

HARJOITUSKOE

H1. a) Täydennetään taulukko.

Tulos	f	sf	$f\%$	$sf\%$
0–4	5	5	$\frac{5}{20} \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{4} = 25\%$	25 %
5–9	8	$5 + 8 = 13$	$\frac{8}{20} \stackrel{(4)}{=} \frac{2}{5} = 40\%$	$25\% + 40\% = 65\%$
10–14	4	$13 + 4 = 17$	$\frac{4}{20} \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{5} = 20\%$	$65\% + 20\% = 85\%$
15–19	2	$17 + 2 = 19$	$\frac{2}{20} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{10} = 10\%$	$85\% + 10\% = 95\%$
20–24	1	$19 + 1 = 20$	$\frac{1}{20} = 5\%$	100 %

Vastaus:

Tulos	f	sf	$f\%$	$sf\%$
0–4	5	5	25 %	25 %
5–9	8	13	40 %	65 %
10–14	4	17	20 %	85 %
15–19	2	19	10 %	95 %
20–24	1	20	5 %	100 %

- b)** Alle 10 leukaa vetäneet kuuluvat kahteen ensimmäiseen luokkaan, joiden osuus nähdään luokan 5-9 suhteellisen summafrekvenssin arvosta 65 %.

Vastaus: 65 %

- c)** Ainakin 5 mutta alle 20 leukaa vetäneet kuuluvat toiseen, kolmanteen ja neljänteen luokkaan, joiden yhteenlasketut suhteelliset frekvenssit ovat $40\% + 20\% + 10\% = 70\%$.

Vastaus: 70 %

- H2.** a) Elokuvia on yhteensä $2 + 3 = 5$. Ensimmäiselle elokuvalle on 5 vaihtoehtoa, toiselle 4 ja niin edelleen. Tuloperiaatteen mukaan järjestysten määrä on $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Ira voi katsoa elokuvat 120:ssä eri järjestyksessä.

Vastaus: 120 järjestyksessä

- b) Jos komediat katsotaan ensin, ensimmäiselle elokuvalle on 2 vaihtoehtoa ja toiselle 1. Kolmas elokuva on jännityselokuva, ja sille on 3 vaihtoehtoa. Neljännelle on 2 ja viimeiselle 1 vaihtoehto. Tuloperiaatteen mukaan järjestysten määrä on $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

Ira voi katsoa elokuvat 12:ssä eri järjestyksessä.

Vastaus: 12 järjestyksessä

- c) Ensimmäiselle elokuvalle on 5 vaihtoehtoa ja toiselle 4. Kahden elokuvan jonojen määrä on siis $5 \cdot 4 = 20$. Kaksi elokuvaa voivat kuitenkin olla kummassa tahansa järjestyksessä, joten kahden elokuvan jonojen määrässä on laskettu jokainen elokuvapari kahteen kertaan.

Elokuvapareja on siis $\frac{20}{2} = 10$.

Ira voi valita elokuvat 10:llä eri tavalla.

Vastaus: 10 tavalla

H3. Järjestetään aineistot suuruusjärjestykseen.

A 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4

B 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 5, 6

C 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5

Aineiston A moodi on $M_o = 1$, joten aineisto A ja tunnusluku II kuuluvat yhteen.

Aineiston B mediaani on lukujen 2 ja 4 keskiarvo eli $M_d = \frac{2+4}{2} = 3$.

Siis aineisto B ja tunnusluku III kuuluvat yhteen.

Aineiston C keskiarvo on $\bar{x} = \frac{1+1+2+2+2+3+4+5}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2,5$,
joten aineisto C ja tunnusluku I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: III ja C: I

- H4. a)** Todennäköisyys, että ensimmäinen lapsi on poika, on $\frac{1}{2}$, samoin todennäköisyys sille että toinen lapsi on poika ja todennäköisyys sille, että kolmas lapsi on poika. Kysytty todennäköisyys on kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{kaikki kolme ovat poikia}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Todennäköisyys sille, että kaikki lapset ovat poikia, on $\frac{1}{8} = 0,125$.

Vastaus: $\frac{1}{8} = 0,125$

- b)** Komplementtisäännön mukaan todennäköisyys sille, että perheessä on ainakin yksi tyttölapsi, on

$$\begin{aligned} P(\text{ainakin 1 tyttö}) &= 1 - P(\text{ei yhtään tyttöä}) \\ &= 1 - P(\text{kaikki kolme ovat poikia}) \\ &= 1 - \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{8} \\ &= 0,875. \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että perheessä on ainakin yksi tyttölapsi, on $\frac{7}{8} = 0,875$.

Vastaus: $\frac{7}{8} = 0,875$

- c) Perheessä on täsmälleen kaksi tyttölasta, jos tyttöjä ovat vain kaksi ensimmäistä, vain ensimmäinen ja kolmas tai vain toinen ja kolmas. Merkitään T = ”tyttö” ja P = ”poika”. Tällöin suotuisat tapahtumat ovat TTP , TPT JA PTT .

Kysytty todennäköisyys on yhteenlaskusäännön ja kertolaskusäännön mukaan

$$\begin{aligned}
 &P(\text{täsmälleen 2 tyttöä}) \\
 &= P(TTP) + P(TPT) + P(PTT) \\
 &= P(1. \text{ on tyttö}) \cdot P(2. \text{ on tyttö}) \cdot P(3. \text{ on poika}) \\
 &\quad + P(1. \text{ on tyttö}) \cdot P(3. \text{ on tyttö}) \cdot P(2. \text{ on poika}) \\
 &\quad + P(2. \text{ on tyttö}) \cdot P(3. \text{ on tyttö}) \cdot P(2. \text{ on poika}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
 &= \frac{3}{8} \\
 &= 0,375.
 \end{aligned}$$

Todennäköisyys sille, että perheessä on täsmälleen kaksi tyttölasta, on $\frac{3}{8} = 0,375$.

Vastaus: $\frac{3}{8} = 0,375$

H5. Lasketaan kunkin henkilön todennäköisyys saada lyhyt tikku.

$$P(\text{Ada saa lyhyen tikun}) = \frac{1}{4}$$

Elin saa lyhyen tikun, jos Ada vetää ensin jonkin kolmesta pitkästä tikusta ja sen jälkeen Elin vetää kolmesta jäljellä olevasta tikusta ainoan lyhyen.

$$\begin{aligned} &P(\text{Elin saa lyhyen tikun}) \\ &= P(\text{Ada saa pitkän ja Elin lyhyen tikun}) \\ &= P(\text{Ada saa pitkän}) \cdot P(\text{Elin saa lyhyen}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Joona saa lyhyen tikun, jos Ada vetää ensin jonkin kolmesta pitkästä tikusta, ja sen jälkeen Elin kolmesta jäljellä olevasta tikusta jommankumman pitkän, ja sen jälkeen Joona vetää kahdesta jäljellä olevasta tikusta ainoan lyhyen.

$$\begin{aligned} &P(\text{Joona saa lyhyen tikun}) \\ &= P(\text{Ada ja Elin saavat pitkän ja Joona lyhyen tikun}) \\ &= P(\text{Ada saa pitkän}) \cdot P(\text{Elin saa pitkän}) \cdot P(\text{Joona saa lyhyen}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Kasper saa lyhyen tikun, jos Ada vetää ensin jonkin kolmesta pitkästä tikusta, ja sen jälkeen Elin kolmesta jäljellä olevasta tikusta jommankumman pitkän, ja sen jälkeen Joona vetää kahdesta jäljellä olevasta tikusta ainoan pitkän, ja sen jälkeen Kasper vetää jäljellä olevan tikun.

$$\begin{aligned}
 &P(\text{Kasper saa lyhyen tikun}) \\
 &= P(\text{kolme muuta saavat pitkän ja Kasper lyhyen}) \\
 &= P(\text{Ada saa pitkän}) \cdot P(\text{Elin saa pitkän}) \\
 &\quad \cdot P(\text{Joona saa pitkän}) \cdot P(\text{Kasper saa lyhyen}) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

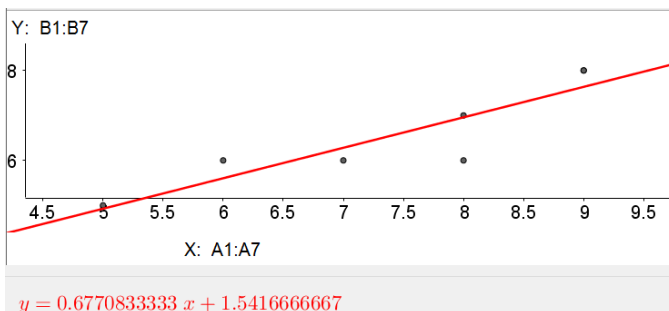
Vastaus: Kaikilla on yhtä suuri todennäköisyys.

H6. a) Kopioidaan luvut sopivaan ohjelmaan ja analysoidaan aineisto.

Tuomarin A antamien arvosanojen keskihajonta on $7,428\dots \approx 7,4$ ja tuomarin B antamien arvosanojen keskihajonta $6,571\dots \approx 6,6$.

Vastaus: A: $s \approx 7,4$ ja B: $s \approx 6,6$

KeskiarvoX	7.4285714286
KeskiarvoY	6.5714285714
Sx	1.511857892
Sy	1.133893419
r	0.9027777778
p	0.9337145191
Sxx	13.7142857143
VarianssiY	7.7142857143
Sxy	9.2857142857

b) Suoran yhtälö saadaan ohjelman avulla.

Ohjelma antaa suoran yhtälöksi $y = 0,6770\dots x + 1,5416\dots$ ja korrelaatiokertoimeksi $r = 0,902\dots \approx 0,90$.

Vastaus: $y = 0,68x + 1,54$; $r \approx 0,90$

c) Määritetään tuomarin B luultavasti antama arvosana ohjelman avulla.

$$y = 0.6770833333 x + 1.5416666667$$

Tarkka arvo: $x = 10$ $y = 8.3125$

Kun tuomari A antaa arvosanan 10, antaa tuomari B mallin mukaan arvosanan $8,3125 \approx 8$.

Vastaus: arvosanan 8

H7. a) $P(\text{varusmies sairastuu}) = \frac{5}{30\,000} = 0,000166... \approx 0,00017 = 0,017 \%$

Satunnainen varusmies sairastuu aivokalvontulehdukseen todennäköisyydellä 0,017 %.

Vastaus: 0,017 %

b) $P(\text{muu kuin varusmies sairastuu})$

$$\begin{aligned} &= \frac{50 - 5}{5\,500\,000 - 30\,000} \\ &= \frac{45}{5\,470\,000} \\ &= 0,000\,008\,226... \end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka moninkertainen varusmiesten sairastumisriski on tähän verrattuna

$$\frac{0,000166...}{0,000\,008\,226...} = 20,259...$$

Varusmiehen sairastumisriski on muuhun väestöön nähden $20,259... \approx 20$ -kertainen.

Vastaus: n. 20-kertainen

- H8.** Kyseessä on geometrinen todennäköisyys, jossa mittana on tilavuus. Piste on lähempänä pallon pintaa kuin sen keskipistettä, jos piste ei ole pallon sisällä olevan samankeskisen pienemmän pallon sisällä. Merkitään pienemmän pallon sädettä kirjaimella a . Tällöin ison pallon säde on $2a$.

Koko pallon tilavuus on

$$\frac{4\pi \cdot (2a)^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 2^3 a^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 8a^3}{3} = \frac{32\pi a^3}{3}$$

Sisällä olevan pienemmän pallon

$$\text{tilavuus on } \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Lasketaan suotuisa tilavuus eli ison ja pienen pallon tilavuuksien erotus.

$$\frac{32\pi a^3}{3} - \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{28\pi a^3}{3}.$$

Kysytty todennäköisyys on

P (piste on lähempänä pallon pintaa kuin keskipistettä)

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{28\pi a^3}{3}}{\frac{32\pi r^3}{3}} \\ &= \frac{28\pi r^3}{3} \cdot \frac{32\pi r^3}{3} \\ &= \frac{28\pi r^3}{3} \cdot \frac{3}{32\pi r^3} \\ &= \frac{28}{32} \\ &= \frac{7}{8} \\ &= 0,875 \\ &\approx 0,88. \end{aligned}$$

Piste on lähempänä pallon pintaa kuin keskipistettä todennäköisyydellä

$$\frac{7}{8} \approx 0,88.$$

$$\text{Vastaus: } \frac{7}{8} \approx 0,88$$

