t. 444, s. 140

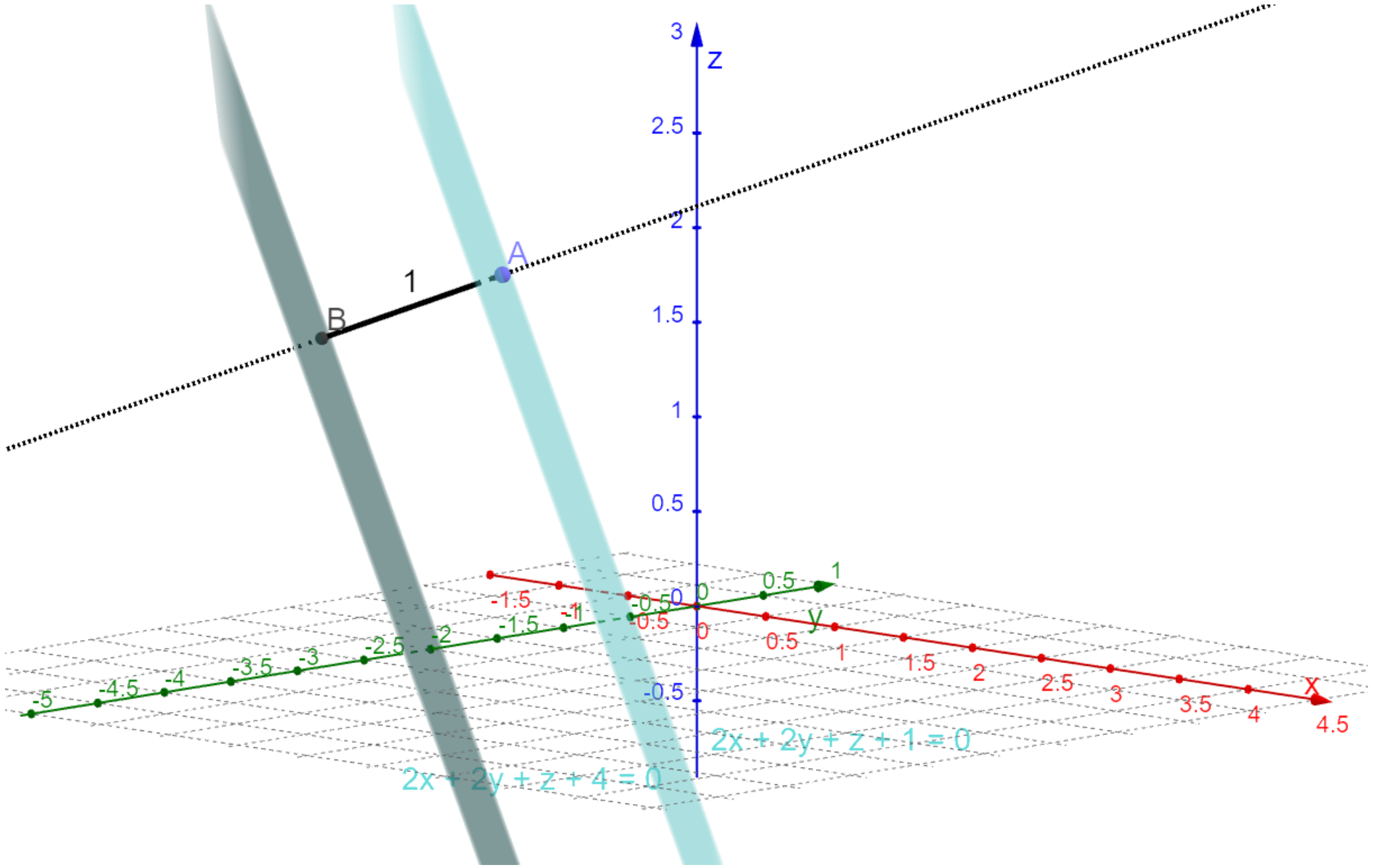
a) Piirretään tasot 3D-grafiikka-tilassa (kirjoittamalla tasojen yhtälöt syöttökenttään).

Otetaan jokin piste (A) kummalta tahansa tasolta ja piirretään tähän kohtaan tasolle normaali.

Määritetään normaalin leikkauspiste (B) toisen tason kanssa.

Määritetään janan AB pituus.

GeoGebran perusteella janan AB pituus eli tasojen välimatka on (valitusta pisteestä A riippumatta) yksi: $|\overline{AB}| = 1$.



b) Tasot ovat yhdensuuntaisia, sillä niillä on sama normaalivektori $\bar{n} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}$.

Valitaan jokin piste toiselta tasolta.

Sijoitetaan esimerkiksi $x = 0$ ja $y = 0$ yhtälöön $2x + 2y + z + 1 = 0$.

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + z + 1 = 0$$
$$z = -1$$

Siis eräs tason $2x + 2y + z + 1 = 0$ piste (z −akselin leikkauspiste) on $A = (0, 0, -1)$.

Tästä pisteestä piirretyn normaalin yhtälö on

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

Ratkaistaan tämän normaalin ja tason $2x + 2y + z + 4 = 0$ leikkauspiste (sijoittamalla suoran yhtälön parametrimuotoiset lausekkeet tason yhtälöön).

$$2 \cdot 2t + 2 \cdot 2t - 1 + t + 4 = 0$$
$$9t + 3 = 0$$
$$t = -\frac{1}{3}$$

Sijoitetaan $t = -\frac{1}{3}$ normaalin yhtälöön:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \\ y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \\ z = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Normaali leikkaa toisen tason siis pisteessä $B = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

Muodostetaan vektori $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \left(-\frac{2}{3} - 0\right)\bar{\imath} + \left(-\frac{2}{3} - 0\right)\bar{\jmath} + \left(-\frac{4}{3} - (-1)\right)\bar{k} = -\frac{2}{3}\bar{\imath} - \frac{2}{3}\bar{\jmath} - \frac{1}{3}\bar{k}$$

Kysytty etäisyys on vektorin $\overline{AB}$ pituus:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = 1$$