

180. Laske pisteen $(4, 3)$ etäisyys suorasta

E1 a) $6x + 8y + 11 = 0$

b) $-7x + 24y - 61 = 0$.

184. Mikä on pisteen $(7, 2)$ etäisyys suorasta, joka kulkee pisteiden $(-1, 3)$ ja $(4, -5)$ kautta?

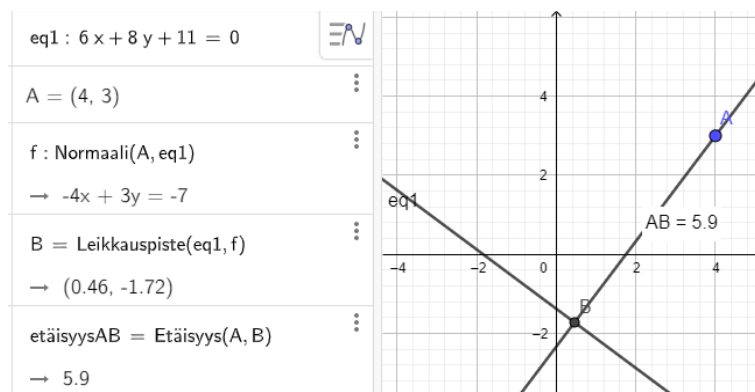
180

a) Suoran yhtälö $6x + 8y + 11 = 0$ on yleisessä muodossa, joten

voidaan käyttää etäisyyden kaavaa $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Sijoitetaan kertoimet $a = 6$, $b = 8$ ja $c = 11$ sekä pisteen $(4, 3)$ koordinaatit $x_0 = 4$ ja $y_0 = 3$.

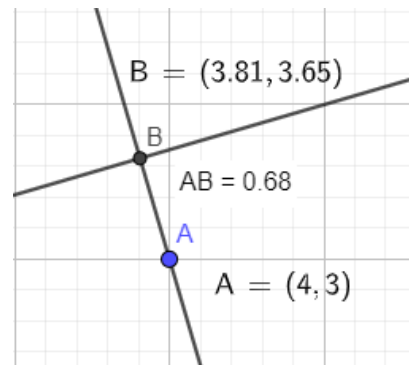
$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|6 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 11|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \\ &= \frac{59}{10} \\ &= 5 \frac{9}{10} \end{aligned}$$



- b) Suoran yhtälö $-7x + 24y - 61 = 0$ on yleisessä muodossa, joten voidaan käyttää etäisyyden kaavaa $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Sijoitetaan kertoimet $a = -7$, $b = 24$ ja $c = -61$ sekä pisteen $(4, 3)$ koordinaatit $x_0 = 4$ ja $y_0 = 3$.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|-7 \cdot 4 + 24 \cdot 3 - 61|}{\sqrt{(-7)^2 + 24^2}} \quad \text{Käytetään laskinta.} \\ &= \frac{17}{25} \end{aligned}$$



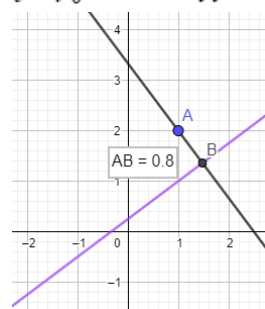
181 Esimerkki

Muokataan suoran $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ yhtälö yleiseen muotoon, jotta voidaan käyttää etäisyyden kaavaa $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \quad | \cdot 4 \\ 4y &= 3x + 1 \\ 3x - 4y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

- a) Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = -4$ ja $c = 1$ sekä pisteen $(1, 2)$ koordinaatit $x_0 = 1$ ja $y_0 = 2$ etäisyyden kaavaan.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

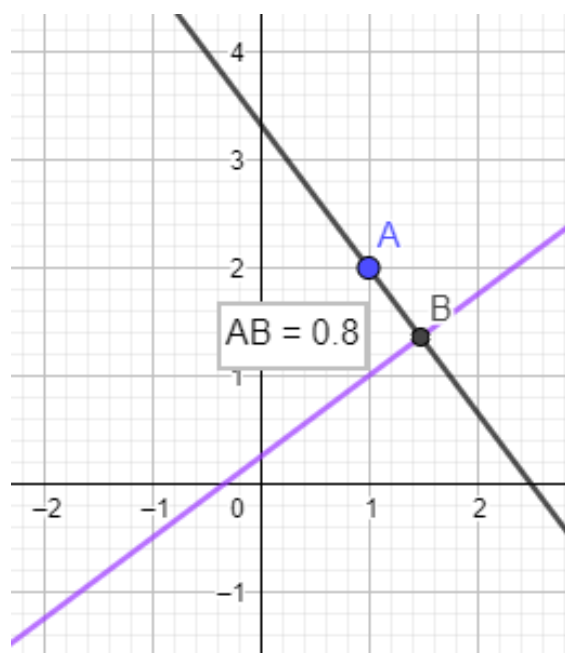


OHJE:

- Suora yleiseen muotoon
- poimi kertoimet huolellisesti a, b ja c
- sijoita x_0 ja y_0 kaavaan

- muista $||$ -viivat

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



184

Lasketaan pisteiden $(-1, 3)$ ja $(4, -5)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{-5 - 3}{4 - (-1)} = -\frac{8}{5}$$

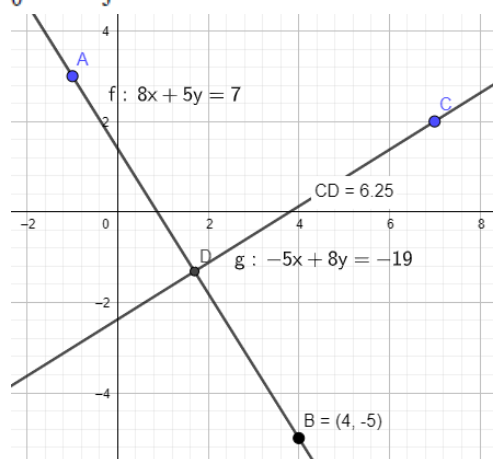
Sijoitetaan kulmakerroin ja pisteen $(-1, 3)$ koordinaatit $x_0 = -1$ ja $y_0 = 3$ suoran yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 3 = -\frac{8}{5}(x - (-1)) \quad | \cdot 5$$

$$5y - 15 = -8x - 8$$

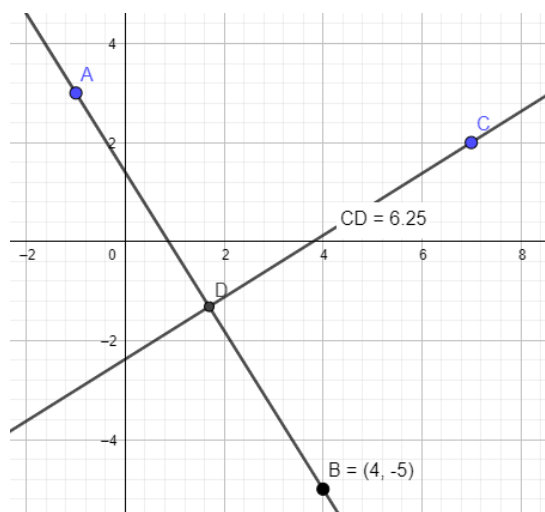
$$8x + 5y - 7 = 0$$



Lasketaan pisteen $(7, 2)$ etäisyys suorasta $8x + 5y - 7 = 0$

etäisyyden kaavalla $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Sijoitetaan kertoimet $a = 8$, $b = 5$ ja $c = -7$ sekä pisteen koordinaatit $x_0 = 7$ ja $y_0 = 2$.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|8 \cdot 7 + 5 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{8^2 + 5^2}} \\ &= \frac{\sqrt{89} \cdot 59}{\sqrt{89}} \\ &= \frac{59\sqrt{89}}{\sqrt{89}\sqrt{89}} \\ &= \frac{59\sqrt{89}}{89} \end{aligned}$$



185

Muodostetaan lauseke pisteen $(1, 4)$ etäisyydelle suorasta $3x + 4y + k = 0$.

$$d_1 = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|19 + k|}{5}$$

Muodostetaan lauseke pisteen $(1, 4)$ etäisyydelle suorasta $-12x + 9y - 11 = 0$.

$$d_1 = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-12 \cdot 1 + 9 \cdot 4 - 11|}{\sqrt{(-12)^2 + 9^2}} = \frac{13}{15}$$

Etäisyydet ovat yhtä suuret. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

185.

$$d_1 = d_2$$

$$\frac{|19+k|}{5} = \frac{13}{15}$$

$$|19+k| = \frac{13}{3}$$

$$19+k = \frac{13}{3}$$

$$k = -\frac{44}{3}$$

tai

$$19+k = -\frac{13}{3}$$

$$k = -\frac{70}{3}$$

Yhtälö voidaan ratkaista laskimella.

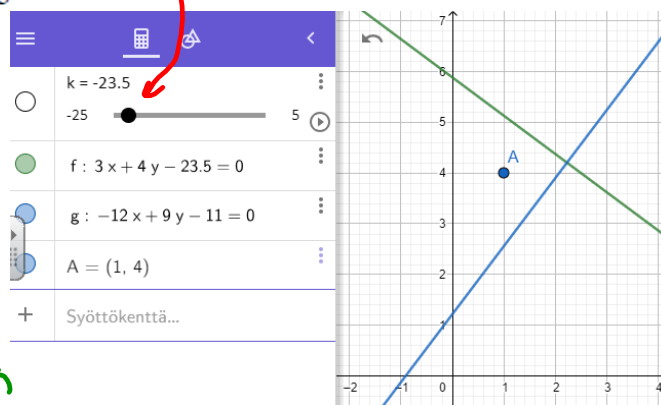
$$|f(x)| = a$$

$$f(x) = a \text{ tai } f(x) = -a$$

kuvan ratkaisun summiin piirtein

Geogebra:

- syötä suorat
- luo linkki kytin
- säädä arvot
- liikuta linkkia



187

Etsityn suoran jokaisen pisteen (x, y) etäisyys suorasta
 $6x - 3y + 4 = 0$ on $\sqrt{5}$. Muodostetaan etäisyyden yhtälö ja sijoitetaan $a = 6$, $b = -3$, $c = 4$, $x_0 = x$, $y_0 = y$ ja $d = \sqrt{5}$.

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = d$$

$$\frac{|6x - 3y + 4|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|6x - 3y + 4|}{\sqrt{45}} = \sqrt{5} \quad | \cdot \sqrt{45}$$

$$|6x - 3y + 4| = 15$$

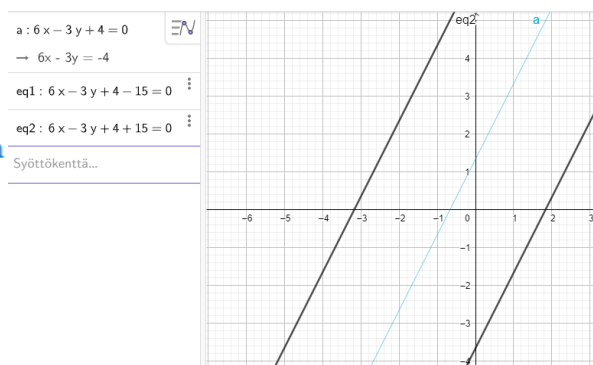
$$6x - 3y + 4 = 15 \text{ tai}$$

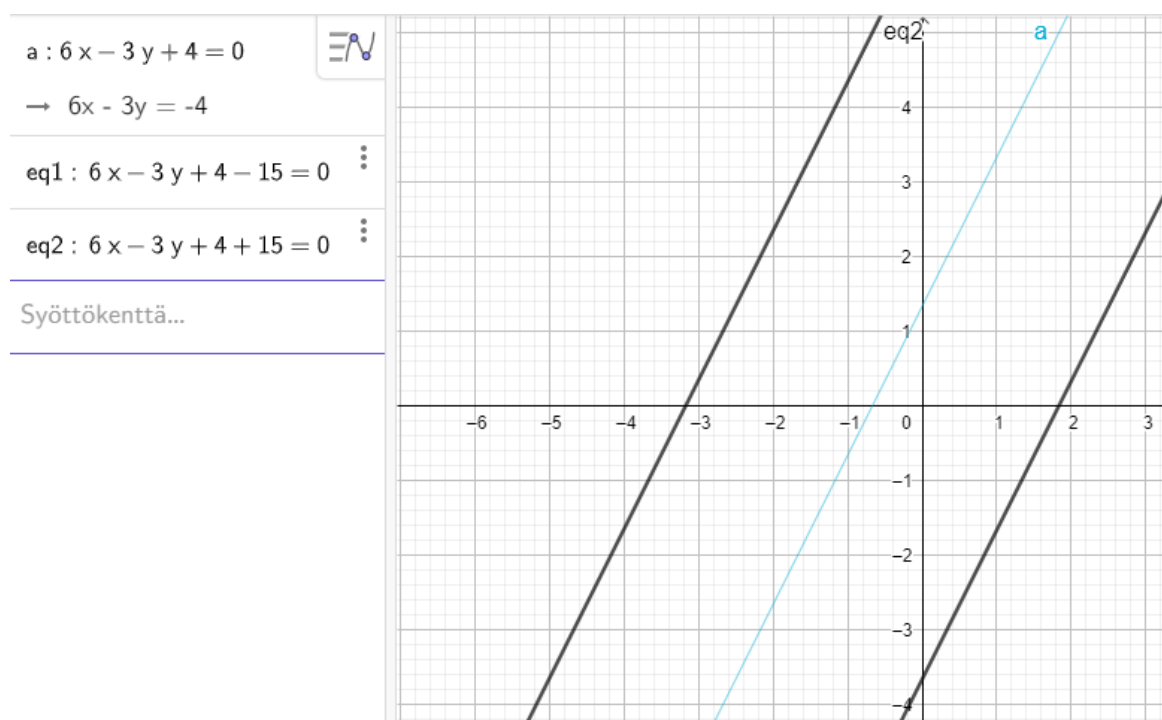
$$6x - 3y - 11 = 0$$

$$6x - 3y + 4 = -15$$

$$6x - 3y + 19 = 0$$

Sievennetään suoran





189

Kulmanpuolittajan jokainen piste (x, y) on yhtä kaukana kummastakin suorasta. Muodostetaan lausekkeet pisteen (x, y) etäisyyksille annetuista suorista.

Etäisyys suorasta $2x - y - 1 = 0$ on

$$d_1 = \frac{|2 \cdot x - 1 \cdot y - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{5}}$$

Etäisyys suorasta $4x + 2y + 1 = 0$ on

$$d_2 = \frac{|4 \cdot x + 2 \cdot y + 1|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{|4x + 2y + 1|}{2\sqrt{5}}$$

Etäisyyksien tulee olla yhtä suuret.

Muodostetaan etäisyyksistä yhtälö ja sievennetään se suoran yhtälöksi.

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 \\ \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{5}} &= \frac{|4x + 2y + 1|}{2\sqrt{5}} \quad | \cdot 2\sqrt{5} \\ 2|2x - y - 1| &= |4x + 2y + 1| \\ |2(2x - y - 1)| &= |4x + 2y + 1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(2x - y - 1) &= 4x + 2y + 1 \quad \text{tai} \quad 2(2x - y - 1) = -(4x + 2y + 1) \\ 4x - 2y - 2 &= 4x + 2y + 1 & 4x - 2y - 2 &= -4x - 2y - 1 \\ -4y &= 3 & 8x &= 1 \\ y &= -\frac{3}{4} & x &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

191

Suorat ovat yhdensuuntaiset, jolloin niiden välinen etäisyys on kaikkialla sama.

Valitaan suoralta $4x - 3y + 5 = 0$ jokin piste sijoittamalla esimerkiksi $x = 0$ yhtälöön.

$$4 \cdot 0 - 3y + 5 = 0$$

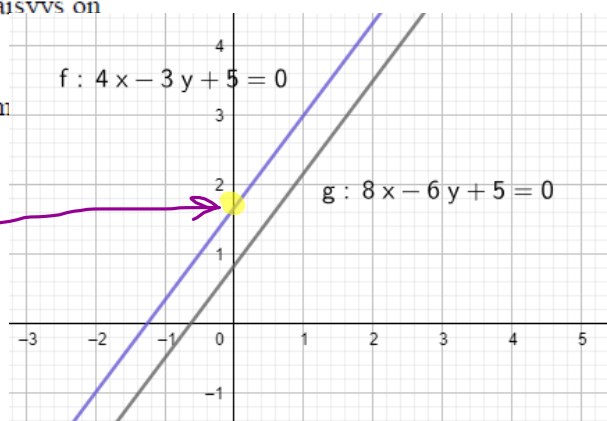
$$3y = 5$$

$$y = \frac{5}{3}$$

Siis $(0, \frac{5}{3})$ on suoran $4x - 3y + 5 = 0$ piste.

Lasketaan pisteen $(0, \frac{5}{3})$ etäisyys suorasta $8x - 6y + 5 = 0$.

$$d = \frac{|8 \cdot 0 - 6 \cdot \frac{5}{3} + 5|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$



196

Suora $8x - 3y - 18k = 0$ on yleisessä muodossa, joten voidaan

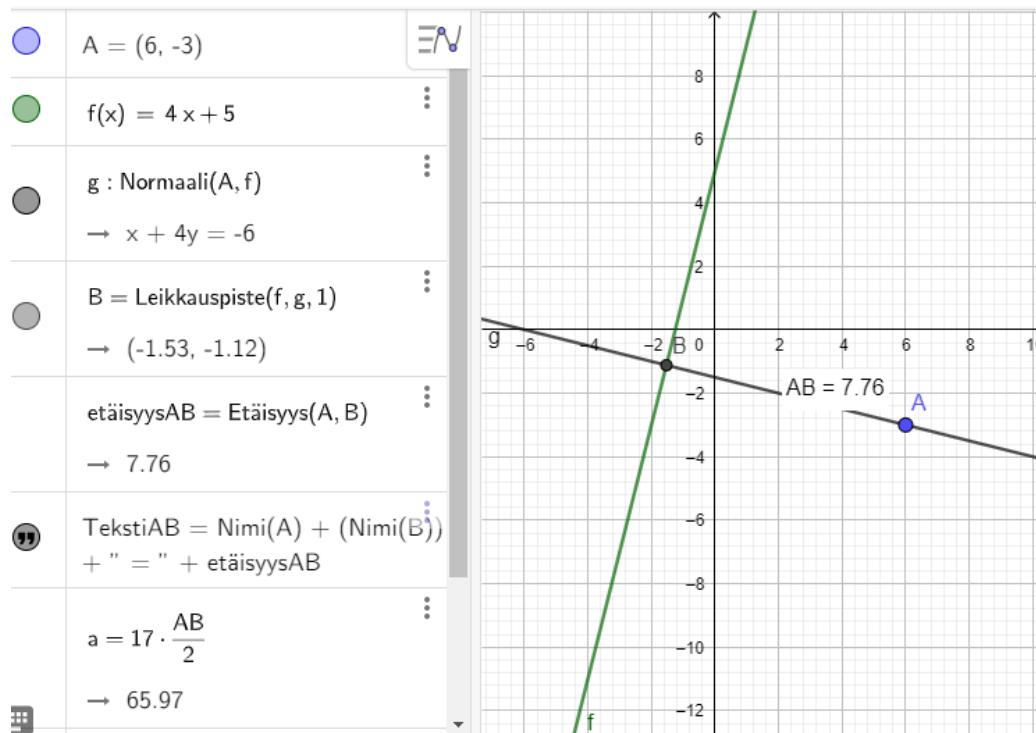
käyttää etäisyyden kaavaa $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Sijoitetaan kertoimet $a = 8$, $b = -3$ ja $c = -18k$ sekä pisteen $(-1, -6k)$ koordinaatit $x_0 = -1$ ja $y_0 = -6k$.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|8 \cdot (-1) - 3 \cdot (-6k) - 18k|}{\sqrt{8^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{|-8 + 18k - 18k|}{\sqrt{64 + 9}} \\ &= \frac{|-8|}{\sqrt{73}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{73}} \end{aligned}$$

Osoitettiin, että pisteen $(-1, -6k)$ etäisyys $d = \frac{8}{\sqrt{73}}$ ($= \frac{8\sqrt{73}}{73}$) suorasta $8x - 3y - 18k = 0$ ei riipu vakion k arvosta.

197.



203

Merkitään suoran $3x - y = 0$ pisteitä (x, y) . Muokataan suoran yhtälö ratkaistun muotoon.

$$3x - y = 0$$

$$y = 3x$$

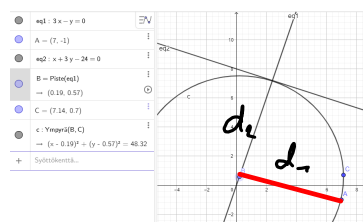
Suoran pisteet ovat siis muotoa $(x, 3x)$.

Määritetään pisteiden $(7, -1)$ ja $(x, 3x)$ välinen etäisyys.

$$d_1 = \sqrt{(x-7)^2 + (3x-(-1))^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (3x+1)^2}$$

Määritetään pisteen $(x, 3x)$ etäisyys suorasta $x + 3y - 24 = 0$.

$$d_2 = \frac{|1 \cdot x + 3 \cdot 3x - 24|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|10x - 24|}{\sqrt{10}}$$



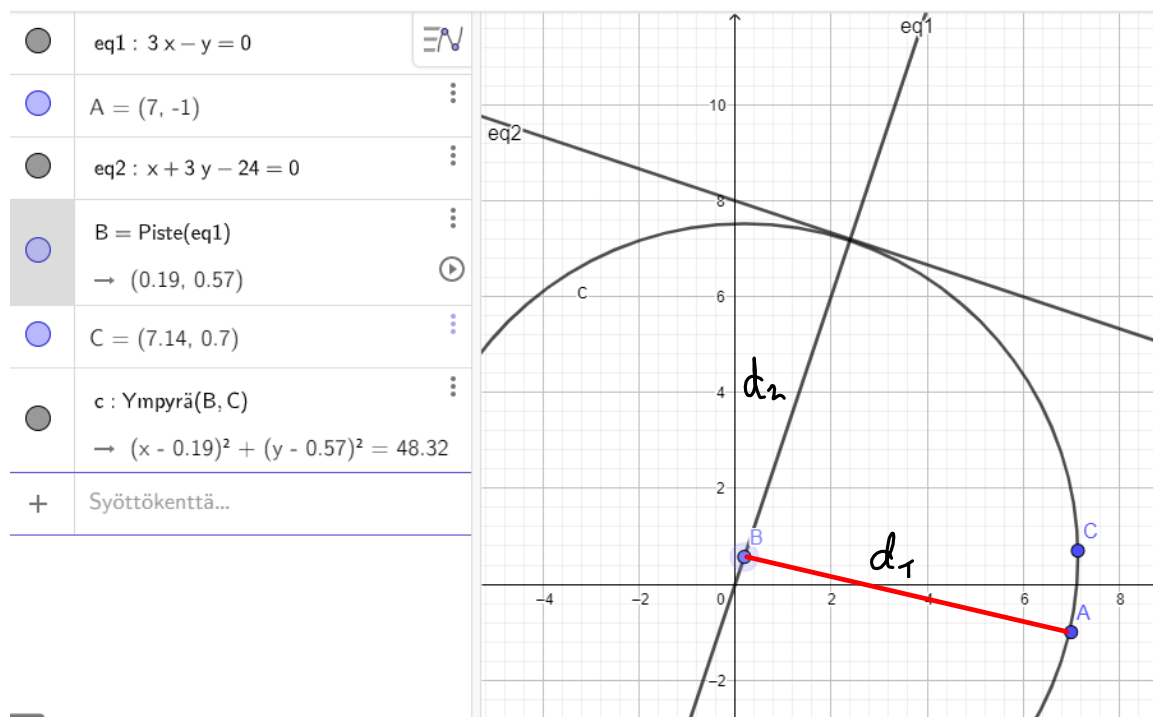
Ohje:

Piirrä suora ja piste

Aseta ympyrän
keskipiste suoralle
ja siirrä

keskipistettä ja
kehäpistettä niin,
että saat ympyrän
säteen

kohtisuoraan
pistettä A ja toista
suoraa kohti.



Etäisyydet ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan pisteen $(x, 3x)$ koordinaatit.

$$d_1 = d_2$$

$$\sqrt{(x-7)^2 + (3x+1)^2} = \frac{|10x-24|}{\sqrt{10}}$$

$$x = \frac{19}{100}$$

Solve (yhtälö, x)

Ratkaistaan laskimella.

Ratkaistaan vielä pisteen y -koordinaatti.

$$3x = 3 \cdot \frac{19}{100} = \frac{57}{100}$$

Siis $(x, 3x) = (\frac{19}{100}, \frac{57}{100})$. Tämä suoran $3x - y = 0$ piste on yhtä kaukana pisteestä $(7, -1)$ ja suorasta $x + 3y - 24 = 0$.

