1 - 0,1 = 0,9$.

Jos Jan myöhästyy bussista, hän myöhästyy junasta todennäköisyydellä 0,4 ja ehtii junaan todennäköisyydellä $1 - 0,4 = 0,6$.

Merkitään $B =$ ”Jan ehtii bussiin” ja $J =$ ”Jan ehtii junaan”. Tällöin $P(\text{Jan ehtii kouluun})$

$$\begin{aligned} &= P(B \text{ ja } J) + P(\overline{B} \text{ ja } J) \\ &= P(B) \cdot 0,9 + P(\overline{B}) \cdot 0,6 \\ &= P(B) \cdot 0,9 + [1 - P(B)] \cdot 0,6 \\ &= 0,9P(B) + 0,6 - 0,6P(B) \\ &= 0,3P(B) + 0,6. \end{aligned}$$

Tiedetään, että $P(\text{Jan ehtii kouluun}) = 0,85$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä $P(B)$.

$$\begin{aligned} 0,3P(B) + 0,6 &= 0,85 \\ 0,3P(B) &= 0,85 - 0,6 \\ 0,3P(B) &= 0,25 & \| : 0,3 \\ P(B) &= 0,833... \end{aligned}$$

Jan ehtii bussiin todennäköisyydellä $0,833... \approx 0,83$.

Vastaus: 0,83

- 366.** Kirjoitetaan taulukkoon tehtävänannossa kerrotut tiedot (sininen tausta) ja täydennetään taulukkoa vaihe vaiheelta.

	Onnistuu biologiassa	Epäonnistuu biologiassa	Yhteensä
Onnistuu kemiassa			
Epäonnistuu kemiassa	$210 - 112 = 98$	112	210
Yhteensä	$1300 - 350 = 950$	350	1300

	Onnistuu biologiassa	Epäonnistuu biologiassa	Yhteensä
Onnistuu kemiassa	$950 - 98 = 852$	$350 - 112 = 238$	$1300 - 210 = 1090$
Epäonnistuu kemiassa	98	112	210
Yhteensä	950	350	1300

- a) 1300 kokelaasta 852 onnistuu molemmissa kokeissa, joten $P(\text{satunnainen kokelas onnistuu molemmissa kokeissa})$

$$= \frac{852}{1300} = 0,655... \approx 0,66.$$

Kokelas onnistuu molemmissa kokeissa todennäköisyydellä 0,66.

Vastaus: 0,66

- b) 350 biologian kokeessa epäonnistuneesta kokelaasta 112 epäonnistuu myös kemiassa, joten

$$P(\text{satunnainen biologian kokeessa epäonnistunut kokelas epäonnistuu kemiassa}) = \frac{112}{350} = 0,32.$$

Biologian kokeessa epäonnistunut kokelas epäonnistuu myös kemian kokeessa todennäköisyydellä 0,32.

Vastaus: 0,32

- e) 1300 kokelaasta ainakin toisessa kokeessa epäonnistuu
 $238 + 112 + 98 = 448$.

$$P(\text{satunnainen kokelas onnistuu ainakin toisessa kokeessa}) \\ = \frac{448}{1300} = 0,344.. \approx 0,34.$$

Kokelas epäonnistuu ainakin toisessa kokeessa todennäköisyydellä 0,34.

Vastaus: 0,34

367. Merkitään tapahtumia seuraavasti:
 L = ”Linnea onnistuu yksittäisellä yrityksellä”
 K = ”Kalle onnistuu yksittäisellä yrityksellä”

Kalle onnistuu paremmin kuin Linnea, jos

- Kalle onnistuu molemmilla yrityksillä ja Linnea vain ensimmäisellä yrityksellä
- Kalle onnistuu molemmilla yrityksillä ja Linnea vain toisella yrityksellä
- Kalle onnistuu molemmilla yrityksillä ja Linnea ei onnistu kummallakaan yrityksellä
- Kalle onnistuu vain ensimmäisellä yrityksellä ja Linnea ei onnistu kummallakaan yrityksellä
- Kalle onnistuu vain toisella yrityksellä ja Linnea ei onnistu kummallakaan yrityksellä

Merkitään nämä tapahtumat ovat lyhennysmerkintöjä käyttäen:

” K ja K ja L ja $\bar{L}$ ”

” K ja K ja $\bar{L}$ ja L ”

” K ja K ja $\bar{L}$ ja $\bar{L}$ ”

” K ja $\bar{K}$ ja $\bar{L}$ ja $\bar{L}$ ”

” $\bar{K}$ ja K ja $\bar{L}$ ja $\bar{L}$ ”

$P(K) = 0,7$, joten $P(\bar{K}) = 1 - 0,7 = 0,3$.

$P(L) = 0,8$, joten $P(\bar{L}) = 1 - 0,8 = 0,2$.

$P(\text{Kalle onnistuu paremmin kuin Linnea})$

$$\begin{aligned} &= P(K \text{ ja } K \text{ ja } L \text{ ja } \bar{L}) + P(K \text{ ja } K \text{ ja } \bar{L} \text{ ja } L) + P(K \text{ ja } K \text{ ja } \bar{L} \text{ ja } \bar{L}) \\ &+ P(K \text{ ja } \bar{K} \text{ ja } \bar{L} \text{ ja } \bar{L}) + P(\bar{K} \text{ ja } K \text{ ja } \bar{L} \text{ ja } \bar{L}) \\ &= 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \\ &+ 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \\ &= 0,193\dots \\ &\approx 0,19 \end{aligned}$$

Kalle onnistuu paremmin kuin Linnea todennäköisyydellä 0,19.

Vastaus: 0,19

368. Jos laatikosta A tulee valkoinen pallo, niin laatikossa B on 4 valkoista kuudesta pallosta. Tällöin $P(\text{laatikosta B tulee valkoinen}) = \frac{4}{6}$.

Jos laatikosta A tulee punainen pallo, niin laatikossa B on 3 valkoista kuudesta pallosta. Tällöin $P(\text{laatikosta B tulee valkoinen}) = \frac{3}{6}$.

Valkoinen pallo nousee B:stä tapauksissa ”A:sta valkoinen ja B:stä valkoinen” tai ”A:sta punainen ja B:stä valkoinen”.

$$\begin{aligned} &P(\text{laatikosta B tulee valkoinen}) \\ &= P(\text{laatikosta A tulee valkoinen ja laatikosta B tulee punainen}) \\ &+ P(\text{laatikosta A tulee punainen ja laatikosta B tulee punainen}) \\ &= P(\text{laatikosta A tulee valkoinen}) \cdot P(\text{laatikosta B tulee valkoinen}) \\ &+ P(\text{laatikosta A tulee punainen}) \cdot P(\text{laatikosta B tulee valkoinen}) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = 0,566... \approx 0,57 \end{aligned}$$

Toisena otettu pallo on valkoinen todennäköisyydellä 0,57.

Vastaus: 0,57

- 369.** Todennäköisyys sille, että 300 osallistujasta ensimmäinen tarvitsee lääkärin hoitoa ja muut 299 eivät tarvitse, on
 $P(\text{ensimmäinen tarvitsee hoitoa ja muut eivät})$
 $= 0,006 \cdot (1 - 0,006)^{299}$.

Vastaavasti todennäköisyys sille, että 300 osallistujasta toinen tarvitsee lääkärin hoitoa ja muut 299 eivät tarvitse, on

$$P(\text{toinen tarvitsee hoitoa ja muut eivät}) \\ = 0,006 \cdot (1 - 0,006)^{299}$$

ja

$$P(\text{kolmas tarvitsee hoitoa ja muut eivät}) \\ = 0,006 \cdot (1 - 0,006)^{299}$$

ja niin edelleen. Todennäköisyydet ovat keskenään yhtä suuria, joten kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{täsmälleen yksi tarvitsee lääkärin hoitoa}) \\ = 300 \cdot 0,006 \cdot (1 - 0,006)^{299} \\ = 0,29771 \dots \\ = 29,771 \% \\ \approx 30 \%$$

Todennäköisyys sille, että osallistujista täsmälleen yksi tarvitsee lääkärin hoitoa, on 30 %.

Vastaus: 30 %

370. Sijoitetaan lausekkeeseen $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ heittojen määrä $n = 60$,

kuutosten määrä $k = 10$ ja kuutosen todennäköisyys $p = \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} & \binom{60}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{60-10} \\ &= \binom{60}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{50} \\ &= 0,1370... \\ &\approx 0,14 \end{aligned}$$

Kun arpakuutiota heitetään 60 kertaa, saadaan täsmälleen 10 kuutosta todennäköisyydellä 0,14.

Vastaus: 0,14

371. Tapahtuman ” A tai B tai C ” todennäköisyys voidaan laskea summan $P(A) + P(B) + P(C)$ avulla. Tällöin kuitenkin alueet ” A ja B ”, ” A ja C ” ja ” B ja C ” tulevat laskettua kahdesti, joten vähennetään ne kerran.

Vastaavasti alue ” A ja B ja C ” tulee laskettua kolme kertaa, mutta vähennettäessä alueet ” A ja B ”, ” A ja C ” ja ” B ja C ” alue ” A ja B ja C ” tulee vähennettyä kolmesti. Tällöin $P(A \text{ ja } B \text{ ja } C)$ tulee lisätä takaisin kerran.

$$P(A \text{ tai } B \text{ tai } C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \text{ ja } B) - P(A \text{ ja } C) - P(B \text{ ja } C) + P(A \text{ ja } B \text{ ja } C)$$

$$\text{Vastaus: } P(A \text{ tai } B \text{ tai } C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \text{ ja } B) - P(A \text{ ja } C) - P(B \text{ ja } C) + P(A \text{ ja } B \text{ ja } C)$$

- 372. a)** Esimerkiksi tapahtuman ”arpakuution heitossa tulee kahdesti peräkkäin sama silmäluku” todennäköisyydessä käytetään riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöä ja erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntöä:

Todennäköisyys sille, että saadaan kahdesti peräkkäin sama silmäluku, on erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned} &P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 1) \\ &+ P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 2) \\ &+ P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 3) \\ &+ P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 4) \\ &+ P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 5) \\ &+ P(\text{saadaan kahdesti silmäluku } 6). \end{aligned}$$

Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön mukaan tämä todennäköisyys on

$$\begin{aligned} &P(1. \text{ heitolla silmäluku } 1) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 1) \\ &+ P(1. \text{ heitolla silmäluku } 2) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 2) \\ &+ P(1. \text{ heitolla silmäluku } 3) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 3) \\ &+ P(1. \text{ heitolla silmäluku } 4) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 4) \\ &+ P(1. \text{ heitolla silmäluku } 5) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 5) \\ &+ P(1. \text{ heitolla silmäluku } 6) \cdot P(2. \text{ heitolla silmäluku } 6). \end{aligned}$$

Vastaus: ”arpakuution heitossa tulee kahdesti peräkkäin sama silmäluku”

- b) Esimerkiksi tapahtuman ”korttipakan kaksi päällimmäistä korttia ovat samaa maata tai molemmat kuvakortteja” todennäköisyyden laskemisessa tarvitaan riippuvien tapahtumien kertolaskusääntöä ja yleistä yhteenlaskusääntöä:

Todennäköisyys sille, että korttipakan kaksi päällimmäistä korttia ovat samaa maata tai molemmat kuvakortteja, on yleisen yhteenlaskusäännön mukaan

$P(\text{kaksi päällimmäistä korttia ovat samaa maata tai molemmat kuvakortteja})$

$$= P(\text{samaa maata}) + P(\text{molemmat kuvakortteja}) - P(\text{samaa maata ja molemmat kuvakortteja}).$$

Tässä kohtaa tarvitaan myös erillisten tapahtumien yhteenlaskusääntöä, jonka käyttöä ei ole tehtävänannossa kielletty. Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan tämä todennäköisyys on

$$P(\text{molemmat herttoja}) + P(\text{molemmat ruutuja}) + P(\text{molemmat patoja}) + P(\text{molemmat ristejä}) + P(\text{molemmat kuvakortteja}) - P(\text{samaa maata ja molemmat kuvakortteja}).$$

Riippuvien tapahtumien kertolaskusäännön mukaan tämä todennäköisyys on

$$\begin{aligned} & P(1. \text{ kortti on hertta}) \cdot P(2. \text{ kortti on hertta}) \\ & + P(1. \text{ kortti on ruutu}) \cdot P(2. \text{ kortti on ruutu}) \\ & + P(1. \text{ kortti on pata}) \cdot P(2. \text{ kortti on pata}) \\ & + P(1. \text{ kortti on risti}) \cdot P(2. \text{ kortti on risti}) \\ & + P(1. \text{ kortti on kuva}) \cdot P(2. \text{ kortti on kuva}) \\ & - P(1. \text{ kortti on herttakuva}) \cdot P(2. \text{ kortti on herttakuva}) \\ & - P(1. \text{ kortti on ruutukuva}) \cdot P(2. \text{ kortti on ruutukuva}) \\ & - P(1. \text{ kortti on patakuva}) \cdot P(2. \text{ kortti on patakuva}) \\ & - P(1. \text{ kortti on ristikuva}) \cdot P(2. \text{ kortti on ristikuva}) \\ & = \underbrace{\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}}_{\text{molemmat herttoja}} + \underbrace{\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}}_{\text{molemmat ruutuja}} + \underbrace{\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}}_{\text{molemmat patoja}} + \underbrace{\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}}_{\text{molemmat ristejä}} + \underbrace{\frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51}}_{\text{molemmat kuvia}} \\ & - \underbrace{\frac{3}{51} \cdot \frac{2}{51}}_{\text{molemmat herttakuvia}} - \underbrace{\frac{3}{51} \cdot \frac{2}{51}}_{\text{molemmat ruutukuvia}} - \underbrace{\frac{3}{51} \cdot \frac{2}{51}}_{\text{molemmat patakuvia}} - \underbrace{\frac{3}{51} \cdot \frac{2}{51}}_{\text{molemmat ristikuvia}}. \end{aligned}$$

Vastaus: ”korttipakan kaksi päällimmäistä korttia ovat samaa maata tai molemmat kuvakortteja”

ALOITUSAUKEAMAAN LIITTYVIÄ TEHTÄVIÄ

1. Kertoimet ovat eri lopputulosmahdollisuuksille arvioitujen todennäköisyyksien käänteislukuja.

Kotijoukkueen voiton todennäköisyys on 50 % eli 0,50.

Tasapelin todennäköisyys on 30 % eli 0,30.

Vierasjoukkueen voiton todennäköisyys 20 % eli 0,20.

Kertoimet saadaan todennäköisyyksien käänteislukuina:

Kotijoukkueen voiton kerroin on $\frac{1}{0,5} = 2,00$.

Tasapelin kerroin on $\frac{1}{0,30} = 3,333... \approx 3,33$.

Vierasjoukkueen kerroin on $\frac{1}{0,20} = 5,00$.

Vastaus: kotivoitto 2,00, tasapeli 3,33 ja vierasvoitto 5,00

2. Kotivoiton kerroin on 10.
Tasapelin kerroin on 2,5.
Vierasjoukkueen kerroin on 2.

Kertoimien käänteisluvut ovat todennäköisyyksiä:

Kotijoukkueen voiton todennäköisyys on $\frac{1}{10} = 0,1 = 10 \%$.

Tasapelin todennäköisyys on $\frac{1}{2,5} = 0,4 = 40 \%$.

Vierasjoukkueen voiton todennäköisyys on $\frac{1}{2} = 0,5 = 50 \%$.

Vastaus: kotijoukkueen voitto 10 %, tasapeli 40 % ja vierasjoukkueen voitto 50 %