

Raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta: tehtävät

Tehtävä 1 (S22/9):

9. Neljännen asteen polynomiperhe 12 p.

Tarkastellaan polynomia $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$, kun $a > 0$ ja $x \in \mathbf{R}$.

1. Osoita, että derivaatta f' on aidosti kasvava funktio. (4 p.)
2. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = 0$ on korkeintaan kaksi erisuurta reaalijuurta. (8 p.)

Tehtävä 2 (S24/13):

13. Epäjatkuva funktio 12 p.

Olkoon $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{kun } x \leq 1, \\ x^2 + x - 2, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Jalmary on osoittanut seuraavalla tavalla, että $f'(1) = 3$.

Lasketaan funktion f erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = 1$. Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 5 - (3 \cdot 1 - 5)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$$

ja

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2 - (1^2 + 1 - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3. \end{aligned}$$

Koska erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret ja niiden yhteinen arvo on 3, niin funktio f on derivoituva kohdassa $x = 1$ ja $f'(1) = 3$.

1. Osoita, että f ei ole jatkuva kohdassa $x = 1$. Miksi tämä on ristiriidassa Jalmaryn tuloksen kanssa? Minkä virheen Jalmary tekee todistuksessaan? (6 p.)
2. Osoita, että f on monotoninen joukossa $\mathbf{R}$. (6 p.)

Lisätehtävä (K24/13):

13. Raja-arvo 12 p.

Ohjelmiston mukaan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Perustele tämä tulos seuraavien välivaiheiden avulla.

- [i] Osoita, että $x - \sin x - \frac{1}{6}x^3 \leq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$.
- [ii] Osoita, että $x - \sin x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \geq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$.
- [iii] Osoita, että $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \leq x - \sin x \leq \frac{1}{6}x^3$, kun $0 \leq x \leq 1$.
- [iv] Osoita, että $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \geq x - \sin x \geq \frac{1}{6}x^3$, kun $-1 \leq x \leq 0$.
- [v] Perustele näiden epäyhtälöiden avulla, että raja-arvo on $\frac{1}{6}$.

Välivaiheita voi perustella toisistaan riippumattomasti. Esimerkiksi vaiheen [iv] osapisteet saa osoittamalla, että se seuraa vaiheesta [iii], riippumatta siitä, onko vaihe [iii] todistettu. Sama pätee muihinkin vaiheisiin.