

KERTAUS

KERTAUSTEHTÄVIÄ

- K1.** Ensimmäiselle paidalle on 5 vaihtoehtoa, toiselle 4, kolmannelle 3 ja niin edelleen. Axel voi pitää paitoja $5! = 120$:ssä eri järjestyksessä.

Vastaus: 120:ssä eri järjestyksessä

- K2.** Ensimmäisessä vaiheessa on 5 vaihtoehtoa, toisessa vaiheessa 3 vaihtoehtoa ja kolmannessa vaiheessa 2 vaihtoehtoa. Tuloperiaatteen mukaan puhelimen voi valita $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ vaihtoehdosta.

Vastaus: 30 vaihtoehdosta

- K3.** Yhdeksästä työntekijästä voidaan valita neljän työntekijän ryhmä $\binom{9}{4} = 126$:lla eri tavalla, joten 126 erilaista kokoonpanoa voi tulla valituksi.

Vastaus: 126 kokoonpanoa

- K4.** Kun joukkueet pelaavat toisiaan vastaan, ne muodostavat kahden alkion joukkoja. Viidestä alkiosta voidaan muodostaa kahden alkion joukko $\binom{5}{2} = 10$:llä eri tavalla. Alkusarjassa pelataan siis 10 peliä.

Vastaus: 10 peliä

- K5.** Seitsemän nukan joukosta voidaan valita kolme $\binom{7}{3} = 35$:llä tavalla, ja kahdeksasta nukesta voidaan valita viisi $\binom{8}{5} = 56$:lla tavalla. Erilaisia nukkekokoonpanoja on yhteensä $35 \cdot 56 = 1960$.

Leikissä voi olla 1960 eri nukkekokoonpanoa.

Vastaus: 1960 nukkekokoonpanoa

- K6.** Matematiikan kirjat voidaan järjestää $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ eri tavalla. Vastaavasti psykologian kirjat voidaan järjestää $5!$ eri tavalla ja yhteiskuntaopin kirjat $2!$ eri tavalla. Lisäksi kolme oppiainetta voidaan järjestää $3!$ eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan on $4! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 3! = 34\,560$ eri tapaa järjestää kirjat.

Vastaus: 34 560 järjestystä

- K7. a)** Sanassa PERUNA on kuusi eri kirjainta, joten uuden sanan ensimmäinen kirjain voidaan valita kuudesta vaihtoehdosta, toinen viidestä vaihtoehdosta ja niin edelleen.

Erilaisia merkkijonoja voidaan muodostaa $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ kappaletta.

Vastaus: 720 merkkijonoa

- b)** Viidellä kirjaimella on $5!$ mahdollista järjestystä, mutta näistä osa on samoja, koska U esiintyy sanassa kahdesti. Luku $5!$ on siis jaettava luvulla, joka kertoo kuinka monessa järjestyksessä kaksi U-kirjainta voivat olla, eli luvulla $2!$.

Erilaisia merkkijonoja voidaan siis muodostaa $\frac{5!}{2!} = 60$ kappaletta.

Vastaus: 60 merkkijonoa

K8. a) Viikossa on seitsemän päivää, joista viisi on arkipäiviä, joten

$$P(\text{itsenäisyyspäivä on arkipäivänä}) = \frac{5}{7} = 0,714... \approx 0,71.$$

Itsenäisyyspäivä on arkipäivänä todennäköisyydellä $\frac{5}{7} \approx 0,71$.

Vastaus: $\frac{5}{7} \approx 0,71$

b) Viikossa on seitsemän päivää ja viikonloppuna on kaksi päivää, joten

$$P(\text{itsenäisyyspäivä on viikonloppuna}) = \frac{2}{7} = 0,285... \approx 0,29.$$

Itsenäisyyspäivä on viikonloppuna todennäköisyydellä $\frac{2}{7} \approx 0,29$.

Vastaus: $\frac{2}{7} \approx 0,29$

K9. Muodostetaan taulukko, jossa on kahden arpakuution silmälukujen summat.

1. heiton silmäluku

	6				9	10	11	12
	5	6			8	9	10	11
2. heiton	4	5	6		7	8	9	10
silmäluku	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	2	3	4	5	6	7	8
		1	2	3	4	5	6	7

Kahden arpakuution heitossa alkeistapauksia on 36 ja alkeistapauksia, joissa silmälukujen summa on 7 tai 8, on 11.

$$P(\text{silmälukujen summa on 7 tai 8}) = \frac{11}{36} = 0,30555 = 30,555... \% \approx 31 \%$$

Silmälukujen summa on 7 tai 8 todennäköisyydellä 31 %.

Vastaus: 31 %

- K10.** Tilastossa on tutkittu 39:ää lukiolaista. Lukiolaisia, joilla lemmikkinä on kissa tai lisko, on $8 + 1 = 9$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{lemmikkinä kissa tai lisko}) = \frac{9}{39} \stackrel{(3)}{=} \frac{3}{13} = 0,230 \approx 0,23.$$

Lukiolaisella on lemmikkinä kissa tai lisko todennäköisyydellä 0,23.

Vastaus: $\frac{3}{13} \approx 0,23$

- K11.** Korttipakasta voidaan nostaa erilaisia viiden kortin joukkoja $\binom{52}{5}$ kappaletta.

Korttipakassa on 4 ässää, joten siellä on $52 - 4 = 48$ muuta korttia. Erilaisia viiden kortin joukkoja, joissa ei ole ässää, eli joissa kortit on valittu muiden 48:n kortin joukosta, on $\binom{48}{5}$ kappaletta.

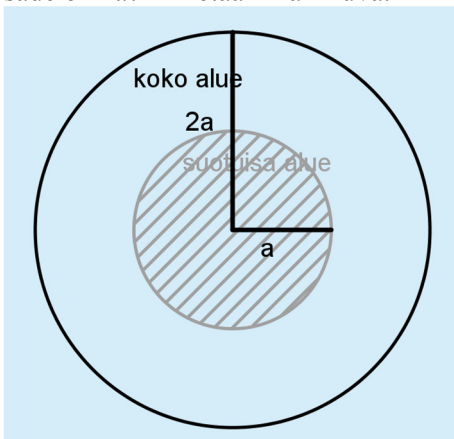
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{ei yhtään ässää}) = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,658\dots \approx 0,66.$$

Todennäköisyys sille, ettei saada yhtään ässää, kun otetaan pakasta viisi korttia, on 0,66.

Vastaus: 0,66

K12. Merkitään suotuisan alueen sädettä kirjaimella a . Tällöin koko ympyrän säde on $2a$. Piirretään mallikuva.



Käytetään geometrisena mittana pinta-alaa.

Koko alueen pinta-ala on $\pi \cdot (2a)^2 = \pi \cdot 4a^2 = 4\pi a^2$ ja suotuisan alueen pinta-ala πa^2 .

Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{kivi osuu lähemmäksi ympyrän keskipistettä kuin sen kehää})$

$$= \frac{\pi a^2}{4\pi a^2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Kivi osuu lähemmäs ympyrän keskipistettä kuin sen kehää

todennäköisyydellä $\frac{1}{4} = 0,25$.

Vastaus: $\frac{1}{4} = 0,25$

K13. Taskussa on aluksi $5 + 3 = 8$ kolikkoa, joista 5 on 50 sentin ja 3 kahden euron kolikoita.

TAPA 1:

Saadaan täsmälleen 2,50 euroa, jos ensimmäinen otettu kolikko on kahden euron kolikko ja toinen 50 sentin kolikko, tai toisin päin.

Jos ensimmäinen kolikko on 2 euron kolikko, niin taskussa on vielä jäljellä 7 kolikkoa, joista 5 on 50 sentin kolikoita. Tällöin todennäköisyys sille, että toisena otettu kolikko on 50 sentin kolikko, on $\frac{5}{7}$.

Jos ensimmäinen kolikko on 50 sentin kolikko, niin taskussa on vielä jäljellä 7 kolikkoa, joista 3 on 2 euron kolikoita. Tällöin todennäköisyys sille, että toisena otettu kolikko on 2 euron kolikko, on $\frac{3}{7}$.

$P(\text{täsmälleen 2,50 euroa})$

$= P(1. \text{ kolikko on 2 € ja toinen 50 snt})$

$+ P(1. \text{ kolikko on 50 snt ja toinen 2 €})$

$= P(1. \text{ kolikko on 2 €}) \cdot P(\text{toisella 50 snt, kun 1. kolikko oli 2 €})$

$+ P(1. \text{ kolikko on 50 snt}) \cdot P(\text{toisella 2 €, kun 1. kolikko oli 50 snt})$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}$$

$$= \frac{15}{28}$$

$$= 0,535\dots$$

$$\approx 0,54$$

Täsmälleen parkkimaksuun tarvittava 2,50 euroa saadaan

todennäköisyydellä $\frac{15}{28} \approx 0,54$.

TAPA 2:

Saadaan täsmälleen 2,50 euroa, jos saadaan yksi kahden euron ja yksi 50 sentin kolikko.

Kahden euron kolikko voidaan valita kolmen samanlaisen kolikon joukosta $\binom{3}{1}$ tavalla.

50 sentin kolikko voidaan valita viiden samanlaisen kolikon joukosta $\binom{5}{1}$ tavalla.

Suotuisia kolikkoyhdistelmiä on tuloperiaatteen mukaan $\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1}$ kappaletta.

Kaksi kolikkoa voidaan valita kahdeksan kolikon joukosta $\binom{8}{2}$ eri tavalla.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28} = 0,535... \approx 0,54$.

Täsmälleen parkkimaksuun tarvittava 2,50 euroa saadaan todennäköisyydellä $\frac{15}{28} \approx 0,54$.

Vastaus: $\frac{15}{28} \approx 0,54$

- K14.** Kaikki valot toimivat, kun ensimmäinen valo toimii ja toinen valo toimii ja kolmas valo toimii ja niin edelleen.
Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
 &P(\text{kaikki valot toimivat}) \\
 &= \underbrace{0,995 \cdot 0,995 \cdot \dots \cdot 0,995}_{24 \text{ kpl}} \\
 &= 0,995^{24} \\
 &= 0,88665.. \\
 &= 88,665... \% \\
 &\approx 89 \%
 \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että kaikki valot toimivat, on 89 %.

Vastaus: 89 %

- K15.** Viljami voittaa ainakin yhden pelin, jos hän voittaa yhden pelin, kaksi peliä tai kolme peliä. Tämän todennäköisyys on helpompi laskea vastatapahtuman ”Viljami ei voita yhtään peliä” avulla kuin suoraan.

Todennäköisyys, että Viljami ei voita yksittäistä peliä on $1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Viljami voittaa ainakin yhden pelin}) \\
 &= 1 - P(\text{Viljami ei voita yhtään peliä}) \\
 &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\
 &= \frac{19}{27} \\
 &= 0,703... \\
 &\approx 0,70
 \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että Viljami voittaa ainakin yhden pelin, on 0,70.

Vastaus: $\frac{19}{27} \approx 0,70$

K16. Merkitään ryhmän tyttöjen määrä kirjaimella n .

Tällöin todennäköisyys sille, että ensimmäinen valittu opiskelija on tyttö,

on $\frac{n}{25}$. Jos ensimmäinen valittu opiskelija on tyttö, niin seuraava

opiskelija valitaan 24 opiskelijan joukosta, jossa on $n - 1$ tyttöä. Toinen

opiskelija on siis tyttö todennäköisyydellä $\frac{n-1}{24}$. Muodostetaan

todennäköisyyden avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä n .

$$\frac{n}{25} \cdot \frac{n-1}{24} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{n(n-1)}{25 \cdot 24} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{n^2 - n}{600} = \frac{7}{20}$$

$$20(n^2 - n) = 7 \cdot 600$$

$$20n^2 - 20n = 4200$$

$$20n^2 - 20n - 4200 = 0 \quad ||: 20$$

$$n^2 - n - 210 = 0$$

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-210)}}{2 \cdot 1}$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 840}}{2}$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{841}}{2}$$

$$n = \frac{1 \pm 29}{2}$$

$$n = \frac{1 + 29}{2} \text{ tai } n = \frac{1 - 29}{2}$$

$$n = 15 \text{ tai } n = -14$$

Lukumäärä ei voi olla negatiivinen, joten ryhmässä on 15 tyttöä.

Vastaus: 15 tyttöä

K17. a) Neljän henkilön toimikunta seitsemästä henkilöstä voidaan valita $\binom{7}{4} = 35$:llä tavalla.

Kaksi veljestä voidaan valita kahden veljeksen joukosta $\binom{2}{2}$ tavalla.

Loput kaksi henkilöä voidaan valita muiden viiden muun henkilön joukosta $\binom{5}{2}$ eri tavalla. Toimikunta, jossa molemmat veljekset ovat

mukana, voidaan siis valita $\binom{2}{2} \cdot \binom{5}{2} = 10$ tavalla.

Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{molemmat veljekset joutuvat toimikuntaan})$

$$= \frac{10}{35} = \frac{2}{7} = 0,285\dots \approx 0,29.$$

Molemmat veljekset joutuvat toimikuntaan todennäköisyydellä 0,29.

Vastaus: $\frac{2}{7} \approx 0,29$

b) Yksi veli voidaan valita kahden veljen joukosta $\binom{2}{1}$ tavalla. Loput

kolme henkilöä voidaan valita viiden muun henkilön joukosta $\binom{5}{3}$ eri tavalla. Toimikunta, jossa on vain toinen veljeksistä, voidaan siis valita $\binom{2}{1} \cdot \binom{5}{3} = 20$ tavalla.

Kysytty todennäköisyys on

$P(\text{toinen veljeksistä joutuu toimikuntaan})$

$$= \frac{20}{35} = \frac{4}{7} = 0,571\dots \approx 0,57.$$

Vain toinen veljeksistä joutuu toimikuntaan todennäköisyydellä 0,57.

Vastaus: $\frac{4}{7} \approx 0,57$

K18. a) Vapaa-aikaa vuorokaudesta on 6,3 tuntia eli

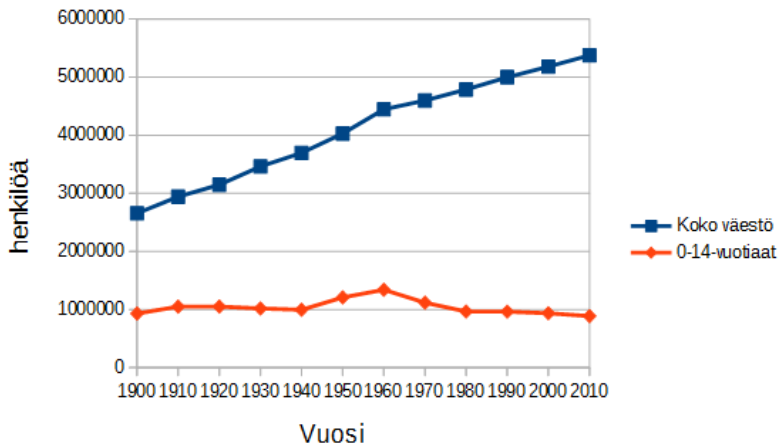
$$\frac{6,3 \text{ h}}{24 \text{ h}} = 0,2625 = 26,25 \% \approx 26 \% .$$

Vuorokaudesta on vapaa-aikaa 26 %.

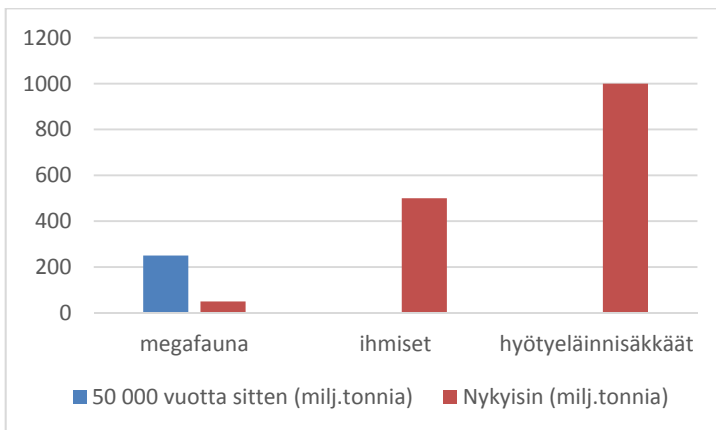
Vastaus: 26 %

b) Ansiotyöhön käytettävä aika voi näyttää pieneltä. Aikaa pienentää se, että kaikki 10–64-vuotiaat eivät tee töitä, eikä töitä yleensä tehdä joka päivä.

K19. Videossa <https://vimeo.com/228962209/00d855a41b> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista taulukkolaskentaohjelmalla.



K20. Piirretään pylväskaavio taulukkolaskentaohjelmalla.



K21. Lasketaan suhteelliset frekvenssit $f\%$, summafrekvenssit sf ja suhteelliset summafrekvenssit $sf\%$.

kruunien määrä	f	$f\%$	sf	$sf\%$
0	38	$\frac{38}{1000} = 3,8 \%$	38	3,8 %
1	144	$\frac{144}{1000} = 14,4 \%$	$38 + 144 = 182$	$\frac{182}{1000} = 18,2 \%$
2	342	$\frac{342}{1000} = 34,2 \%$	$182 + 342 = 524$	$\frac{524}{1000} = 52,4 \%$
3	287	$\frac{287}{1000} = 28,7 \%$	$524 + 287 = 811$	$\frac{811}{1000} = 81,1 \%$
4	164	$\frac{164}{1000} = 16,4 \%$	$811 + 164 = 975$	$\frac{975}{1000} = 97,5 \%$
5	25	$\frac{25}{1000} = 2,5 \%$	$975 + 25 = 1000$	100 %

Vastaus:

kruunien määrä	$f\%$	sf	$sf\%$
0	3,8 %	38	3,8 %
1	14,4 %	182	18,2 %
2	34,2 %	524	52,4 %
3	28,7 %	811	81,1 %
4	16,4 %	975	97,5 %
5	2,5 %	1000	100,0 %

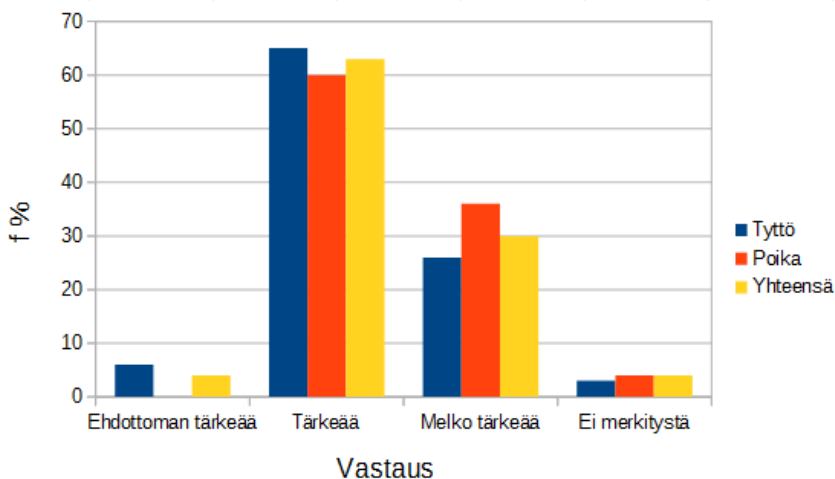
K22. Lasketaan ensin tyttöjen ja poikien vastausten määrät yhteen. Lasketaan lisäksi, kuinka monta kutakin vastausta on yhteensä.

Vastaus	Tyttö	Poika	Yhteensä
ehdottoman tärkeää	2	0	2
tärkeää	20	15	35
melko tärkeää	8	9	17
ei merkitystä	1	1	2
yhteensä	31	25	56

Määritetään suhteelliset frekvenssit.

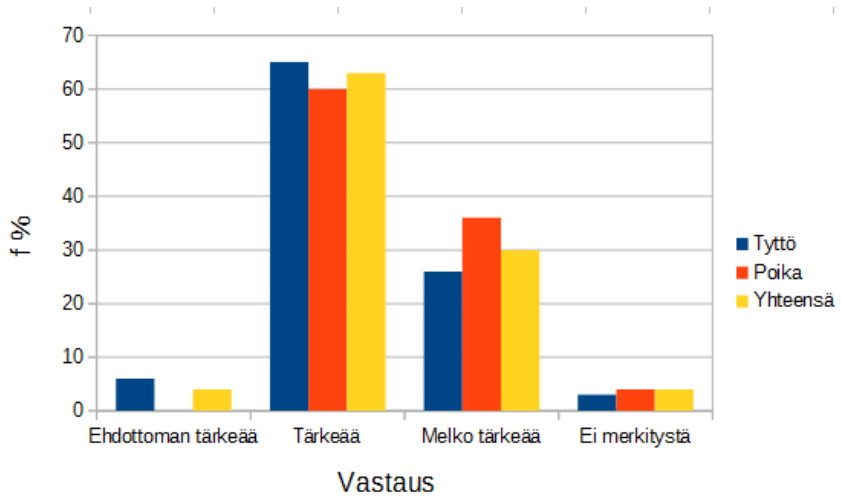
Vastaus	Tyttö	Poika	Yhteensä
ehdottoman tärkeää	$\frac{2}{31} \approx 6 \%$	$\frac{0}{25} = 0 \%$	$\frac{2}{56} \approx 4 \%$
tärkeää	$\frac{20}{31} \approx 65 \%$	$\frac{15}{25} = 60 \%$	$\frac{35}{56} \approx 63 \%$
melko tärkeää	$\frac{8}{31} \approx 26 \%$	$\frac{9}{25} = 36 \%$	$\frac{17}{56} \approx 30 \%$
ei merkitystä	$\frac{1}{31} \approx 3 \%$	$\frac{1}{25} = 4 \%$	$\frac{2}{56} \approx 4 \%$

Piirretään pylväskaavio sopivalla ohjelmalla.



Vastaus:

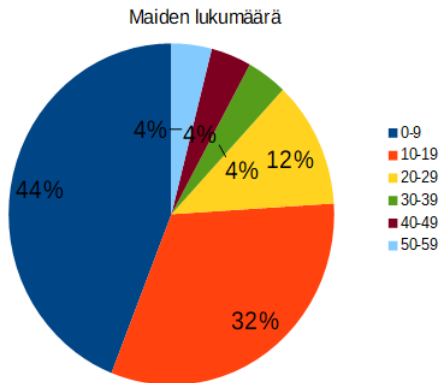
Vastaus	Tyttö	Poika	Yhteensä
ehdottoman tärkeää	6 %	0 %	4 %
tärkeää	65 %	60 %	63 %
melko tärkeää	26 %	36 %	30 %
ei merkitystä	3 %	4 %	4 %



- K23.** Videossa <https://vimeo.com/228962418/7f9f8a96d4> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista taulukkolaskentaohjelmalla.

Vastaus:

Maiden lukumäärä	f
0-9	11
10-19	8
20-29	3
30-39	1
40-49	1
50-59	1



- K24.** Järjestetään arvosanat ja määritetään mediaani.
Jonin arvosanat olivat 5, 6, 6, 7, 9 ja 9. Koska arvosanat 6 ja 7 ovat molemmat keskimmäisiä, mediaani on niiden keskiarvo. Siis

$$Md = \frac{6+7}{2} = 6,5.$$

Nikon arvosanat olivat 5, 6, 7, 7, 8 ja 8. Koska kaksi keskimmäistä arvosanaa ovat molemmat seiskoja, mediaani on $Md = 7$.

Jonin arvosanojen keskiarvo on

$$\bar{x} = \frac{5+6+6+7+9+9}{6} = \frac{42}{6} = 7.$$

Nikon arvosanojen keskiarvo on

$$\bar{x} = \frac{5+6+7+7+8+8}{6} = \frac{41}{6} = 6,833... \approx 6,8.$$

Vastaus: Joni: $Md = 6,5$, $\bar{x} = 7$, Niko: $Md = 7$, $\bar{x} \approx 6,8$

K25. Yhden maalin pelejä on eniten, joten moodi on $Mo = 1$.

Pelien lukumäärä on $5 + 19 + 17 + 17 + 16 + 5 + 3 = 82$.

Maalien määrän keskiarvo on

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{5 \cdot 0 + 19 \cdot 1 + 17 \cdot 2 + 17 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{82} \\ &= \frac{211}{82} \\ &= 2,573... \\ &\approx 2,6\end{aligned}$$

Vastaus: $Mo = 1$, $\bar{x} \approx 2,6$

K26. Videossa <https://vimeo.com/228962531/833046e27b> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista taulukkolaskentaohjelmalla.

Vastaus: $[53, 97]$, $Md = 75$, $Q_1 = 67,5$, $Q_3 = 82,5$, $\bar{x} \approx 75,3$, $s \approx 10,4$

K27. Videossa <https://vimeo.com/228962628/ea1504b7ec> näytetään, miten korrelaatiokerroin voidaan määrittää taulukkolaskentaohjelmalla.

Tyttären ja äidin pituuksilla on kohtalainen positiivinen korrelaatio. Tämä johtunee siitä, että pituus riippuu osittain perimästä, mutta ei pelkästään siitä. Lisäksi myös isän pituus vaikuttaa lapsen pituuteen.

Vastaus: $r \approx 0,49$