

Galtonin laudan analyysi klassisen todennäköisyyden keinoin

Tiettyyn astiaan putoavien pallojen määrä voidaan ennustaa klassisen todennäköisyyden periaatteella. Pallo voi kulkea lukuisia reittejä pitkin ja osa niistä johtaa valittuun astiaan. Jaetaan astiaan johtavien reittien lukumäärä kaikkien mahdollisten reittien lukumäärällä.

Astiaan johtavien reittien lukumäärä lasketaan osajoukkona, jossa on täsmälleen oikea määrä liikahtuksia vasemmalle, k . Oikealle johtavien liikahtusten määrä seuraa edellisestä, $n-k$.

Osajoukkojen eli sopivien reittien määrä lasketaan kaavalla $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Kaikkien reittien lukumäärä lasketaan potenssilaskuna, jossa kaksi vaihtoehtoa toistuu eksponentin osoittamalla tavalla. 2^n

Esimerkki. Nauloja on kymmenessä rivissä, $n=10$. Lasketaan todennäköisyys, että pallo putoaa keskimmäiseen lokeroon. Silloin pallo liikahtaa vasemmalle viisi kertaa, $k=5$ ja oikealle $n-k=10-5=5$ kertaa.

Todennäköisyys, että pallo putoaa keskelle, on:

$$P(\text{pallo putoaa keskelle}) = \frac{10!}{5!(10-5)!} : 2^{10} = 0,24609 \dots \approx 25 \%$$

Näin ollen voidaan ennustaa, että 100 000 pallosta keskelle tuloso putoamaan noin 24 600 kpl.

Todennäköisyyslaskun tulos vastaa varsin hyvin ohjelmointisimulaation tuloksia. Simulaation tulos kuitenkin muuttuu hieman joka kerta, kun simulaatio suoritetaan uudestaan. Simulaatio on sitä luotettavampi estimaatti todennäköisyydelle, mitä suuremman lukumäärän pallon pudotuksia se arpoo.