

227. a) Iteroitava funktio on

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{7}{x} \right).$$

Lähtöarvolla 1 saadaan jono

1
4
2,875
2,654891304
2,645767044
2,645751311
2,645751311
...

Siis $\sqrt{7} \approx 2,645751$.

b) Iteroitava funktio on

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1257}{x} \right).$$

Lähtöarvolla 100 saadaan jono

100
56,285
39,30888536
35,64319419
35,45469689
35,45419581
35,45419580
...

Siis $\sqrt{1257} \approx 35,454196$.228. a) $g(1) = 3$, $g(3) = 11$, $g(11) = -1\,929$

b) $g(-2) = -21$, $g(-21) = -11\,459$,
 $g(-11\,459) = -1\,505\,322\,718\,977$

Laskin näyttää viimeisen luvun arvoksi $-1,505322720 \cdot 10^{12}$.Kun tulokseen lisätään luku $1,505322720 \cdot 10^{12}$,

saadaan tulos 1 023. Siis oikea arvo on

 $-1,505\,322\,720\,000 + 1\,023 = -1\,505\,322\,718\,977$.

229. Parametri $a = 3$, joten iteroitava funktio on $g(x) = \frac{x^3 + 9x}{3x^2 + 3}$.

Lähtöarvolla 1 saadaan jono

1
1,666666667
1,732026144
1,732050808
1,732050808
....

Siis jo kolmannella askeleella saadaan oikea yhdeksändesimaalinen likiarvo.

230. Funktion $g(x) = \frac{4}{x^3 - 5}$ kiintopiste on yhtälön $x = \frac{4}{x^3 - 5}$ ratkaisu.

Kertomalla nimittäjällä saadaan yhtälö

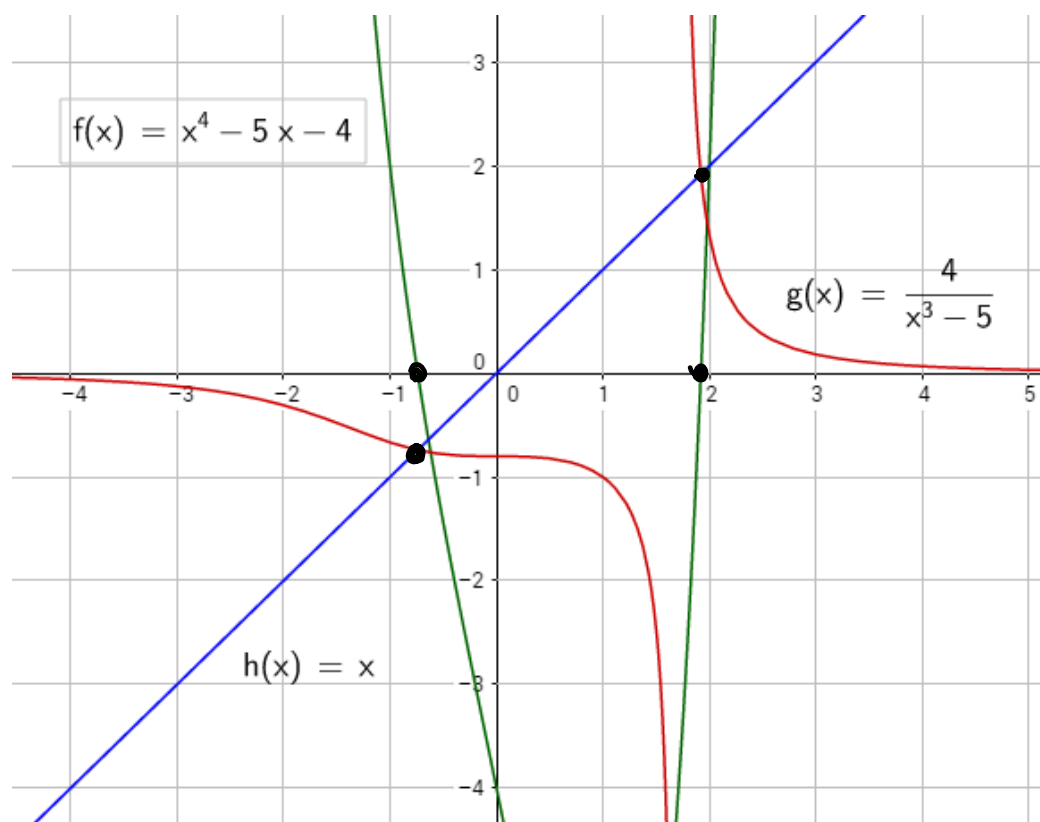
$$x(x^3 - 5) = 4 \quad \text{eli} \quad x^4 - 5x - 4 = 0.$$

Siis kiintopiste on polynomin $x^4 - 5x - 4$ funktion g nollakohta.

(Sijoittamalla nähdään, että funktion g nimittäjän nollakohta $\sqrt[3]{5}$ ei ole polynomin nollakohta, joten kaikki polynomin nollakohdat ovat myös funktion g kiintopisteitä.)

Polynomin $x^4 - 5x - 4$ nollakohdat $a \approx -0,740$ ja $b \approx 1,920$ saadaan Newtonin menetelmällä.

Kokeilemalla nähdään, että nollakohdan a saa funktiota g iteroimalla, mutta nollakohtaa b ei saa.



232. Yhtälön ratkaisut ovat $a \approx -2,879385$, $b \approx -0,652704$ ja $c \approx 0,532089$.

Iteroitavia muotoja ovat mm.

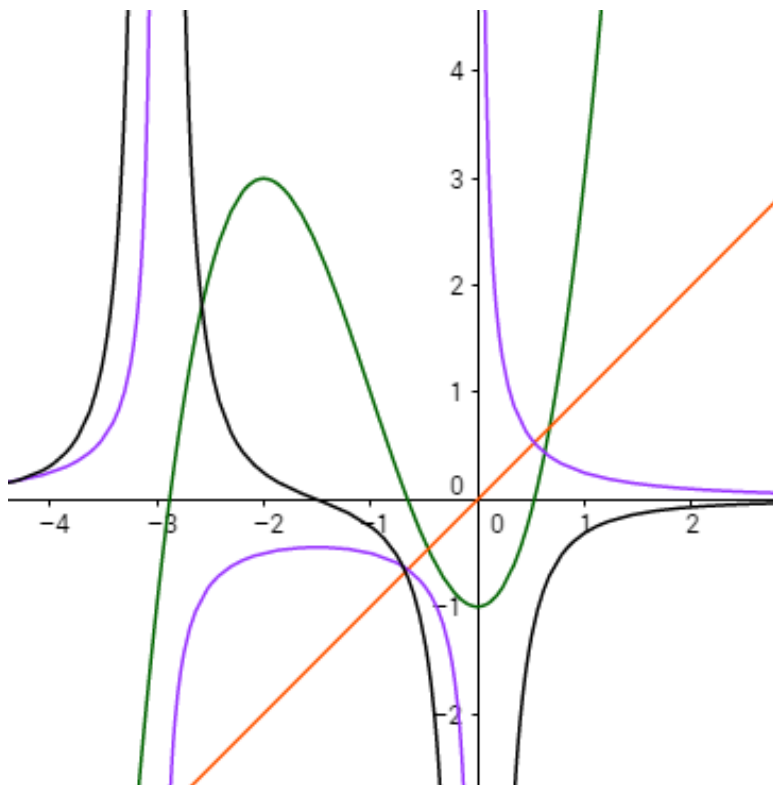
$$x = \sqrt[3]{1 - 3x^2}, \quad x = \sqrt{\frac{1 - x^3}{3}}, \quad x = \frac{1 - 3x^2}{x^2}, \quad x = \sqrt{\frac{1 - 3x^2}{x}}, \quad x = \frac{1}{x^2 + 3x}.$$

Esimerkiksi:

Funktiota $g(x) = \sqrt[3]{1 - 3x^2}$ iteroimalla saadaan juuri a .

Funktiota $g(x) = \frac{1}{x^2 + 3x}$ iteroimalla saadaan juuri b .

Funktiota $g(x) = \sqrt{\frac{1 - x^3}{3}}$ iteroimalla saadaan juuri c .



- 233.** a) Merkitään $g(x) = x^2 + x$. Funktion kiintopiste on yhtälön $x = g(x)$ eli $x = x^2 + x$ ratkaisu $x = 0$.
- b) $g'(x) = 2x + 1$, joten $g'(0) = 1$. Siis derivaatan perusteella ei voi päätellä mitään iteroinnin suppenemisesta.
- c) Iteroimalla funktiota g huomataan, että iterointi välille $[-1, 0]$ kuuluvilla lähtöarvoilla suppenee kohti arvoa 0 .
Positiivisilla lähtöarvoilla iteroinnin luvut suurenevat rajatta.
Kiintopiste ei siis ole hylkivä eikä puoleensa vetävä.