

49

- a) Sijoitetaan luku $x = 1$ epäyhtälöön.

$$|2 \cdot 1 - 5| > 1$$

$$|2 - 5| > 1$$

$$|-3| > 1$$

$$3 > 1 \text{ tosi}$$

- b) Sijoitetaan luku $x = 1$ epäyhtälöön.

$$|1 - 3 \cdot 1| < 2$$

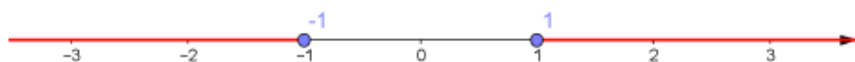
$$|1 - 3| < 2$$

$$|-2| < 2$$

$$2 < 2 \text{ epätosi}$$

50

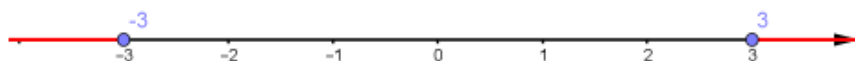
- a) Luvut, joiden itseisarvo on suurempi kuin yksi, sijaitsevat lukusuoralla joko luvun -1 vasemmalla puolella tai luvun 1 oikealla puolella.



$$|x| > 1$$

$$x < -1 \text{ tai } x > 1$$

- b) Luvut, joiden itseisarvo on suurempi kuin kolme, sijaitsevat lukusuoralla joko luvun -3 vasemmalla puolella tai luvun 3 oikealla puolella.



$$|x - 2| > 3$$

$$x - 2 < -3 \text{ tai } x - 2 > 3$$

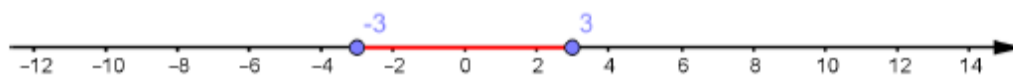
$$x < -1 \quad x > 5$$

55

55. Ratkaise epäyhtälö.

a) $|5 - x| < 3$ **b)** $2|3x - 1| - 4 < -2$

- a) Luvut, joiden itseisarvo on pienempi kuin 3, sijaitsevat lukusuoralla lukujen -3 ja 3 välissä.



$$|5 - x| < 3$$

$$-3 < 5 - x < 3$$

$$-3 < 5 - x \text{ ja } 5 - x < 3$$

$$-8 < -x \qquad -x < -2$$

$$8 > x \qquad x > 2$$

$$x < 8$$

Siis $2 < x < 8$.

55. b) Muokataan epäyhtälöä.

55. Ratkaise epäyhtälö.

a) $|5 - x| < 3$ **b)** $2|3x - 1| - 4 < -2$

$$2|3x - 1| - 4 < -2$$

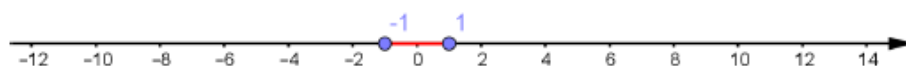
$$2|3x - 1| < 2$$

$$|3x - 1| < 1$$

$$|f(x)| < a$$

kaksios epäyhtälö
 $-a < f(x) < a$

Luvut, joiden itseisarvo on pienempi kuin 1, sijaitsevat lukusuoralla lukujen -1 ja 1 välissä.



$$-1 < 3x - 1 \text{ ja } 3x - 1 < 1$$

$$0 < 3x \qquad 3x < 2$$

$$0 < x \qquad x < \frac{2}{3}$$

$$x > 0$$

Siis $0 < x < \frac{2}{3}$.

56

56. Ratkaise epäyhtälö.

a) Korotetaan epäyhtälön molemmat puolet toiseen.

E3 a) $|x - 4| > |5x|$ b) $|2x - 1| \leq |x|$

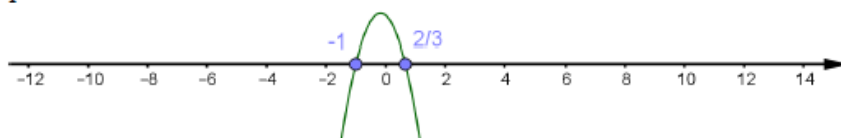
$$\begin{aligned}
 |x - 4| &> |5x| \\
 (x - 4)^2 &> (5x)^2 \\
 x^2 - 8x + 16 &> 25x^2 \\
 -24x^2 - 8x + 16 &> 0
 \end{aligned}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ratkaistaan funktion $-24x^2 - 8x + 16$ nollakohdat.

$$-24x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = -1 \text{ tai } x = \frac{2}{3}$$

Funktion $-24x^2 - 8x + 16$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.Epäyhtälö $-24x^2 - 8x + 16 > 0$ toteutuu, kun $-1 < x < \frac{2}{3}$.

57

57. Ilmaise ehto epäyhtälönä ja ratkaise epäyhtälö. Luvun x etäisyys lukusuoralla luvusta -5 on suurempi kuin 3 .

$$|x - (-5)| > 3$$

$$|x + 5| > 3$$

Luvut, joiden itseisarvo on suurempi kuin kolme, sijaitsevat lukusuoralla joko luvun -3 vasemmalla puolella tai luvun 3 oikealla puolella.

$$x + 5 < -3 \text{ tai } x + 5 > 3$$

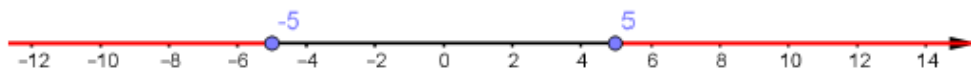
$$x < -8 \quad \quad \quad x > -2$$

60

60. Ratkaise epäyhtälö.

a) $|2x - 5| > 5$ b) $|7 - 3x| \leq 4$

- a) Luvut, joiden itseisarvo on suurempi kuin 5, sijaitsevat lukusuoralla joko luvun -5 vasemmalla puolella tai luvun 5 oikealla puolella.



$$|2x - 5| > 5$$

$$2x - 5 < -5 \quad \text{tai} \quad 2x - 5 > 5$$

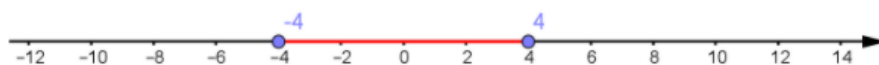
$$2x < 0 \qquad 2x > 10$$

$$x < 0 \qquad x > 5$$

60. Ratkaise epäyhtälö.

a) $|2x - 5| > 5$ b) $|7 - 3x| \leq 4$

- b) Luvut, joiden itseisarvo on pienempi tai yhtä suuri kuin 4, sijaitsevat lukusuoralla lukujen -4 ja 4 välissä päätepisteet mukaan luettuina.



$$|7 - 3x| \leq 4$$

$$-4 \leq 7 - 3x \leq 4$$

$$-4 \leq 7 - 3x \quad \text{ja} \quad 7 - 3x \leq 4$$

$$-11 \leq -3x \qquad -3x \leq -3$$

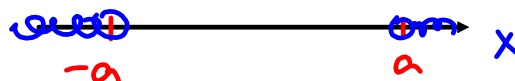
$$\frac{-11}{-3} \geq x \qquad x \geq \frac{-3}{-3}$$

$$x \leq \frac{11}{3} \qquad x \geq 1$$

$$\text{Siis } 1 \leq x \leq \frac{11}{3}.$$

65

$$|f(x)| > a$$



a) $|x^2 - 3x - 2| > 2$

$$x^2 - 3x - 2 < -2 \quad \text{tai} \quad x^2 - 3x - 2 > 2$$

$$x^2 - 3x < 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 3x - 4 > 0$$

65. Ratkaise epäyhtälö.

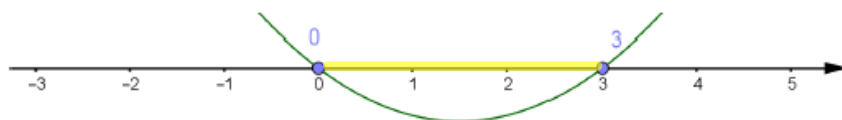
a) $|x^2 - 3x - 2| > 2$ b) $|x^2 - 5x| < 6$

1) Ratkaistaan funktion $x^2 - 3x$ nollakohdat.

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Funktion $x^2 - 3x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



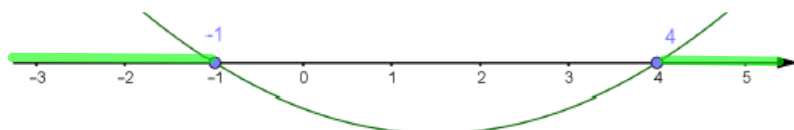
Epäyhtälö $x^2 - 3x < 0$ toteutuu, kun $0 < x < 3$.

2) Ratkaistaan funktion $x^2 - 3x - 4$ nollakohdat.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Funktion $x^2 - 3x - 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



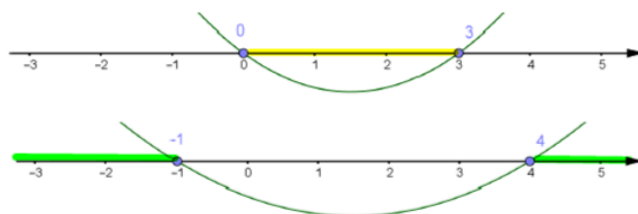
Epäyhtälö $x^2 - 3x - 4 > 0$ toteutuu, kun $x < -1$ tai $x > 4$.

3) Kun yhdistetään ratkaisut

$$0 < x < 3 \quad \text{tai} \quad x < -1 \quad \text{tai} \quad x > 4,$$

saadaan

$$x < -1 \quad \text{tai} \quad 0 < x < 3 \quad \text{tai} \quad x > 4.$$



b)

$$|x^2 - 5x| < 6$$

$$-6 < x^2 - 5x < 6$$

$$-6 < x^2 - 5x \quad \text{tai} \quad x^2 - 5x < 6$$

$$0 < x^2 - 5x + 6 \quad x^2 - 5x - 6 < 0$$

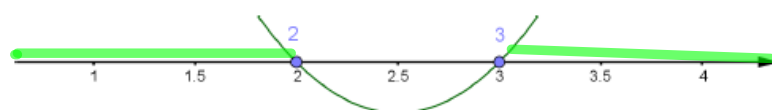
65. Ratkaise epäyhtälö.

$$\text{a) } |x^2 - 3x - 2| > 2 \quad \text{b) } |x^2 - 5x| < 6$$

1) Ratkaistaan funktion $x^2 - 5x + 6$ nollakohdat.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Funktion $x^2 - 5x + 6$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.Epäyhtälö $x^2 - 5x + 6 > 0$ toteutuu, kun $x < 2$ tai $x > 3$.2) Ratkaistaan funktion $x^2 - 5x - 6$ nollakohdat.

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 6$$

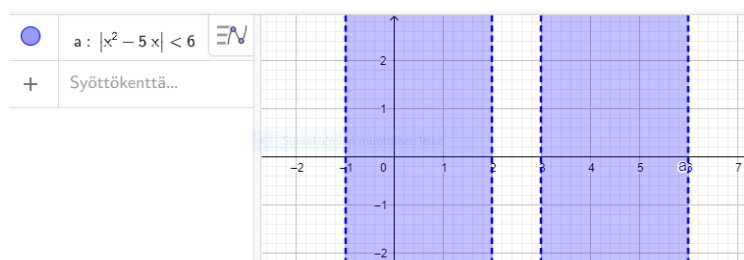
Funktion $x^2 - 5x - 6$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.Epäyhtälö $x^2 - 5x - 6 < 0$ toteutuu, kun $-1 < x < 6$.

3) Kun yhdistetään ratkaisut

$$x < 2 \quad \text{tai} \quad x > 3 \quad \text{ja} \quad -1 < x < 6$$

saadaan

$$-1 < x < 2 \quad \text{tai} \quad 3 < x < 6.$$



66

66. Määritä luvut, joiden etäisyys lukusuoralla luvusta 4 on pienempi kuin 5 ja suurempi kuin 2.

Merkitään lukua muuttujalla x .

$$\begin{aligned} |x-4| < 5 & \quad |x-4| > 2 \\ -5 < x-4 < 5 & \text{ ja } x-4 < -2 \text{ tai } x-4 > 2 \\ -1 < x < 9 & \quad x < 2 \quad \quad x > 6 \end{aligned}$$

Ratkaisu on lukusuoran välit, joilla kaikki epäyhtälöt toteutuvat.

$$-1 < x < 2 \text{ tai } 6 < x < 9$$

68

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & x-5 \geq 0 \\ -(x-5), & x-5 < 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan epäyhtälö molemmissa tapauksissa.

Kun $x-5 \geq 0$, niin $x \geq 5$ ja $|x-5| = x-5$.

$$\begin{aligned} x-5 &> x \\ -5 &> 0 \\ &\text{epätosi} \end{aligned}$$

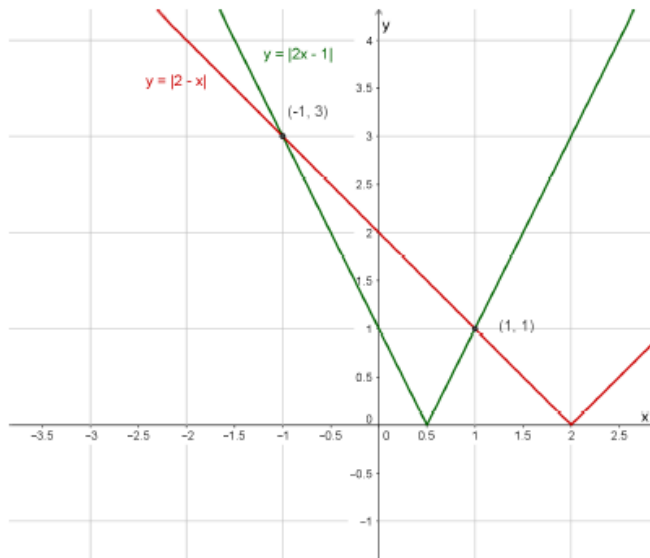
Kun $x-5 < 0$, niin $x < 5$ ja $|x-5| = -(x-5) = -x+5$.

$$\begin{aligned} -x+5 &> x \\ -2x &> -5 \quad | :(-2) < 0 \\ x &< \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa ehdon $x < 5$.

71

- a) Piirretään funktioiden $|2x - 1|$ ja $|2 - x|$ kuvaajat ja etsitään leikkauspisteet.



Kuvaajat leikkaavat pisteissä $(-1, 3)$ ja $(1, 1)$.

Nähdään, että $|2x - 1| > |2 - x|$, kun $x < -1$ ja $x > 1$.