

# Variaabeli 7

Talousmatematiikka

MAB7

Tarmo Hautajärvi  
Jukka Ottelin  
Leena Wallin-Jaakkola

## Opettajan aineisto



Helsingissä Kustannusosakeyhtiö Otava

# SISÄLLYS

Yleistä

Ratkaisut kirjan tehtäviin

Kokeita

Toimittaja: Mare Herlevi

Taitto: Tekijät

1. painos

Painovuosi 2004

Kopiointiehdot

Tämä teos on opettajan opas. Teos on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61). Tekstisivujen valokopioiminen on kielletty, ellei valokopiointiin ole hankittu lupaa. Tarkista, onko oppilaitoksellanne voimassaoleva valokopiointilupa.

Lisätietoja luvista ja niiden sisällöstä antaa Kopiosto ry, [www.kopiosto.fi/](http://www.kopiosto.fi/).

Teoksen kaikkien kalvopohjien ja kokeiden valokopiointi opetuskäyttöön on sallittua, mikäli oppilaitoksellanne on voimassaoleva valokopiointilupa.

Teoksen tai sen osan digitaalinen kopioiminen tai muuntelu on ehdottomasti kielletty.

Sidonta: KEURUSKOPIO

Painopaikka: Otavan Kirjapaino Oy, Keuruu 2004

**ISBN: 951-1-19442-9**

# Yleistä

Tämän opettajamateriaalin ratkaisuja voi käyttää mm. ryhmän eriyttämiseen ja opiskelijoiden itsenäiseen harjoitteluvaiheeseen panemalla ratkaisuja esille kalvolle tai "vastausnurkkaan".

Opettajamateriaalin nettiversiossa ([www.otava.fi/oppimateriaalit/](http://www.otava.fi/oppimateriaalit/)) on kunkin tehtävän kohdalla myös tehtäväteksti, joten opettaja voi halutessaan käyttää mitä tahansa kirjan tehtävää esimerkkinä.

Variaabelin kotisivuille on koottu eri laskinmallien käyttöohjeita.

Toiminnallista matematiikkaa:

1) Kurssin ensimmäiselle tunnilla voi jakaa tuoreet pörssikurssit ja antaa opiskelijoiden tehdä 50 000 euron virtuaalisijoitus haluamallaan tavalla. Kurssin aikana sijoituksia voi myydä ja ostaa uusia kertyneiden varojen puitteissa. Kurssin lopussa tutkitaan miten kunkin sijoitukset ovat kannattaneet.

Jos kurssi sattuu sellaiseen ajankohtaan, jolloin on menossa nettisijoittaja-kilpailu, voivat opiskelijat opetella sijoitusasioita osallistumalla kyseiseen kisaan.

2) Laina-asioita voi opiskella toiminnallisesti antamalla tehtäväksi etsiä itselleen sopiva asunto, kulkuneuvo, lomamatka tms. hintatietoineen ja selvittää mistä saisi siihen edullisimman rahoituksen.

3) Kurssikokeen voi korvata talousmatematiikkaan liittyvällä harjoitustyöllä, joka käsittelee valittua aihepiiriä sekä esseemuotoisena että laskennallisesti.

# RATKAISUT KIRJAN TEHTÄVIIN

## HAUSKA ALKUTESTI

### 1. Alkuperäinen hinta $a$

Hinnan korotus 10 %  
Prosenttikerroin  $100\% + 10\% = 110\% = 1,10$   
Uusi hinta  $1,10a$

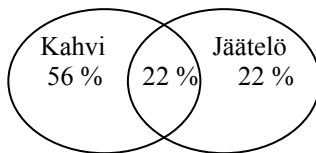
Hinnan lasku 10 %  
Prosenttikerroin  $100\% - 10\% = 90\% = 0,90$   
Uusi hinta  $0,90 \cdot 1,10a = 0,99a$

Uudet hinnat ovat 99 % alkuperäisistä hinnoista, joten hinnat ovat laskeneet

Hinnan lasku  $100\% - 99\% = 1\%$

Vastaus: Hinnat ovat laskeneet 1 %:lla.

2. Kahvi 78 %  
Jäätelö 44 %  
Yhteensä 122 %



Koska kahvilan koko asiakaskunta on 100 %, niin sekä jäätelön että kahvin osti  $122\% - 100\% = 22\%$

Vastaus: Asiakkaista 22 % osti kumpaakin.

### 3. Konvehtirasia $k$

Virvoitusjuoma  $v$

Jäätelö  $j$

Jogurtti  $u$

Tehtävän tiedoista saadaan yhtälöryhmä, josta ratkaistaan  $k$  muuttujan  $v$  avulla.

$$\begin{cases} k = v + j + u \\ 2j = k \\ 2v = 3u \end{cases}$$

Keskimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$2j = k \quad | :2$$

$$j = \frac{1}{2}k$$

Alimmasta yhtälöstä saadaan

$$2v = 3u \quad | :3$$

$$\frac{2}{3}v = u$$

Sijoitetaan  $j$  ja  $u$  ylimpään yhtälöön

$$k = v + j + u \quad \left| \begin{array}{l} j = \frac{1}{2}k, u = \frac{2}{3}v \end{array} \right.$$

$$k = v + \frac{1}{2}k + \frac{2}{3}v$$

$$k - \frac{1}{2}k = v + \frac{2}{3}v$$

$$\frac{1}{2}k = \frac{5}{3}v \quad | \cdot 2$$

$$k = \frac{10}{3}v$$

$$k = 3\frac{1}{3}v$$

Vastaus: Yksi konvehtirasia vastaa  $3\frac{1}{3}$  virvoitusjuomaa.

4. Valmistukseen on käytetty  $0,50 \cdot 1 \text{ kg} = 0,5 \text{ kg} = 500 \text{ g}$

Lihasta haihtuu vettä 20 %, jolloin jää  $100 \% - 20 \% = 80 \%$

Lihan paino haihtumisen jälkeen  $0,8 \cdot 500 \text{ g} = 400 \text{ g}$

Vastaus: Lihaa 400 g

5. 1. viikolla 1 €, 2. viikolla 2 €, 3. viikolla 3 €, ...

Viimeinen pulloon talletus 100 €, joten se on tapahtunut 100. viikolla.

Pulloon talletettu summa  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$

Kyseessä on aritmeettinen summa, koska lisäys  $d = 1$  on vakio.

Pullossa rahaa (€)

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad | n = 100, a_1 = 1, a_{100} = 100$$

$$S_{100} = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 5\,050$$

Vastaus: Pullossa oli rahaa 5 050 €.

### 6. Alkuperäinen myynti $a$

Kasvua 12,2 %

Prosenttikerroin  $100 \% + 12,2 \% = 112,2 \% = 1,122$

Aika  $x$  (a)

Myynti tulee joka vuosi 1,122-kertaiseksi, tällöin  $x$ :ssä vuodessa myynti tulee  $1,122^x$ -kertaiseksi

$$1,122^x \cdot a = 2a \quad | :a$$

$$1,122^x = 2 \quad | \lg()$$

$$\lg 1,122^x = \lg 2$$

$$x \cdot \lg 1,122 = \lg 2 \quad | : \lg 1,122$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1,122}$$

$$x \approx 6,0$$

Vastaus: Myynti kaksinkertaistuu 6 vuoden kuluttua.

7. Kari  $x$  (€)

Anneli  $x-7$

Martti  $3 \cdot (x-7)$

Yhteensä 152 €

Saadaan yhtälö

$$x + (x-7) + 3(x-7) = 152$$

$$x + x - 7 + 3x - 21 = 152$$

$$5x = 180 \quad | :5$$

$$x = 36$$

Kari 36 €

Anneli  $36 € - 7 € = 29 €$

Martti  $3 \cdot 29 € = 87 €$

Yhteensä 152 €

Vastaus: Karilla oli 36 €, Annelilla 29 € ja Martilla 87 €.

### 8. Lukujono 1, 1, 2, 3, 5, ...

1. termi 1

2. termi 1

3. termi  $2 = 1 + 1$

4. termi  $3 = 2 + 1$

5. termi  $5 = 3 + 2$

Lukujonon termi saadaan kahden edellisen termin summana, joten

6. termi  $5 + 3 = 8$

Vastaus: Seuraava termi on 8.

9. Polttoainevarasto  $V$

Koneen A kulutus  $\frac{V}{240}$

Koneen B kulutus  $\frac{V}{144}$

$$\text{Kulutus yhteensä } \frac{3V}{240} + \frac{5V}{144} = \frac{3V + 5V}{720} = \frac{8V}{720}$$

Koneet kuluttavat 8 varastollista 720 tunnissa, joten 1 varastollinen riittää  $\frac{720}{8} = 90$  tuntia.

Vastaus: Polttoainetta riittää 90 tunniksi.

10. Kirjan hinta kirjakauppiaille  $a$

Kirjan myyntihinta yleensä  $1,2a$

Kirjan myyntihinta paraimmille  $1,08a$

Alennuskertoimen  $x$

$$x \cdot 1,2a = 1,08a \quad | : (1,2a)$$

$$x = \frac{1,08a}{1,2a}$$

$$x = 0,9$$

Alennusprosentti  $100\% - 90\% = 10\%$

Vastaus: Kauppias myönsi 10 %:n hinnanalennuksen.

## 1. PROSENTTILASKENTAA

1. a)  $0,05 \cdot 25 \text{ €} = 1,25 \text{ €}$

b)  $0,72 \cdot 7,80 \text{ €} = 5,616 \text{ €} \approx 5,62 \text{ €}$

c)  $1,24 \cdot 54,80 \text{ €} = 67,952 \text{ €} \approx 67,95 \text{ €}$

Vastaus: a) 1,25 € b) 5,62 € c) 67,95 €

2. a)  $0,0155 \cdot 45 \text{ €} = 0,6975 \text{ €} \approx 0,70 \text{ €}$

b)  $0,0015 \cdot 980 \text{ €} = 1,47 \text{ €}$

c)  $2,305 \cdot 800 \text{ €} = 1\ 844 \text{ €}$

Vastaus: a) 0,70 € b) 1,47 € c) 1 844 €

$$3. a) \frac{2}{3} \% = \frac{2}{300}$$

$$\frac{2}{300} \cdot 111 = \frac{37}{50}$$

$$b) 0,23 \cdot \frac{7}{46} = \frac{7}{200}$$

$$c) \frac{7}{3} \% = \frac{7}{300}$$

$$\frac{7}{300} \cdot \frac{21}{49} = \frac{1}{100}$$

$$\text{Vastaus: a) } \frac{37}{50} \text{ b) } \frac{7}{200} \text{ c) } \frac{1}{100}$$

$$4. a) \text{ Yksikön muunnos } 1 \text{ h } 17 \text{ min} = (60 + 17) \text{ min} = 77 \text{ min}$$

$$\frac{7 \text{ min}}{1 \text{ h } 17 \text{ min}} = \frac{7 \text{ min}}{77 \text{ min}} = 0,0909 \dots \approx 9,1 \%$$

$$b) \text{ Yksikön muunnos } \frac{7}{60} \text{ h} = \frac{7}{60} \cdot 60 \text{ min} = 7 \text{ min}$$

$$\frac{\frac{7}{60} \text{ h}}{350 \text{ min}} = \frac{7 \text{ min}}{350 \text{ min}} = 0,02 = 2,0 \%$$

$$c) \text{ Yksikön muunnos } 0,2 \text{ h} = 0,2 \cdot 60 \text{ min} = 12 \text{ min}$$

$$\frac{0,2 \text{ h}}{24 \text{ min}} = \frac{12 \text{ min}}{24 \text{ min}} = 0,5 = 50 \%$$

$$\text{Vastaus: a) } 9,1 \% \text{ b) } 2,0 \% \text{ c) } 50 \%$$

$$5. a) \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{35}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{35}{4} = 3,5 = 350 \%$$

$$b) \frac{1\frac{3}{4}}{\frac{7}{120}} = \frac{7}{4} \cdot \frac{120}{7} = 30 = 3\,000 \%$$

$$c) \frac{\frac{7}{91}}{\frac{49}{637}} = \frac{7}{91} \cdot \frac{637}{49} = 1 = 100 \%$$

Vastaus: a) 350 % b) 3 000 % c) 100 %

6. a) Lukujen suhde  $\frac{4}{5} = 0,80 = 80 \%$

Pienempi  $100 \% - 80 \% = 20 \%$

b) Lukujen suhde  $\frac{5}{4} = 1,25 = 125 \%$

Suurempi  $125 \% - 100 \% = 25 \%$

Vastaus: a) 20 % pienempi b) 25 % suurempi

7. a) Lukujen suhde  $\frac{1\,500}{500} = 3 = 300 \%$

Suurempi  $300 \% - 100 \% = 200 \%$

b) Lukujen suhde  $\frac{500}{1\,500} = 0,33 \dots = 33,3 \dots \%$

Pienempi  $100 \% - 33,3 \dots \% \approx 67 \%$

Vastaus: a) 200 % suurempi b) 67 % pienempi

8. a) Lukujen suhde  $\frac{6\frac{1}{8}}{8\frac{1}{6}} = \frac{49}{8} \cdot \frac{6}{49} = 0,75 = 75 \%$

Pienempi  $100 \% - 75 \% = 25 \%$

b) Lukujen suhde  $\frac{9\frac{4}{5}}{\frac{7}{8}} = \frac{49}{5} \cdot \frac{8}{7} = 11,2 = 1\,120 \%$

Suurempi  $1\,120 \% - 100 \% = 1\,020 \%$

Vastaus: a) 25 % pienempi b) 1 020 % suurempi

9. Alkuperäinen luku 7

Kasvu 2 %

Prosenttikerroin  $100 \% + 2 \% = 102 \% = 1,02$

Uusi luku  $1,02 \cdot 7$

Pienennys 2 %

Prosenttikerroin  $100 \% - 2 \% = 98 \% = 0,98$

Uusi luku  $0,98 \cdot 1,02 \cdot 7 = 0,9996 \cdot 7$

a) Luku on 0,9996-kertainen lukuun 7 verrattuna

b) Luku on 99,96 % luvusta 7, joten se on pienempi  $100 \% - 99,96 \% = 0,04 \%$

Vastaus: a) 0,9996-kertainen b) 0,04 % pienempi

**10. Alkuperäinen luku 5**

Pienennys 40 %

Prosenttikerroin  $100 \% - 40 \% = 60 \% = 0,6$

Uusi luku  $0,6 \cdot 5$

Kasvu 250 %

Prosenttikerroin  $250 \% + 100 \% = 350 \% = 3,5$

Uusi luku  $3,5 \cdot 0,6 \cdot 5 = 2,1 \cdot 5$

a) Luku 2,1-kertainen lukuun 5 verrattuna

b) Luku on 2,1-kertainen eli 210 % luvusta 5, joten se on suurempi  $210 \% - 100 \% = 110 \%$

Vastaus: a) 2,1-kertainen b) 110 % suurempi

**11.a) Alkuperäinen luku  $a$**

1. kasvu 4 %

Prosenttikerroin  $100 \% + 4 \% = 104 \% = 1,04$

Uusi luku  $1,04 a$

2. kasvu 7 %

Prosenttikerroin  $100 \% + 7 \% = 107 \% = 1,07$

Uusi luku  $1,07 \cdot 1,04 a = 1,1128 a$

Uusi luku on 1,1128-kertainen eli 111,28 % alkuperäisestä

Kasvu  $111,28 \% - 100 \% = 11,28 \% \approx 11 \%$

b) Prosenttikerroin kummallakin kerralla sama  $q$   
kahden korotuksen jälkeen uusi luku  $q^2 a$

$$q^2 a = 1,1128 a \quad | :a$$

$$q^2 = 1,1128 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$q = \pm\sqrt{1,1128} \quad | q > 0$$

$$q = 1,0548 \dots$$

Keskimääräinen korotusprosentti  
 $105,48 \dots \% - 100 \% \approx 5,5 \%$

Vastaus: a) Kaiken kaikkiaan 11 % b) Keskimäärin 5,5 %

**12. Auton alkuperäinen hinta  $a$  (€)**

1. korotus 2,6 %  
 Prosenttikerroin  $100 \% + 2,6 \% = 102,6 \% = 1,026$   
 Uusi hinta  $1,026 a$

2. korotus 3,1 %  
 Prosenttikerroin  $100 \% + 3,1 \% = 103,1 \% = 1,031$   
 Lopullinen hinta  $1,026 \cdot 1,031 a = 1,0578 \dots a$

Hinnan nousu prosentteina  $1,0578 \dots - 1 = 0,0578 \dots \approx 5,8 \%$

Vastaus: Hinta nousi 5,8 %

**13. Alkuperäinen luku  $a$**

1. korotus 20 %  
 Prosenttikerroin  $100 \% + 20 \% = 120 \% = 1,2$   
 Uusi luku  $1,2 a$

2. korotus 140 %  
 Prosenttikerroin  $100 \% + 140 \% = 240 \% = 2,4$   
 Luku toisen korotuksen jälkeen  $2,4 \cdot 1,2 a$

Pienennys 80 %  
 Prosenttikerroin  $100 \% - 80 \% = 20 \% = 0,2$   
 Luku pienennyksen jälkeen  $0,2 \cdot 2,4 \cdot 1,2 a = 0,576 a$

Keskimääräinen muutos eli prosenttikerroin jokaisella kerralla sama  $q$   
 Luku kolmen kerran jälkeen  $q^3 a$

$$q^3 a = 0,576 a \quad | :a$$

$$q^3 = 0,576 \quad | \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$q = \sqrt[3]{0,576}$$

$$q = 0,8320 \dots$$

Pienenemisprosentti  
 $100 \% - 83,20 \dots \% \approx 17 \%$

Vastaus: Pienenee keskimäärin 17 %

14. Osakkeen alkuperäinen hinta  $a$  (€)

Muutos maanantaina  $+2,4\%$

Prosenttikerroin  $100\% + 2,4\% = 102,4\% = 1,024$

Muutos tiistaina  $+1,3\%$

Prosenttikerroin  $100\% + 1,3\% = 101,3\% = 1,013$

Muutos keskiviikkona  $+3,2\%$

Prosenttikerroin  $100\% + 3,2\% = 103,2\% = 1,032$

Muutos torstaina  $-3,4\%$

Prosenttikerroin  $100\% - 3,4\% = 96,6\% = 0,966$

Muutos perjantaina  $+0,2\%$

Prosenttikerroin  $100\% + 0,2\% = 100,2\% = 1,002$

Osakkeen hinta viikon lopussa  $1,024 \cdot 1,013 \cdot 1,032 \cdot 0,966 \cdot 1,002a = 1,03617...a$

Muutosprosentti  $103,617... \% - 100\% \approx 3,6\%$

Vastaus: Kurssi muuttui  $+3,6\%$

15. a) Korkoprosentti  $4,5\% = 0,045$

Korko vuoden talletuksesta  $0,045 \cdot 3\,000\text{ €} = 135\text{ €}$

Korkoprosentti  $5,25\% = 0,0525$

Korko vuoden talletuksesta  $0,0525 \cdot 5\,000\text{ €} = 262,50\text{ €}$

Korot yhteensä  $135\text{ €} + 262,50\text{ €} = 397,50\text{ €}$

b) Korot yhteensä  $397,50\text{ €}$

Talletukset yhteensä  $3\,000\text{ €} + 5\,000\text{ €} = 8\,000\text{ €}$

Keskimääräinen korko  $\frac{397,50}{8\,000} = 0,04968... \approx 4,97\%$

Vastaus: a) Korkoa yhteensä  $397,50\text{ €}$  b) keskimääräinen korko  $4,97\%$

16. Käteen jäävä osuus  $100\% - 34\% = 66\% = 0,66$

Käteen euroina  $0,66 \cdot 2\,135\text{ €} = 1\,409,10\text{ €}$

Vastaus: Jani saa  $1\,409,10\text{ €}$

17. Villen ensimmäinen korotusprosentti  $5\% = 0,05$

Ensimmäinen korotus  $0,05 \cdot 2\,350\text{ €} = 117,50\text{ €}$

Toinen korotus  $125,00\text{ €}$

Korotukset yhteensä  $117,50\text{ €} + 125,00\text{ €} = 242,50\text{ €}$

Palkan korotusprosentti  $\frac{242,50}{2\,350} = 0,103... \approx 10,3\%$

Janin ensimmäinen korotusprosentti  $5\% = 0,05$   
Ensimmäinen korotus  $0,05 \cdot 1\,490 \text{ €} = 74,50 \text{ €}$

Toinen korotus  $125,00 \text{ €}$

Korotukset yhteensä  $74,50 \text{ €} + 125,00 \text{ €} = 199,50 \text{ €}$

Palkan korotusprosentti  $\frac{199,50}{1\,490} = 0,1338... \approx 13,4\%$

Vastaus: Villen palkka nousi 10,3 %, Janin palkka nousi 13,4 %

**18.** Alkuperäinen luku  $x$

a) Prosenttikerroin  $16\% = 0,16$

$$0,16x = 20 \quad | :0,16$$

$$x = \frac{20}{0,16}$$

$$x = 125$$

b) Prosenttikerroin  $130\% = 1,30$

$$1,30x = 169 \quad | :1,30$$

$$x = \frac{169}{1,30}$$

$$x = 130$$

c) Prosenttikerroin  $0,1\% = 0,001$

$$0,001x = 0,75 \quad | :0,001$$

$$x = \frac{0,75}{0,001}$$

$$x = 750$$

d) Prosenttikerroin  $\frac{7}{3}\% = \frac{7}{300}$

$$\frac{7}{300}x = \frac{21}{5} \quad | : \frac{7}{300}$$

$$x = \frac{\frac{21}{5}}{\frac{7}{300}}$$

$$x = \frac{21}{5} \cdot \frac{300}{7}$$

$$x = 180$$

Vastaus: a) 125 b) 130 c) 750 d) 180

19. a) Mekon alkuperäinen hinta  $a$  (€)

Mekon alennettu hinta 75 €

Alennusprosentti 15 %

Johannan maksama osuus  $100 \% - 15 \% = 85 \% = 0,85$

$$0,85a = 75 \quad | :0,85$$

$$a = \frac{75}{0,85}$$

$$a \approx 88,20$$

b) Mekon alkuperäinen hinta 88,20 €

Alennusprosentti  $(15 + 2) \% = 17 \%$

Johannan osuus  $100 \% - 17 \% = 83 \% = 0,83$

Mekon alennettu hinta  $0,83 \cdot 88,20 \text{ €} \approx 73,21 \text{ €}$

Vastaus: a) Mekon alentamaton hinta 88,20 € b) Hinta olisi ollut 73,21 €

20. Tuolin alkuperäinen hinta  $a$  (€)

Alennus 16,30 €

Alennusprosentti 15 % = 0,15

$$0,15a = 16,30 \quad | :0,15$$

$$a = \frac{16,30}{0,15}$$

$$a \approx 108,70$$

Asiakkaan maksama hinta  $108,70 \text{ €} - 16,30 \text{ €} = 92,40 \text{ €}$

Vastaus: Hinta oli 92,40 €

21. Hinta vuoden alussa  $x$  (€)

Hinta vuoden lopussa 134,75 €

Prosenttikerroin  $100 \% + 2,1 \% = 102,1\% = 1,021$

$$1,021 \cdot x = 134,75 \quad | :1,021$$

$$x = \frac{134,75}{1,021}$$

$$x \approx 131,98$$

Vastaus: Suihku maksoi 131,98 €.

22. Alkuperäinen myynti  $m$

Prosenttikerroin  $100 \% + 14 \% = 114 \% = 1,14$

Uusi myynti 1,14  $m$

Alkuperäinen hinta  $h$   
Prosentti kerroin  $100 \% - 15 \% = 85 \% = 0,85$   
Uusi hinta  $0,85 h$

Alkuperäinen myyntitulo  $mh$   
Uusi myyntitulo  $1,14m \cdot 0,85h = 0,969mh$   
Myyntitulo pieneni  $100 \% - 96,9 \% = 3,1 \%$

Vastaus: Myyntitulo pieneni 3,1 %.

23. Vastike ennen  $12,00 \cdot 64,5 \text{ mk} = 774 \text{ mk}$   
Prosenttikerroin  $100 \% + 8,5 \% = 108,5 \% = 1,085$

Uusi vastike  $1,085 \cdot 774 \text{ mk} = 839,79 \text{ mk}$

Vastaus: Vastike oli 839,79 mk.

24. Alkuperäinen matkustaja määrä  $a$   
Prosenttikerroin  $100 \% - 23 \% = 77 \% = 0,77$   
Uusi matkustajamäärä  $0,77 a$

Korotuskerroin  $k$

$$\begin{aligned} k \cdot 0,77 a &= a && |:a \\ 0,77 k &= 1 && |:0,77 \\ k &= 1,2987\dots \end{aligned}$$

Korotusprosentti  $129,87\dots \% - 100 \% \approx 30 \%$

Vastaus: Matkustajamäärän pitäisi kasvaa 30 %.

25. Hinta ennen  $h$   
Korotuskerroin  $100 \% + 5,0 \% = 105 \% = 1,05$   
Uusi hinta  $1,05 h$

Matkustaja määrä ennen  $m$   
Pienenemiskerroin  $100 \% - 5,0 \% = 95 \% = 0,95$   
Uusi matkustajamäärä  $0,95 m$

Lipputulot ennen  $mh$   
Uudet lipputulot  $1,05h \cdot 0,95m = 0,9975mh$

Lipputulot pienenevät  $100 \% - 99,75 \% = 0,25 \%$

Vastaus: Lipputulot pienenevät 0,25 %.

**26.** Lainan määrä  $a$   
Korko ennen  $0,11 a$

Uusi korko  $0,125 a$

Korkokulujen kasvu

$$\frac{0,125a}{0,11a} = 1,1363\dots$$

$113,63 \dots \% - 100 \% \approx 13,6 \%$

Vastaus: Korkokulut nousivat 13,6 %.

**27.** Vehnätynnyrin hinta ennen  $h$

Korotuskerroin  $100 \% + 2 \% = 102 \% = 1,02$

Uusi hinta  $1,02 h$

Vehnätynnyrin paino ennen  $p$

Korotuskerroin  $100 \% + 4 \% = 104 \% = 1,04$

Uusi paino  $1,04 p$

Vehnän yksikköhinta ennen  $\frac{h}{p}$

Vehnän yksikköhinta nyt  $\frac{1,02 h}{1,04 p} = 0,9807\dots \frac{h}{p}$

Muutoskerroin  $k$

$$\begin{aligned} k \cdot 0,9807\dots \frac{h}{p} &= \frac{h}{p} && \left| : \frac{h}{p} \right. \\ k \cdot 0,9807\dots &= 1 && \left| : 0,9807\dots \right. \\ k &= 1,0196\dots \end{aligned}$$

Muutosprosentti  $101,96 \dots \% - 100\% \approx 2,0 \%$

Vastaus. Hintaa voi alentaa 2,0 %.

**28.** Hyyrymäärä ennen  $a$

Prosenttikerroin  $100 \% - 5 \% = 95 \% = 0,95$

Säästöön ennen  $0,95 a$

Hyyrymäärän korotuskerroin  $k$

Hyyrymäärä nyt  $ka$

Prosenttikerroin  $100 \% - 10 \% = 90 \% = 0,90$

Säästöön nyt  $0,90 ka$

Säästö ennallaan

$$\begin{aligned}0,90 k a = 0,95 a & \quad | :a \\0,90 k = 0,95 & \quad | \cdot 0,90 \\k = 1,0555\dots\end{aligned}$$

Korotusprosentti  $105,55 \dots \% - 100 \% \approx 5,6 \%$

Vastaus: Hyyryjä pitää korottaa 5,6 %.

**29.** Alkuperäinen hinta  $a$

Korotuskerroin  $k$

Hinta 1. korotuksen jälkeen  $ka$

Hinta 2. korotuksen jälkeen  $k \cdot ka = k^2 a$

Hinta 3. korotuksen jälkeen  $k \cdot k^2 a = k^3 a$

Hinta 3. korotuksen jälkeen kaksinkertainen

$$\begin{aligned}k^3 a = 2 a & \quad | :a \\k^3 = 2 & \quad | \sqrt[3]{\phantom{x}} \\k = 1,2599\dots\end{aligned}$$

Korotusprosentti  $125,99\dots \% - 100 \% \approx 26,0 \%$

Vastaus: Korotusprosentti on 26,0 %.

**30.** Käytetyn maidon litrahinta alussa  $\frac{4,20 \text{ mk}}{0,8 \text{ l}} = 5,25 \text{ mk / l}$

Käytetyn maidon litrahinta lopussa  $\frac{2,5 \text{ mk} + 2,5 \text{ mk}}{0,5 \text{ l} + 0,5 \text{ l}} = 5,0 \text{ mk / l}$

Puolenlitran ostokset ovat edullisempia.

Hintojen suhde  $\frac{5}{5,25} = 0,95238\dots$

Edullisuus prosentteina  $100 \% - 95,238 \dots \% \approx 4,76 \%$

Vastaus: Jälkimmäinen on 4,76 % edullisempi.

**31.** Tulot ennen ennakkoa  $x$  (mk)

Prosenttikerroin  $100 \% - 42 \% = 58 \% = 0,58$

Tulot ennakon jälkeen

$$\begin{aligned}0,58 x = 5\,084,00 & \quad | :0,58 \\x = \frac{5\,084,00}{0,58} \\x = 8\,765,517 \dots\end{aligned}$$

Ennakko  $8\,765,517 \dots \text{ mk} - 5\,084,00 \text{ mk} \approx 3\,681,52 \text{ mk}$

Vastaus: Ennakko oli  $3\,681,52 \text{ mk}$ .

**32.** Henkilö A  $47,30 \text{ mk}$

Prosenttikorotus  $0,018 \cdot 47,30 \text{ mk} = 0,8514 \text{ mk} < 1,05 \text{ mk}$

Henkilön A korotus on  $1,05 \text{ mk}$

Henkilön A palkka korotuksen jälkeen  $47,30 \text{ mk} + 1,05 \text{ mk} = 48,35 \text{ mk}$

Henkilö B

Prosenttikerroin  $100 \% + 38,4 \% = 138,4 \% = 1,384$

Henkilön B tuntiansio  $1,384 \cdot 47,30 \text{ mk} = 65,4632 \text{ mk} \approx 65,46 \text{ mk}$

Prosenttikorotus  $0,018 \cdot 65,46 \text{ mk} = 1,178 \dots \text{ mk} > 1,05 \text{ mk}$

Henkilön B korotus on prosenttikorotus

Henkilön B palkka korotuksen jälkeen  $65,46 \text{ mk} + 1,178 \dots \text{ mk} \approx 66,64 \text{ mk}$

Henkilö B saa enemmän palkkaa  $\frac{66,64 \text{ mk}}{48,35 \text{ mk}} = 1,3782 \dots$

$137,82 \dots \% - 100 \% \approx 37,8 \%$

Vastaus: Henkilö B saa  $37,8 \%$  enemmän palkkaa.

**33.** Opettajia vuonna 1981  $a$

Korotuskerroin  $100 \% + 20,6 \% = 120,6 \% = 1,206$

Opettajia vuonna 1991  $1,206 a$

Opiskelijoita vuonna 1981  $13 a$

Korotuskerroin  $100 \% + 37,3 \% = 137,3 \% = 1,372$

Opiskelijoita vuonna 1991  $1,372 \cdot 13 a = 17,836 a$

Opiskelijoiden määrän ja opettajien määrän suhde  $\frac{17,836 a}{1,206 a} = 14,78 \dots \approx 15$

Vastaus: Vuonna 1991 oli 15 opiskelijaa yhtä opettajaa kohden.

**34.** Hintaa alussa  $h$

Alennuskerroin  $100 \% - 20 \% = 80 \% = 0,80$

Myynti lopussa  $0,80 m$

Markkamääräinen myynti alussa  $a$

Kasvukerroin  $100 \% + 2 \% = 102 \% = 1,02$

Markkamääräinen myynti lopussa  $1,02 a$

Myyty tavaramäärä alussa  $\frac{a}{h}$

$$\text{Myyty tavaramäärä lopussa } \frac{1,02a}{0,80m} = 1,275 \frac{a}{m}$$

$$\text{Tavaramäärän kasvu } 127,5 \% - 100 \% = 27,5 \% \approx 28 \%$$

Vastaus: Myyty tavaramäärä kasvoi 28 %.

**35.** Tuotteen myyntihinta alussa  $a$

$$\text{Prosenttikerroin } 100 \% - 8 \% = 92 \% = 0,92$$

$$\text{Uusi myyntihinta } 0,92a$$

$$\text{Myyntipalkkio alussa } 0,25a$$

$$\text{Uusi myyntipalkkio } 0,31 \cdot 0,92a = 0,2852a$$

$$\text{Myyntipalkkioiden suhde } \frac{0,2852a}{0,25a} = 1,1408 = 114,08 \%$$

$$\text{Nousua } 114,08 \% - 100 \% = 14,08 \%$$

Vastaus: Myyntipalkkio nousi.

**36.** Auton arvo väheni joka vuosi  $p$  prosenttia, joten vähenemiskerroin  $q$  on joka vuosi sama.

$$\text{Auton arvo alussa } 95\,400 \text{ mk}$$

$$\text{Auton arvo 8 vuoden kuluttua } q^8 \cdot 95\,400 \text{ mk}$$

Vähenemisprosentti  $p$

$$q^8 \cdot 95\,400 = 19\,000 \quad | :95\,400$$

$$q^8 = 0,19916... \quad | \sqrt[8]{\phantom{x}}$$

$$q = \pm \sqrt[8]{0,19916...} \quad | q > 0$$

$$q = 0,81733...$$

$$p = 100 \% - 81,733 \dots \% \approx 18 \%$$

Vastaus: Vuosittainen vähenemisprosentti oli 18.

**37.** Äänioikeutettuja  $a$

$$\text{Äänestäjiä } 0,71a$$

$$\text{KYLLÄ-ääniä } 0,57 \cdot 0,71a = 0,4047a$$

$$\text{KYLLÄ-äänien osuus } 40,47 \% \approx 41 \%$$

Vastaus: Äänioikeutetuista KYLLÄ-ääniä oli 41 %.

**38. Oppilaitos A**

$$\text{Tyttöjen hyväksymisprosentti } \frac{48}{300} = 0,16 = 16 \%$$

$$\text{Poikien hyväksymisprosentti } \frac{3}{20} = 0,15 = 15 \%$$

Tyttöjen hyväksymisprosentti  $16 - 15 = 1$  prosenttiyksikköä suurempi

**Oppilaitos B**

$$\text{Tyttöjen hyväksymisprosentti } \frac{4}{20} = 0,2 = 20 \%$$

$$\text{Poikien hyväksymisprosentti } \frac{114}{600} = 0,19 = 19 \%$$

Tyttöjen hyväksymisprosentti  $20 - 19 = 1$  prosenttiyksikköä suurempi

**Koko oppilaitos**

$$\text{Tyttöjen hyväksymisprosentti } \frac{48+4}{300+20} = \frac{52}{320} = 0,1625 = 16,25 \%$$

$$\text{Poikien hyväksymisprosentti } \frac{3+114}{20+600} = 0,1887 \dots \approx 18,87 \%$$

Poikien hyväksymisprosentti on  $18,87 - 16,25 = 2,62$  prosenttiyksikköä suurempi

Vastaus: Koko oppilaitokseen poikien hyväksymisprosentti on suurempi.

**39. Työväestö  $a$**

Työttömiä alussa  $0,09 a$

Työttömiä nyt  $0,09 a + 80$  eli  $13 \%$

$$0,09 a + 80 = 0,13 a$$

$$0,04 a = 80 \quad | :0,04$$

$$a = 2\,000$$

Työttömiä  $0,13 \cdot 2\,000 = 260$

Vastaus: Työttömiä oli 260.

**40. Henkilö maksaa  $10 \%$  lisäaikaa**

Todellinen taksa  $x$  (mk/viikko)

$$1,1x = 20 \quad | :1,1$$

$$x = \frac{20}{1,1}$$

Laitteen haltija saa  $20 \%$ :n alennuksen, eli maksaa  $80 \%$

$$0,80 \cdot \frac{20}{1,1} = 14,545 \dots$$

Hän säästää joka viikko 20 mk – 14,545 ... mk = 5,454 ... mk

$$\text{Aika viikkoina, jolloin laite maksettu} \frac{535 \text{mk}}{5,454 \dots \text{mk}} \approx 98$$

Vastaus: Laite on säästetty 98 viikossa.

**41.** Vuokra alussa 650 kr

1. nousu, prosenttikerroin  $100 \% + 2,0 \% = 102 \% = 1,02$

Vuokra 1. nousun jälkeen  $1,02 \cdot 650 \text{ kr} = 663 \text{ kr}$

2. nousu, prosenttikerroin  $100 \% + 1,5 \% = 101,5 \% = 1,015$

Vuokra 2. nousun jälkeen  $1,015 \cdot 663 \text{ kr} = 672,945 \text{ kr} \approx 672,95 \text{ kr}$

Uusi kuukausivuokra on 672,95 kr.

Uusi vuosivuokra on  $12 \cdot 672,95 \text{ kr} = 8075,40 \text{ kr}$ .

Kokonaisnousukerroin  $1,02 \cdot 1,015 = 1,0353$

Nousua yhteensä  $103,53 \% - 100 \% = 3,53 \%$

Vastaus: Uusi vuosivuokra on 8 075,40 kr ja nousu yhteensä 3,53 %.

## 2. INDEKSILUVUT

**42.** Lasketaan esimerkkinä vuoden 1989 indeksi, muut tehdään samoin.

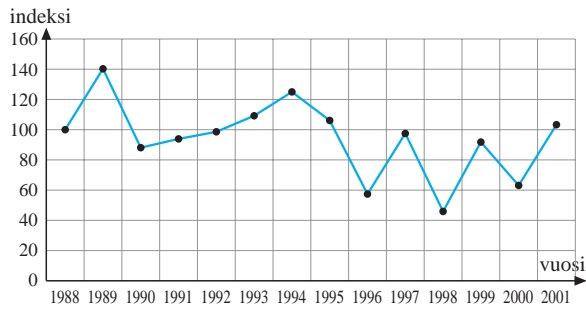
Perusvuosi 1988, sato 1 743

Vuosi 1989, sato 2 445

$$\text{Indeksiluku} \frac{2\,445}{1\,743} \cdot 100 \approx 140,3$$

Vuosi	Hunajasato 1 000 kg	Indeksi
1988	1 743	100
1989	2 445	140,3
1990	1 535	88,1
1991	1 636	93,9
1992	1 718	98,6
1993	1 904	109,2
1994	2 100	120,5
1995	1 850	106,1
1996	1 000	57,4
1997	1 700	97,5
1998	800	45,9
1999	1 600	91,8
2000	1 100	63,1
2001	1 800	103,3

Piirretään viivadiagrammi



43. Lasketaan esimerkkinä vuoden 1998 indeksi, muut tehdään samoin.

Perusvuosi 1997, kilohinta 7,29 (€)

Vuosi 1998, kilohinta 7,31 (€)

$$\text{Indeksiluku} \frac{7,31}{7,29} \cdot 100 \approx 100,3$$

Vuosi	Kahvin kilohinta (€)	Indeksi
1997	7,29	100
1998	7,31	100,3
1999	5,90	80,9
2000	6,14	84,2

Vuoden 2000 indeksi on 84,2, joten kahvin kilohinta on 84,2 % vuoden 1997 kilohinnasta.

Kilohinnan pienennys  $100\% - 84,2\% = 15,8\%$

Vastaus: Kilohinta on pienentynyt 15,8 %.

44. Lasketaan esimerkkinä vuoden 1920 indeksi, muut tehdään samoin.

Perusvuosi 1900, syntyneitä 86 339

Vuosi 1920, syntyneitä 84 714

$$\text{Indeksiluku} \frac{84\,714}{86\,339} \cdot 100 \approx 98,1$$

Vuosi	Syntyneitä	Indeksi
1900	86 339	100
1920	84 714	98,1
1940	65 849	76,3
1960	82 129	95,1
1980	63 064	73,0
2000	56 742	65,7

a) Vuoden 1960 indeksi on 95,1, joten syntyneitä on 95,1 % vuoden 1900 määrästä.

Vähennystä on tapahtunut  $100\% - 95,1\% = 4,9\%$

b) Vuoden 2000 indeksi on 65,7, joten syntyneitä on 65,7 % vuoden 1900 määrästä.

Vähennystä  $100\% - 65,7\% = 34,3\%$

Vastaus: Syntyneitä on a) 4,9 %, b) 34,3 % vähemmän kuin vuonna 1900.

45. Lasketaan esimerkkinä vuoden 1920 indeksi, muut tehdään samoin.

Perusvuosi 1900, solmittuja avioliittoja 18 295

Vuosi 1920, solmittuja avioliittoja 23 604

$$\text{Indeksiluku} \frac{23\,604}{18\,295} \cdot 100 \approx 129,02$$

Vuosi	Solmittuja liittoja	Indeksi
1900	18 295	100
1920	23 604	129,02
1940	30 778	168,23
1960	32 834	179,47
1970	40 730	222,63
1980	29 388	160,63
2000	26 762	146,28

a) Vuoden 1970 indeksi on 222,63, joten solmittujen liittojen määrä 222,63 % vuoden 1900 määrästä.

Kasvua  $222,63\% - 100\% = 122,63\%$

b) Vuoden 2000 indeksi on 146,28, joten solmittujen liittojen määrä on 146,28 % vuoden 1900 määrästä.

Kasvua  $146,28\% - 100\% = 46,28\%$

Vastaus: Solmittujen liittojen määrä on kasvanut a) 122,63 %, b) 46,28 % vuodesta 1900.

46. Lasketaan esimerkkinä vuoden 1998 indeksi, muut tehdään samoin.

Perusvuosi 1997, makaronin kilohinta 1,27 (€)

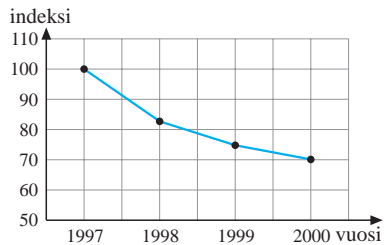
Vuosi 1998, makaronin kilohinta 1,05 (€)

$$\text{Indeksi} \frac{1,05}{1,27} \cdot 100 \approx 82,7$$

Vuosi	Kilohinta (€)	Indeksi
1997	1,27	100
1998	1,05	82,7
1999	0,95	74,8
2000	0,89	70,1

Vuoden 2000 indeksi 70,1, joten kilohinta on 70,1 % vuoden 1997 kilohinnasta.

Vähenneminen  $100\% - 70,1\% = 29,9\%$



Vastaus: Makaronin kilohinta on laskenut 29,9 % vuodesta 1997 vuoteen 2000.

47. Lasketaan esimerkkinä vuoden 1998 indeksi, muut tehdään samoin.

Elokuvalippu

Perusvuosi 1997, hinta 6,76 (€)

Vuosi 1998, hinta 6,82 (€)

$$\text{Indeksi} = \frac{6,82}{6,76} \cdot 100 \approx 100,9$$

Keskituntiansio

Perusvuosi 1997, ansio 10,84 (€)

Vuosi 1998, ansio 11,10 (€)

$$\text{Indeksi} = \frac{11,10}{10,84} \cdot 100 \approx 102,4$$

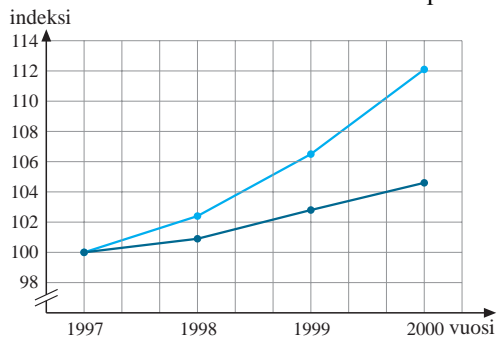
Elokuvalippu

Keskituntiansio

Vuosi	Hinta (€)	Indeksi	Vuosi	Ansio (€)	Indeksi
1997	6,76	100	1997	10,84	100
1998	6,82	100,9	1998	11,10	102,4
1999	6,95	102,8	1999	11,54	106,5
2000	7,07	104,6	2000	12,15	112,1

Indeksilukutaulukon perusteella voidaan sanoa, että keskituntiansio ovat kasvaneet voimakkaammin kuin elokuvalippujen hinnat.

Piirretään samaan koordinaatistoon kumpienkin indeksisarjat.



Diagrammissa muutos näkyy siitä, että ansion indeksisarja kulkee ylempänä ja kasvaa jyrkemmin.

48. Inflaatioprosentti tarkoittaa hintaindeksin nousuprosenttia.

a)

Vuosi	Indeksi
1991	1 300
1993	1 361

$$\text{Hintaindeksin muutos } \frac{1\,361}{1\,300} = 1,0469 \dots$$

$$\text{Inflaatioprosentti } 104,69 \dots \% - 100 \% \approx 4,7 \%$$

b) Keskimääräisellä muutosprosentilla tarkoitetaan, että muutos on joka vuosi sama, eli tulee joka kerta  $q$ -kertaiseksi.

Vuodet 1991 - 1993, eli 2 vuotta

$$q^2 = 1,0469 \dots \quad \left| \sqrt[2]{\phantom{x}} \right.$$
$$q = \pm \sqrt{1,0469 \dots} \quad | q > 0$$
$$q = 1,0231 \dots$$

Keskimääräinen inflaatioprosentti

$$102,31 \dots \% - 100 \% \approx 2,3 \%$$

Vastaus: a) Inflaatioprosentti on 4,7 %. b) Keskimääräinen inflaatioprosentti on 2,3 %.

49. Inflaatioprosentti tarkoittaa hintaindeksin nousuprosenttia

a)

Vuosi	Indeksi
2000	1 501
2002	1 563

$$\text{Hintaindeksin muutos } \frac{1\,563}{1\,501} = 1,0413 \dots$$

$$\text{Inflaatioprosentti } 104,13 \dots \% - 100 \% \approx 4,1 \%$$

b) Keskimääräisellä muutosprosentilla tarkoitetaan, että muutos on joka vuosi sama, eli tulee joka kerta  $q$ -kertaiseksi.

Vuodet 2000 - 2002, eli 2 vuotta

$$q^2 = 1,0413 \dots \quad \left| \sqrt[2]{\phantom{x}} \right.$$
$$q = \pm \sqrt{1,0413 \dots} \quad | q > 0$$
$$q = 1,0204 \dots$$

Keskimääräinen inflaatioprosentti

$$102,04 \dots \% - 100 \% \approx 2,0 \%$$

Vastaus: a) Inflaatioprosentti on 4,1 %. b) Keskimääräinen inflaatioprosentti on 2,0 %.

50. Jotta reaaliarvo on sama on hintojen muutos pitää olla sama kuin indeksin muutos.

a)

Vuosi	Hinta (€)	Indeksi
1973	0,76	284
2002	$x$	1 563

Hinta ja indeksi ovat suoraan verrannolliset

$$\frac{0,76}{x} = \frac{284}{1\,563}$$
$$284x = 0,76 \cdot 1\,563 \quad | :284$$
$$x \approx 4,18$$

b)

Vuosi	Hinta (€)	Indeksi
1988	$x$	1 104
2002	1,20	1 563

Hinta ja indeksi ovat suoraan verrannolliset

$$\frac{x}{1,20} = \frac{1\,104}{1\,563}$$
$$1\,563x = 1,20 \cdot 1\,104 \quad | :1\,563$$
$$x \approx 0,85$$

Vastaus: a) Pehmelelu maksaisi 4,18 €. b) Kahvikupponen maksoi 0,85 €.

51. a) Inflaatioprosentti tarkoittaa hintaindeksin nousuprosenttia

Vuosi	Indeksi
1992	1 333
2002	1 563

Hintaindeksin muutos  $\frac{1\,563}{1\,333} = 1,1725 \dots$

Inflaatioprosentti  $117,25 \dots \% - 100 \% \approx 17,3 \%$

b) Rahan arvo ja indeksi ovat kääntäen verrannolliset

Vuosi	Rahan arvo	Indeksi
1992	$a$	1 333
2002	$x$	1 563

Kääntäen verrannollisten suureiden tulo on vakio.

$$1\,563x = 1333a \quad | :1563$$
$$x = \frac{1333a}{1563}$$
$$x = 0,8528 \dots a$$

Rahan arvon alenemisprosentti  $100\% - 85,28\% \approx 14,7\%$

Vastaus: a) Inflaatio prosentti oli 17,3 %. b) Rahan arvo aleni 14,7 %.

**52.** Muutetaan vuoden 1983 viinerin hinta euroiksi.

$$1 \text{ €} = 5,94573 \text{ mk}$$

$$1,60 \text{ mk} = \frac{1,60}{5,94573} \text{ €} \approx 0,27 \text{ €}$$

Hinta on kääntäen verrannollinen rahan arvoon.

Vuosi	Rahan arvo	Hinta (€)
1983	$a$	0,27
2002	$x$	1,60

Kääntäen verrannollisten suureiden tulo on vakio

$$1,60x = 0,27a \quad | :1,60$$

$$x = 0,16875a$$

Rahan arvo on alentunut  $100\% - 16,875\% \approx 83,1\%$

Keskimääräisellä muutosprosentilla tarkoitetaan, että joka vuosi rahan arvo on tullut  $q$ -kertaiseksi.

Vuodet 1983 - 2002 eli 19 vuotta

$$q^{19} = 0,16875 \quad | \sqrt[19]{\phantom{x}}$$

$$q = 0,9106 \dots$$

Keskimääräinen alenemisprosentti  $100\% - 91,06\% \approx 8,9\%$

Vastaus: Rahan arvo on alentunut 83,1 %. Keskimäärin arvo on alentunut 8,9 % vuodessa.

**53.** Muutetaan vuoden 1972 viikkoraha euroiksi.

$$1 \text{ €} = 5,94573 \text{ mk}$$

$$10 \text{ mk} = \frac{10}{5,94573} \text{ €} \approx 1,68 \text{ €}$$

Vuosi	Raha (€)	Indeksi
1972	1,68	254
2002	$x$	1 563

Käyttöraha ja indeksi ovat suoraan verrannolliset

$$\frac{1,68}{x} = \frac{254}{1\,563}$$

$$254x = 1,68 \cdot 1\,563 \quad | :254$$

$$x \approx 10,30$$

Vastaus: Janille pitäisi antaa 10,30 €.

54.

Vuosi	Raha (€)	Indeksi
1996	$x$	1 398
2002	10	1 563

Rahamäärä on suoraan verrannollinen indeksiin.

$$\frac{x}{10} = \frac{1\,398}{1\,563}$$
$$1\,563x = 10 \cdot 1\,398 \quad | : 1\,563$$
$$x \approx 8,94$$

Vastaus: Vuonna 1996 olisi pitänyt olla 8,94 €.

55. a) Hinnat alussa  $a$

1. nousu, prosenttikerroin  $100\% + 180\% = 280\% = 2,80$   
Hinnat  $2,80 \cdot a$

2. nousu, prosenttikerroin  $100\% + 125\% = 225\% = 2,25$   
Hinnat  $2,25 \cdot 2,8a = 6,3a$

3. nousu, prosenttikerroin  $100\% + 60\% = 160\% = 1,6$   
Hinnat  $1,6 \cdot 6,3a = 10,08a$

Hinnat nousivat yhteensä  $1\,008\% - 100\% = 908\%$

b) Keskimääräisellä nousulla tarkoitetaan, että hinnat tulivat joka kerta  $q$ -kertaiseksi.  
Nousukertoja 3

$$q^3 a = 10,08a \quad | : a$$
$$q^3 = 10,08 \quad | \sqrt[3]{\phantom{x}}$$
$$q = 2,1601\dots$$

Keskimääräinen nousuprosentti  
 $216,01 \dots\% - 100\% \approx 116\%$

Vastaus: a) Hinnat nousivat yhteensä 908 %. b) Hinnat nousivat keskimäärin 116 %.

56. Muutetaan ensin kymmenen vuoden takainen palkka nykytasolle. Palkka ja indeksi ovat suoraan verrannolliset.

Vuosi	Palkka (€)	Indeksi
Ennen	2 465	1 250
Nyt	$x$	1 500

$$\frac{2\,465}{x} = \frac{1\,250}{1\,500}$$

$$1\,250x = 2\,465 \cdot 1\,500 \quad | :1\,250$$

$$x = 2\,958$$

Reaalipalkan eli ostokyvyn nousu  $\frac{3\,267}{2\,958} = 1,1044 \dots$

Nousuprosentti  $110,44 \dots \% - 100 \% \approx 10,4 \%$

Vastaus: Ostokyky nousi 10,4 %.

**57.** Alman palkka alussa  $p$

Korotuskerroin  $100 \% + 16 \% = 116 \% = 1,16$

Alman palkka 5 vuoden kuluttua  $1,16p$

Indeksi alussa 100

Indeksi 5 vuoden kuluttua 110, koska nousua 10 %

Muutetaan Alman palkka  $p$  indeksin mukaisesti. Palkka ja indeksi ovat suoraan verrannolliset.

Vuosi	Palkka	Indeksi
Alussa	$p$	100
Lopussa	$x$	110

$$\frac{p}{x} = \frac{100}{110}$$

$$100x = 110p \quad | :100$$

$$x = 1,1p$$

Reaalipalkan eli ostokyvyn nousu  $\frac{1,16p}{1,1p} = 1,0545 \dots$

Nousuprosentti  $105,45 \dots \% - 100 \% \approx 5,5 \%$

Vastaus: Ostokyky kasvoi 5,5 %.

**58. a)** Inflaatioprosentti tarkoittaa hintaindeksin nousuprosenttia.

Hintaindeksi vuonna 1997 oli 101,2

Hintaindeksi vuonna 2002 oli 112

Muutos  $\frac{112}{101,2} = 1,10671 \dots$

Inflaatio  $110,671 \dots \% - 100 \% \approx 10,7 \%$

b) Keskimääräisellä inflaatioprosentilla tarkoitetaan, että joka vuosi hinnat olisivat tulleet yhtämoninkertaisiksi, prosenttikerroin  $q$

$$q^5 = 1,10671 \dots \quad \left| \sqrt[5]{\phantom{x}} \right.$$

$$q = 1,020487 \dots$$

Keskimääräinen inflaatioprosentti  $102,0486\% - 100\% \approx 2,0\%$

c) Inflaatioprosentti tarkoittaa hintaindeksin nousuprosenttia.

Hintaindeksi vuonna 1995  $x$

Hintaindeksi vuonna 1996 100

Inflaatioprosentti oli 1,1 %, eli hintaindeksi nousi 1,1 %

Prosenttikerroin  $100\% + 1,1\% = 101,1\% = 1,011$

$$1,011x = 100 \quad \left| :1,011 \right.$$

$$x \approx 98,9$$

d) Ostovoima on kääntäen verrannollinen indeksiin.

Vuosi	Ostovoima	Indeksi
2000	$a$	107
2002	$x$	112

Kääntäen verrannollisten suureiden tulo on vakio.

$$112x = 107a \quad \left| :112 \right.$$

$$x = 0,9553 \dots a$$

Ostovoima pieneni  $100\% - 95,53 \dots\% \approx 4,5\%$

e) Palkka on suoraan verrannollinen indeksiin.

Muutetaan vuoden 1998 palkka vuoden 2002 tasolle.

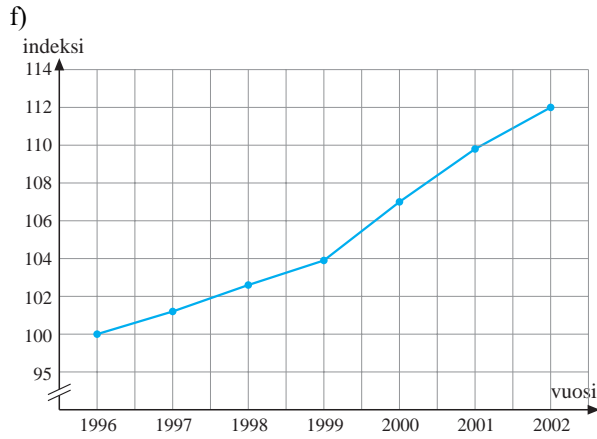
Vuosi	Palkka (€)	Indeksi
1998	2 000	102,6
2002	$x$	112

$$\frac{2\,000}{x} = \frac{102,6}{112}$$

$$102,6x = 2\,000 \cdot 112 \quad \left| :102,6 \right.$$

$$x \approx 2\,183,24$$

Reaaliansion nousu  $2\,380\,€ - 2\,183,24\,€ = 196,76\,€$



Inflaatioprosentti on kasvanut eniten, kun kuvaaja kasvaa jyrkimmin.

Vastaus: a) Inflaatio prosentti on 10,7 %. b) Keskimääräinen inflaatioprosentti on 2,0 %. c) Hintaindeksi oli 98,9. d) Ostovoima pieneni 4,5 % e) Reaaliansio kasvoi 196,76 €.

**59.** Rahan arvo ja hinta ovat kääntäen verrannolliset.

Vuosi	Rahan arvo	Hinta (€)
1972	$a$	84,09
2002	$x$	10

Kääntäen verrannollisten suureiden tulo on vakio.

$$10x = 84,09a \quad | :10$$

$$x = 8,409 \dots a$$

Rahan arvo on kasvanut  $840,9\% - 100\% = 740,9\%$

Vastaus: Rahan arvo olisi kasvanut 740,9 %.

**60.** a) Lasketaan esimerkkinä vuoden 1998 indeksit, muut tehdään samoin.

Kaikki palkansaajat

Perusvuosi 1997, indeksi 106,7

Vuosi 1998, indeksi 110,5

$$\text{Uusi indeksi} = \frac{110,5}{106,7} \cdot 100 \approx 103,6$$

Kuntasektori

Perusvuosi 1997, indeksi 106,0

Vuosi 1998, indeksi 109,5

$$\text{Uusi indeksi} = \frac{109,5}{106} \cdot 100 \approx 103,3$$

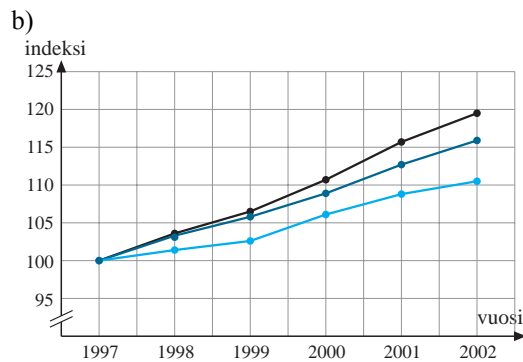
Elinkustannusindeksi

Perusvuosi 1997, indeksi 1 415

Vuosi 1998, indeksi 1 435

$$\text{Uusi indeksi} = \frac{1\,435}{1\,415} \cdot 100 \approx 101,4$$

Vuosi	Kaikkien palkansaajien ansiotuloindeksi	Indeksi perusvuosi 1997	Kuntasektorin ansiotuloindeksi	Indeksi perusvuosi 1997	Elinkustannus - indeksi	Indeksi perusvuosi 1997
1997	106,7	100	106,0	100	1 415	100
1998	110,5	103,6	109,5	103,3	1 435	101,4
1999	113,6	106,5	112,1	105,8	1 452	102,6
2000	118,1	110,7	115,4	108,9	1 501	106,1
2001	123,4	115,7	119,5	112,7	1 539	108,8
2002	127,5	119,5	122,9	115,9	1 563	110,5



61. a) Deflatointi tarkoittaa, että muutetaan vuokrat aikaisempaa ajankohtaa vastaaviksi, tässä 1990 tasolle.

Deflatoidaan esimerkkinä vuoden 1995 vuokra, muut lasketaan samoin.

Vuokrat ja indeksi ovat suoraan verrannolliset.

Vuosi 1990, vuokra  $x$  (€/m<sup>2</sup>/kk), indeksi 1 248

Vuosi 1995, vuokra 5,72 (€/m<sup>2</sup>/kk), indeksi 1 390

$$\frac{x}{5,72} = \frac{1\,248}{1\,390} \quad | \cdot 5,72$$

$$x \approx 5,14$$

Vuosi	Vuokra (€/m <sup>2</sup> /kk)	Indeksi	Deflatoitu vuokra (€/m <sup>2</sup> /kk)
1990	4,14	1 248	4,14
1995	5,72	1 390	5,14
1998	6,59	1 435	5,73
1999	6,81	1 452	5,85
2000	7,10	1 501	5,90
2001	7,42	1 539	6,02
2002	7,66	1 563	6,12

b) Inflatointi tarkoittaa, että muutetaan vuokrat myöhäisempää ajankohtaa vastaaviksi, tässä 2002 tasolle.

Inflatoidaan esimerkkinä vuoden 1990 vuokra, muut lasketaan samoin.

Vuokra ja indeksi ovat suoraan verrannolliset.

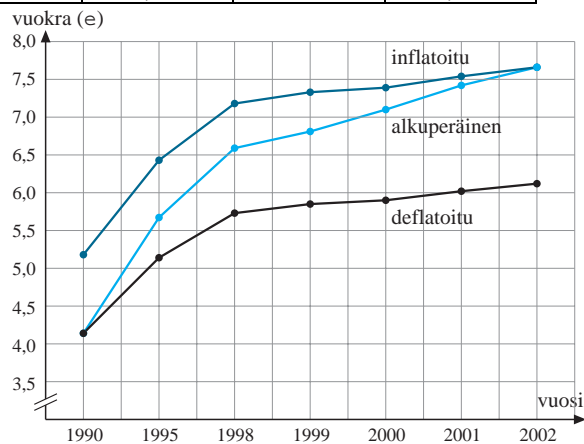
Vuosi 1990, vuokra 4,14(€/m<sup>2</sup> /kk), indeksi 1 248

Vuosi 2002, vuokra  $x$  (€/m<sup>2</sup> /kk), indeksi 1 563

$$\frac{x}{4,14} = \frac{1\,563}{1\,248} \quad | \cdot 4,14$$

$$x \approx 5,18$$

Vuosi	Vuokra (€/m <sup>2</sup> /kk)	Indeksi	Inflatoitu vuokra (€/m <sup>2</sup> /kk)
1990	4,14	1 248	5,18
1995	5,72	1 390	6,43
1998	6,59	1 435	7,18
1999	6,81	1 452	7,33
2000	7,10	1 501	7,39
2001	7,42	1 539	7,54
2002	7,66	1 563	7,66



Vastaus: Realivuokrat ovat nousseet.

**62.**

Tuotteen hinta  $a$

Alennuskertoin  $100\% - 12\% = 88\% = 0,88$

	Hinta ennen	Hinta nyt
Raaka-aine	$0,2a$	$0,88 \cdot 0,2a$
Muut	$0,8a$	$0,8a$

Tuotteen kokonaishinta alennuksen jälkeen  $0,88 \cdot 0,2a + 0,8a = 0,976a$

Hinnan alennus  $100\% - 97,6\% = 2,4\%$

Vastaus: Hintaa voitaisiin alentaa 2,4 %.

**63.**

	Määrä	1998 (€)	1999 (€)	2000 (€)	2001 (€)
Vehnä-leipä	600 g = 0,6 kg	$0,6 \cdot 1,96 \approx 1,18$	$0,6 \cdot 1,98 \approx 1,19$	$0,6 \cdot 1,98 \approx 1,19$	$0,6 \cdot 2,06 \approx 1,24$
Keitto-kinkku	400 g = 0,4 kg	$0,4 \cdot 12,68 \approx 5,07$	$0,4 \cdot 12,41 \approx 4,96$	$0,4 \cdot 12,25 \approx 4,90$	$0,4 \cdot 12,57 \approx 5,03$
Meet-vursti	150 g = 0,15 kg	$0,15 \cdot 12,84 \approx 1,93$	$0,15 \cdot 12,47 \approx 1,87$	$0,15 \cdot 12,45 \approx 1,87$	$0,15 \cdot 12,62 \approx 1,89$
Juusto	400 g = 0,4 kg	$0,4 \cdot 8,52 \approx 3,41$	$0,4 \cdot 8,72 \approx 3,49$	$0,4 \cdot 8,97 \approx 3,59$	$0,4 \cdot 9,62 \approx 3,85$
Ostos-kassi		11,59	11,51	11,55	12,01

Lasketaan esimerkkinä vuoden 1999 ostoskassin indeksi, muut tehdään samoin.

Perusvuosi 1998, ostoskassi 11,59 (€)

Vuosi 1999, ostoskassi 11,51 (€)

$$\text{Indeksi} = \frac{11,51}{11,59} \cdot 100 \approx 99,3$$

Vuosi	Ostoskassi (€)	Indeksi
1998	11,59	100
1999	11,51	99,3
2000	11,55	99,7
2001	12,01	103,6

**64. Seuramatkan hinta  $a$** Lennon osuus 50 %, lennon hinta  $0,50 a$ Polttoaineen osuus lennosta 30 %, polttoaineen hinta  $0,3 \cdot 0,50 a = 0,15 a$ Polttoaineen lisäkustannus  $0,10 \cdot 0,15 a = 0,015 a$ 

Koska vain polttoaine kallistuu, niin koko matka kallistuu tämän verran.

Seuramatkan hinnankorotus  $\frac{0,015a}{a} = 1,5 \%$ Vastaus: Kokonaiskustannukset nousevat 1,5 %.**65. Korin alkuperäinen hinta  $a$** 

Tuote	Hinta	Korotuskerroin	Uusi hinta
A	$0,35 a$	$100 \% + 2,0 \% = 102,0 \% = 1,02$	$1,02 \cdot 0,35 a = 0,357 a$
B	$0,25 a$	$100 \% - 1,0 \% = 99,0 \% = 0,99$	$0,99 \cdot 0,25 a = 0,2475 a$
C	$0,20 a$	$100 \% + 4,4 \% = 104,4 \% = 1,044$	$1,044 \cdot 0,20 a = 0,2088 a$
D	$0,14 a$	$100 \% - 5,8 \% = 94,2 \% = 0,942$	$0,942 \cdot 0,14 a = 0,13188 a$
E	$0,06 a$	$100 \% + 6,2 \% = 106,2 \% = 1,062$	$1,062 \cdot 0,06 a = 0,06372 a$
Yht.	$a$		$1,0089 a$

Korin uusi hinta on  $1,0089 a$ Hinta on kallistunut  $100,89 \% - 100 \% \approx 0,9 \%$ Vastaus: Korin hinta on noussut 0,9 %.**66. a) Kulutus  $a$** "Vaatetus ja jalkineet" 5 % eli  $0,05 a$ Menojen nousu  $0,03 \cdot 0,05 a = 0,0015 a$ Nousu on kulutuksesta  $0,0015 = 0,15 \%$ 

Kulutuksen nousu 0,15 prosentilla tarkoittaa indeksin nousua 0,15 pisteellä verrattuna indeksiin 100.

b) Indeksin lasku 1 pisteellä tarkoittaa laskua 1 prosentilla, kun indeksi on 100.

"vaatetus ja jalkineet"-ryhmän osuus on 5, kun indeksiluku on 100.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia 1 piste on 5:stä.

$$\frac{1}{5} = 20 \%$$

Vastaus: a) Vaikutus on 0,15 pistettä. b) Ryhmän pitäisi nousta 20 %.

**67. Kuukausimenot  $a$** a) Kirjamenot  $0,08 a$ 

Korotus  $0,025 \cdot 0,080a = 0,002 a$

Kulttuurimenot  $0,20 a$ 

Vähennys  $0,025 \cdot 0,20a = 0,005a$

Koska muut pysyvät ennallaan muutos aiheutuu vain näistä kahdesta.

Muutos yhteensä  $0,002 a - 0,005a = -0,003 a$

Vähennys kokonaismenoista on  $0,003 = 0,3 \%$ b) Puhelinmenot  $0,15 a$ 

Vähennys  $0,015 \cdot 0,15a = 0,00225a$

Koska muut menot pysyvät ennallaan, vähennys on  $0,00225 = 0,225 \% \approx 0,2 \%$ Vastaus: a) Menot pienenevät  $0,3 \%$ . b) Menot pienenevät  $0,2 \%$ .**68. Muutetaan jokaisen vuoden markka vastaamaan aina edellistä vuotta.**

Vuosi	Kerroin (1980)	Kerroin (edellinen vuosi)
1963	4,30	
1964	4,00	$\frac{4,00}{4,30} \approx 0,93$
1965	3,82	$\frac{3,82}{4,00} \approx 0,96$
1966	3,74	$\frac{3,74}{3,82} \approx 0,98$
1967	3,64	0,97
1968	3,28	0,90
1969	3,16	0,86
1970	3,04	0,96
1971	2,89	0,95
1972	2,67	0,92
1973	2,27	0,85
1974	1,82	0,80
1975	1,61	0,88
1976	1,44	0,89
1977	1,30	0,90
1978	1,24	0,95
1979	1,14	0,92
1980	1,00	0,88

Kerroin on pienin vuonna 1974, joten silloin inflaatio eteni nopeimmin.

Vastaus: Inflaatio eteni nopeimmin vuonna 1974.

69. Korko 5 %:n tililtä  $0,05 \cdot 5\,000 \text{ mk} = 250 \text{ mk}$   
 Korko  $p$  %:n tililtä  $0,01 p \cdot 10\,000 \text{ mk} = 100 p \text{ mk}$   
 Korko 6 %:n tililtä  $0,06 \cdot 15\,000 \text{ mk} = 900 \text{ mk}$

Korot yhtä suuret

$$250 + 100 p = 900$$

$$100 p = 650 \quad | :100$$

$$p = 6,5$$

Vastaus: Korko prosentti  $p$  on 6,5.

70. Muutetaan vuoden 1938 kahvin hinta vastaamaan vuotta 1946.

Hinta ja indeksi ovat suoraan verrannolliset.

Vuosi	Hinta (mk)	Indeksi
1938	50	100
1946	$x$	460

$$\frac{50}{x} = \frac{100}{460}$$

$$100x = 50 \cdot 460 \quad | :100$$

$$x = 230$$

Hinnan nousu  $\frac{700}{230} = 3,0434 \dots$

Nousuprosentti  $304,34 \dots \% - 100 \% \approx 204 \%$

Vastaus: Hinta on 204 % suurempi.

71.

Alkupääoma  $a$

Tilin A korko  $0,035a$

Tilin A koron indeksilisiä  $0,01pa$

Vähennetään 30 % vero  $(0,035a + 0,01pa) \cdot 0,70$

Tilin B korko  $0,035a$

Tilin B koron indeksilisiä  $0,01 \cdot \frac{p}{2} \cdot a$

Korkotulot oltava yhtä suuret

$$(0,035a + 0,01pa) \cdot 0,70 = 0,035a + 0,01 \cdot \frac{p}{2} \cdot a$$

$$0,0245a + 0,007pa = 0,035a + 0,005pa \quad | :a$$

$$0,0245 + 0,007p = 0,035 + 0,005p$$

$$0,002p = 0,0105 \quad | :0,002$$

$$p = 5,25$$

Vastaus: 5,25 %

72. a) Rahan arvo on suoraan verrannollinen indeksiin.

Vuosi	Raha (kr)	Indeksi
1998	1 000	257
2002	$x$	272,8

$$\frac{1\,000}{x} = \frac{257}{272,8}$$

$$257x = 1\,000 \cdot 272,8 \quad | :257$$

$$x \approx 1\,061,48$$

b) Inflaatioprosentti on sama kuin indeksin nousuprosentti.

$$\text{Indeksin nousu } \frac{272,8}{257} = 1,0614 \dots$$

Inflaatioprosentti  $106,14 \dots \% - 100 \% \approx 6,1 \%$

Vastaus: a) Reaaliarvo muuttui 61,48 kr. b) Inflaatioprosentti oli 6,1 %

### 3. VALUUTAT

73. Setelivaluutan ostokurssin mukaan  $1 \text{ €} = 1,1497 \text{ \$}$

Tällöin  $2\,600 \text{ €} = 2\,600 \cdot 1,1497 \text{ \$} = 2\,989,22 \text{ \$}$

Vastaus: 2 600 euroa on 2 989,22 USD.

74. Pankki myy seteleitä Janille, joten käytetään myyntikurssia.

$1 \text{ €} = 129,2800 \text{ JPY} \quad | :129,2800$

$$1 \text{ JPY} = \frac{1}{129,2800} \text{ €}$$

Tällöin  $1\,000 \text{ JPY} = \frac{1\,000}{129,2800} \text{ €} \approx 7,74 \text{ €}$

Vastaus: Jani voi ostaa 1 000 Japanin jeniä 7,74 eurolla.

75. Tehdään muunnos muuttamalla jenit ensin euroiksi ja sitten eurot dollareiksi.

Japanin jenin tilivaluutan myyntikurssi

$1 \text{ €} = 133,3300 \text{ JPY}$

Jenit euroiksi  $\frac{4\,500}{133,3300} \text{ €} \approx 33,75 \text{ €}$

Yhdysvaltain dollarin tilivaluutan myyntikurssi

$1 \text{ €} = 1,1294 \text{ USD}$

Eurot dollareiksi  $33,75 \cdot 1,1294 \text{ USD} \approx 38,12 \text{ USD}$

Vastaus: Rahalla saa 38,12 USD.

**76.** Pankki myy kruunuja setelikurssin mukaan  
Ruotsin kruunun setelivaluutan myynti kurssi  
1 € = 8,9819 SEK

$$\text{Ruotsin kruunut maksoivat } \frac{1000}{8,9819} \text{ €} \approx 111,34 \text{ €}$$

Norjan kruunun setelivaluutan myynti kurssi  
1 € = 8,1115 NOK

$$\text{Norjan kruunut maksoivat } \frac{1000}{8,1115} \text{ €} \approx 123,28 \text{ €}$$

Vaihtopalkkio 5,00 €

Kruunut maksoivat yhteensä  $111,34 \text{ €} + 123,28 \text{ €} + 5,00 \text{ €} = 239,62 \text{ €}$

Vastaus: Rahanvaihto maksoi 239,62 €.

**77.** Pankki myy Yhdysvaltain dollareita setelivaluutan myyntikurssin mukaan  
Yhdysvaltain dollarin setelivaluutan myyntikurssi  
1 € = 1,1157 USD

Martilla on käytettävissä rahaa valuutan vaihtoon pankin perimän palkkion jälkeen

$$1\,500 \text{ €} - 2,50 \text{ €} = 1\,497,50 \text{ €}$$

$$\text{Rahalla saatava dollareiden määrä } 1\,497,50 \cdot 1,1157 \text{ USD} \approx 1\,670,76 \text{ USD}$$

Vastaus: Martti sai 1 670,76 Yhdysvaltain dollaria.

**78.** Pankki ostaa Haraldin kruunut setelivaluutan ostokurssin mukaan  
Norjan kruunun setelivaluutan ostokurssi  
1 € = 8,4549 NOK

$$\text{Tällöin } 3\,000 \text{ NOK} = \frac{3\,000}{8,4549} \text{ €} \approx 354,82 \text{ €}$$

Vastaus: Harald sai 354,82 euroa.

**79.** Tehdään muunnos muuttamalla Australian dollarit ensin euroiksi ja sitten eurot Norjan kruunuiksi.

Pankki ostaa Australian dollareita

Australian dollarin setelivaluutan ostokurssi

$$1 \text{ €} = 1,7450 \text{ AUD}$$

$$\text{Australian dollarit euroiksi } \frac{1500}{1,7450} \text{ €} \approx 859,60 \text{ €}$$

Norjan kruunun setelivaluutan myyntikurssi

$$1 \text{ €} = 8,1115 \text{ NOK}$$

$$\text{Eurot kruunuiksi } 859,60 \cdot 8,1115 \text{ USD} \approx 6\,972,64 \text{ NOK}$$

Vastaus: Virpi sai 6 972,64 NOK.

**80.** Yritysten kesken käytävä kauppa tapahtuu tilivaluuttakurssin mukaan.  
Yhdysvaltain dollarin tilivaluutan ostokurssi

$$1 \text{ €} = 1,1358 \text{ USD}$$

$$\text{Kauppahinta euroina } 200\,000 \cdot 8,96 \text{ €} \approx 1\,792\,000 \text{ €}$$

$$\text{Kauppahinta dollareina } 1\,792\,000 \cdot 1,1358 \text{ USD} = 2\,035\,353,60 \text{ USD}$$

Vastaus: Lapaset maksoivat 2 035 353,50 USD.

**81.** Tehdään muunnos muuttamalla Yhdysvaltain dollarit ensin euroiksi ja sitten eurot Sveitsin frangeiksi.

Pankki ostaa Yhdysvaltain dollareita

Yhdysvaltain dollarin ostokurssi

1 € = 1,1661 USD

Yhdysvaltain dollarit euroiksi  $\frac{1000}{1,1661} \text{ €} \approx 857,56 \text{ €}$

Sveitsin frangin myyntikurssi

1 € = 1,5150 CHF

Eurot frangeiksi  $857,56 \cdot 1,5150 \text{ CHF} \approx 1\,299,20 \text{ CHF}$

Vastaus: Turisti sai 1 299,20 CHF.

**82.** Tehdään muunnos muuttamalla Australian dollarit ensin euroiksi ja sitten eurot Japanin jeneiksi

Australian dollarin ostokurssi

1 € = 1,7090 AUD

Australian dollari euroiksi  $1 \text{ AUD} = \frac{1}{1,7090} \text{ €} = 0,5851... \text{ €}$

Japanin jenin ostokurssi

1 € = 134,2300 JPY

Eurot jeneiksi  $0,5851... \cdot 134,2300 \text{ JPY} \approx 78,543 \text{ JPY}$

Vastaus: Australian dollarin ja Japanin jenin välinen valuuttakurssi 1 AUD = 78,543 JPY.

### Devalvaatio ja revalvaatio

**83. a)** Taulukoidaan valuuttakurssit

Aika	EUR	JPY
Alussa	1,00	102,73
Lopussa	1,00	124,39

Euron kurssi nousee, jeni revalvoituu.

Kurssien suhde  $\frac{124,39}{106,92} = 1,1633...$

Revalvaatioprosentti  $116,33... \% - 100 \% \approx 16,3 \%$

**b)** Taulukoidaan valuuttakurssit

Aika	EUR	CHF
Alussa	1,00	1,6051
Lopussa	1,00	1,4524

Euron kurssi laskee, frangi devalvoituu.

Kurssien suhde  $\frac{1,4524}{1,6051} = 0,9048...$

Devalvaatioprosentti  $100 \% - 90,48... \% \approx 9,5 \%$

Vastaus: a) Japanin jeni on revalvoitunut 16,3 % vuoden 2000 lopusta vuoden 2002 loppuun.

b) Sveitsin frangi on devalvoitunut 9,5 % vuoden 1999 lopusta vuoden 2002 loppuun.

**84. Taulukoidaan valuuttakurssit**

Aika	EUR	CYP
Alussa	1,00	0,57316
Lopussa	1,00	0,58713

Lasketaan Kyproksen punnan kurssit euroina.

Kurssi alussa  $1 \text{ €} = 0,57316 \text{ CYP} \quad | : 0,57316$

$$1 \text{ CYP} = \frac{1}{0,57316} \text{ €}$$

$$1 \text{ CYP} = 1,74471 \dots \text{ €}$$

Kurssi lopussa  $1 \text{ €} = 0,58713 \text{ CYP} \quad | : 0,58713$

$$1 \text{ CYP} = \frac{1}{0,58713} \text{ €}$$

$$1 \text{ CYP} = 1,70320 \dots \text{ €}$$

Kurssien suhde  $\frac{1,70320 \dots}{1,74471 \dots} = 0,9762 \dots$

Devalvaatioprosentti  $100 \% - 97,62 \dots \% \approx 2,38 \%$

Vastaus: Kyproksen punta devalvoitui 2,38 %.

**85. Norjan kruunun kurssi euroissa.**

$1 \text{ €} = 8,1170 \text{ NOK} \quad | : 8,1170$

$$1 \text{ NOK} = \frac{1}{8,1170} \text{ €}$$

$$1 \text{ NOK} = 0,1231 \dots \text{ €}$$

Kruunu devalvoituu, joten sen kurssi laskee 7,5 %.

Uusi kurssi  $0,925 \cdot 0,1231 \dots = 0,11395 \dots$

Kruunun uusi kurssi

$1 \text{ NOK} = 0,11395 \dots \text{ €} \quad | : 0,11395 \dots$

$$1 \text{ €} \approx 8,7751 \text{ NOK}$$

Vastaus: Norjan kruunun ja euron välinen kurssi oli  $1 \text{ €} = 8,7751 \text{ NOK}$

**86. a) Kurssi ennen devalvaatiota**

$1 \text{ €} = 46,023 \text{ MMM} \quad | : 46,023$

$$1 \text{ MMM} = \frac{1}{46,023} \text{ €}$$

$$1 \text{ MMM} \approx 0,021728 \text{ €}$$

Kurssi devalvaation jälkeen

$1 \text{ €} = 50,025 \text{ MMM} \quad | : 50,025$

$$1 \text{ MMM} = \frac{1}{50,025} \text{ €}$$

$$1 \text{ MMM} \approx 0,019990 \text{ €}$$

d) Kurssien suhde  $\frac{0,19990}{0,21728} \approx 0,09200$

Devalvaatioprosentti  $100 \% - 92,00 \% = 8,00 \%$

Vastaus: a) Kurssi ennen devalvaatiota 0,021728 ja devalvaation jälkeen 0,019990.  
b) Devalvaatioprosentti oli 8,00 %.

87. Ruplan kurssi nousi, joten euron arvo nousi ruplaan nähden ja ruplan arvo laski euroon nähden.

$$\text{Kurssien suhde } \frac{32,092}{29,596} = 1,08433\dots$$

Euron revalvoitumisprosentti  $108,433\dots\% - 100\% \approx 8,43\%$

Devalvoituminen ja revalvoituminen ovat käänteisiä tapahtumia, joten kurssien suhteen

$$\text{käänteisluku } \frac{29,596}{32,092} = 0,9222\dots$$

Ruplan devalvoitumisprosentti  $100\% - 92,22\dots\% \approx 7,78\%$

Vastaus: Ruplan arvo laski. Devalvaatioprosentti 7,78 % ja revalvaatioprosentti 8,43 %.

88. Euron ja dollarin välinen kurssi alussa

$$1 \text{ €} = a \text{ USD} \quad | : a$$

$$1 \text{ USD} = \frac{1}{a} \text{ €}$$

Dollari devalvoituu 15 %

$$\text{Dollarin uusi kurssi } 0,85 \cdot \frac{1}{a} = \frac{0,85}{a}$$

Tavaran hinta Suomessa ennen devalvaatiota  $b$  €

$$\text{Tavaraa sai Amerikassa yhdellä dollarilla } 1 \text{ USD} : b = \frac{1}{a} : b = \frac{1}{ab} \text{ kappaletta}$$

$$\text{Tavaran yksikköhinta } 1 : \frac{1}{ab} = ab$$

Tavaran hinta Suomessa devalvaation jälkeen  $1,03b$  €

$$\text{Tavaraa sai Amerikassa yhdellä dollarilla } 1 \text{ USD} : b = \frac{0,85}{a} : 1,03b = \frac{0,85}{1,03ab} \text{ kappaletta}$$

$$\text{Tavaran yksikköhinta } 1 : \frac{0,85}{1,03ab} = \frac{1,03ab}{0,85}$$

$$\text{Yksikköhintojen suhde } \frac{1,03ab}{0,85} = \frac{1,03ab}{0,85} : ab = \frac{1,03ab}{0,85} \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1,03}{0,85} = 1,2117\dots$$

Hintojen nousu  $121,17\dots\% - 100\% \approx 21,2\%$

Vastaus: Hinnat nousivat Yhdysvalloissa 21,2 %.

89. Norjan kruunun kurssi vuoden 2000 lopussa  $1 \text{ €} = 8,2335 \text{ NOK}$

Lainamäärä 125 000 €

Lainamäärä Norjan kruunuina  $125000 \cdot 8,2335 \text{ NOK} = 1029187,50 \text{ NOK}$

Lainasta maksettava korko  $0,0568 \cdot 1029187,50 \text{ NOK} = 58457,85 \text{ NOK}$

Takaisin maksettava laina  $1029187,50 \text{ NOK} + 58457,85 \text{ NOK} = 1087645,35 \text{ NOK}$

Norjan kruunun kurssi vuoden 2002 lopussa  $1 \text{ €} = 7,2756 \text{ NOK}$

$$\text{Takaisin maksettava laina euroina } \frac{1087645,35}{7,2756} \text{ €} \approx 149\,492,19 \text{ €}$$

Vastaus: Lainasta jouduttiin maksamaan takaisin 149 492,19 €

**90.** Sveitsin frangin kurssi vuoden 2001 lopussa 1 € = 1,4829 CHF

Lainamäärä 25 000 €

$$\text{Lainamäärä Sveitsin Frangeina } 25000 \cdot 1,4829 \text{ CHF} = 37\,072,50 \text{ CHF}$$

$$\text{Lainasta maksettava korko } 0,0745 \cdot 37\,072,50 \text{ CHF} \approx 2\,761,90 \text{ CHF}$$

$$\text{Takaisin maksettava laina } 37\,072,50 \text{ CHF} + 2\,761,90 \text{ CHF} = 39\,834,40 \text{ CHF}$$

Norjan kruunun kurssi vuoden 2002 lopussa 1 € = 1,4524 CHF

$$\text{Takaisin maksettava laina euroina } \frac{39834,40}{1,4524} \text{ €} \approx 27\,426,61 \text{ €}$$

Vastaus: Lainasta jouduttiin maksamaan takaisin 27 426,61 €

**91.** Taulukosta 11.1.1999

$$1 \text{ EUR} = 1,1569 \text{ USD}$$

$$1 \text{ USD} = \frac{1}{1,1569} \text{ EUR}$$

$$1 \text{ USD} \approx 0,86438 \text{ EUR}$$

Samalla tavoin

$$1 \text{ JPY} = \frac{1}{126,33} \text{ EUR} \approx 0,0079158 \text{ EUR}$$

Valuutat syksyllä 12.7.1999

$$1 \text{ USD} = \frac{1}{1,0124} \text{ EUR} \approx 0,98775 \text{ EUR}$$

$$1 \text{ JPY} = \frac{1}{123,82} \text{ EUR} \approx 0,0080762 \text{ EUR}$$

Valuuttakurssien muutos

$$\text{USD: } \frac{\frac{1}{1,0124}}{\frac{1}{1,1569}} = \frac{1}{1,0124} : \frac{1}{1,1569} = \frac{1,1569}{1,0124} \approx 1,143$$

USD:n kurssi on vahvistunut 14,3%.

$$\text{JPY: } \frac{\frac{1}{123,82}}{\frac{1}{126,33}} = \frac{1}{123,82} : \frac{1}{126,33} = \frac{126,33}{123,82} \approx 1,020$$

JPY:n kurssi on vahvistunut 2,0%.

Vastaus: Kurssit euroina 11.1.1999: 1 USD = 0,86438 EUR ja 1 JPY = 0,0079158 EUR ja 12.7.1999: 1 USD = 0,98775 EUR, 1 JPY = 0,0080762 EUR. USD:n kurssi on vahvistunut 14,3% ja JPY:n kurssi on vahvistunut 2,0% euroon nähden.

92. Määrä  $m$  kpl

Hinta  $h$  mk

Kustannukset = määrä  $\cdot$  hinta

Kokonaiskustannukset  $K = mh$

Myyntihinta  $1,1h$

Voitto  $0,1mh$

Valuutan noususta johtuva lisäkustannus  $0,2 \cdot 0,75 \cdot \frac{2}{3}mh = 0,1mh$

Myyntihinnan korotus  $p$  %

$$\frac{p}{100} \cdot \frac{2}{3}m \cdot 1,1h = 0,1mh \quad | : mh$$

$$\frac{2,2}{300}p = 0,1 \quad | : \frac{2,2}{300}$$

$$p = \frac{30}{2,2}$$

$$p = 13,6363\dots$$

$$p \approx 13,6$$

Vastaus: Myyntihintaa pitää korottaa 13,6 %.

93. Määrä  $m$  kpl

Hinta  $h$  mk

Kustannukset = määrä  $\cdot$  hinta

Kokonaiskustannukset alun perin  $K = mh$

Myyntihinta  $1,1h$

Voitto  $0,1mh$

Ulkomaille suoritettavat nousseet maksut koko hankintaerän osalta  $1,25 \cdot 0,80mh = 1,0mh$

Kotimaan laskeneet maksut  $0,66 \cdot 0,20mh = 0,132mh$

Muuttuneet kokonaiskustannukset  $1,0mh + 0,132mh = 1,132mh$

Kokonaiskustannusten lisäys  $1,132mh - mh = 0,132mh$

Myyntihinnan korotus  $p$  %

$$\frac{p}{100} \cdot \frac{3}{4}m \cdot 1,1h = 0,132mh \quad | : mh$$

$$\frac{3,3}{400}p = 0,132 \quad | : \frac{3,3}{400}$$

$$p = 16$$

Vastaus: Myyntihintaa pitää korottaa 16 %.

94. Rukiin hinta  $r$  (mk/hl)

Maidon hinta  $m$  (mk/l)

Vuokra 1. vuonna  $80r + 300m + 320$

Vuokra 2. vuonna  $65r + 200m + 586,25$

Vuokra 3. vuonna  $85r + 500m + 181,25$

Vuokra on sama joka vuosi (1. ja 2. vuonna)

$$80r + 300m + 320 = 65r + 200m + 586,25$$

$$80r - 65r = 200m - 300m + 586,25 - 320$$

$$15r = -100m + 266,25 \quad | :15$$

$$r = -\frac{100}{15}m + 17,75$$

Vuokra on sama 2. ja 3. vuonna

$$65r + 200m + 586,25 = 85r + 500m + 181,25$$

$$65r - 85r = 500m - 200m + 181,25 - 586,25$$

$$-20r = 300m - 405 \quad | :(-20)$$

$$r = -15m + 20,25$$

Merkitään  $r$ :t yhtä suuriksi

$$-\frac{100}{15}m + 17,75 = -15m + 20,25$$

$$15m - \frac{100}{15}m = 20,25 - 17,75$$

$$\frac{25}{3}m = 2,5 \quad | : \frac{25}{3}$$

$$m = \frac{7,5}{25}$$

$$m = 0,30$$

Rukiin hinta  $r = -15m + 20,25$   
 $r = -15 \cdot 0,30 + 20,25 = 15,75$

Vuokra markoissa  $80 \cdot 15,75 + 300 \cdot 0,30 + 320 = 1670$

Vastaus: Vuokra 1 670 mk. Rukiin hinta 15,75 mk/hl ja maidon 0,30 mk/l.

**95.** A:n rahayksikkö  $a$

B:n rahayksikkö  $b$

Valuuttakurssikerroin ennen devalvaatiota  $k$

Kurssit ennen devalvaatiota  $1b = ka$

Devalvaatioprosentti  $p$  %

Kurssit devalvaation jälkeen

$$1b = \left(1 + \frac{p}{100}\right)ka \quad | : \left(1 + \frac{p}{100}\right)k$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}} \cdot \frac{1}{k} \cdot b = \frac{1}{100 + p} \cdot \frac{1}{k} \cdot b = \frac{100}{100 + p} \cdot \frac{1}{k} \cdot b$$

Halpenemisprosentti  $q$  %

$$1 - \frac{q}{100} = \frac{100}{100 + p}$$

$$q = 100 - \frac{10000}{100 + p} = \frac{100p}{100 + p}$$

$$\text{Kun } p = 5, \quad q = \frac{100}{21} \approx 4,76$$

$$p = 10, \quad q = \frac{100}{11} \approx 9,09$$

$$p = 30, \quad q = \frac{300}{13} \approx 23,1$$

Vastaus:  $q = \frac{100p}{100+p}$ .  $p$ :n arvoja vastaavat  $q$ :n arvot 4,76; 9,09 ja 23,1.

**96.** Pankki myy Villelle Yhdysvaltain dollareita tilivaluuttakurssin mukaan.

Kurssi 1 € = 1,1294 USD

Ostokset euroina  $\frac{1560}{1,1294}$  €  $\approx 1\,381,26$  €

Vastaus: Ostokset maksoivat 1 381,26 €

**97.** Pankki myy Lenalle Yhdysvaltain dollareita tilivaluuttakurssin mukaan.

Kurssi 1 € = 1,1294 USD

Ostokset euroina  $\frac{1245}{1,1294}$  €  $\approx 1\,102,36$  €

Muutetaan eurot Ruotsin kruunuiksi.

Pankki myy Lenalle Rutsin kruunuja tilivaluuttakurssin mukaan

Kurssi 1 € = 9,1255 SEK

Ostokset kruunuina  $1102,36 \cdot 9,1255$  SEK  $\approx 10\,059,54$  SEK

Vastaus: Ostokset maksoivat 10 059,54 SEK.

#### 4. LUKUJONOT JA SUMMAT

**98.** a) 1, 3, 6, 10, 15,

$$1, 3 = 1 + 2, 6 = 3 + 3, 10 = 6 + 4, 15 = 10 + 5$$

Seuraava luku saadaan lisäämällä yksi enemmän kuin edellisessä luvussa

Kysytty luku  $15 + 6 = 21$

b) 1, 8, 27, 64,

$$1 = 1^3, 8 = 2^3, 27 = 3^3, 64 = 4^3$$

Kysytty luku  $5^3 = 125$

Vastaus: a) 21 b) 125

**99.** -2, -5, -8, -11,

a) Kyseessä on aritmeettinen lukujono, koska peräkkäisten termien erotus on vakio  $d = -3$ .

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_5 = -11 + (-3) = -14$$

$$a_6 = -14 + (-3) = -17$$

$$a_7 = -17 + (-3) = -20$$

b) 25. termi saadaan helpoimmin 1. termin avulla

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad | n = 25, a_1 = -2, d = -3$$

$$a_{25} = -2 + (25-1) \cdot (-3) = -74$$

Vastaus: a) Kolme seuraavaa termiä ovat -14, -17, -20. b) 25. termi on -74.

**100.**

$$a_1 = 10$$

$$d = 2$$

a) Jonon 100. termi

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_{100} = 10 + (100-1) \cdot 2 = 208$$

b) Sadan ensimmäisen termin summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \quad | n = 100, a_1 = 10, a_{100} = 208$$

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{10 + 208}{2} = 10\,900$$

Vastaus: a) Sadas termi on 208. b) Sadan ensimmäisen termin summa 10 900.

**101.**

$$a_1 = 9$$

$$a_3 = 1$$

Suhdeluku  $q$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad | n = 3$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1}$$

$$1 = 9 \cdot q^2 \quad | :9$$

$$q^2 = \frac{1}{9} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$q = \pm \frac{1}{3}$$

Kymmenen ensimmäisen termin summa

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$$

Suhdeluvulla  $q = \frac{1}{3}$

$$S_{10} = 9 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^9}{1 - \frac{1}{3}} = 9 \cdot \frac{1 - \frac{1}{19\,683}}{\frac{2}{3}} = \frac{9841}{729} \approx 13,5$$

Suhdeluvulla  $q = -\frac{1}{3}$

$$S_{10} = 9 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^9}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 9 \cdot \frac{1 + \frac{1}{19\,683}}{\frac{4}{3}} = \frac{4921}{729} \approx 6,8$$

Vastaus: Summa on 13,5 tai 6,8.

**102.** 1, 0,2; 0,04; 0,008

Lukujono on geometrinen, koska kahden peräkkäisen luvun suhde on vakio

$$q = 0,2 : 1 = 0,2$$

a) Kaksi seuraavaa termiä

$$a_n = q \cdot a_{n-1}$$

$$a_5 = 0,2 \cdot 0,008 = 0,0016$$

$$a_6 = 0,2 \cdot 0,0016 = 0,00032$$

b) Seitsemäs termi saadaan helpoimmin ensimmäisen termin avulla

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1 \quad | \quad n = 7, a_1 = 1, q = 0,2$$

$$a_7 = 0,2^{7-1} \cdot 1 = 6,4 \cdot 10^{-5} = 0,000064$$

Vastaus: a) Termit ovat 0,0016 ja 0,00032. b) Seitsemäs termi on 0,000064.

**103.** a) 3, 6, 9, 12,

Kyseessä on aritmeettinen lukujono, koska peräkkäisten termien erotus on vakio,  $d = 3$ .

150. termi

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad | \quad n = 150, a_1 = 3, d = 3$$

$$a_{150} = 3 + (150-1) \cdot 3 = 450$$

Termien summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \quad | \quad n = 150, a_1 = 3, a_{150} = 450$$

$$S_{150} = 150 \cdot \frac{3+450}{2} = 33\,975$$

b) 1, 6, 11, 16,

Kyseessä on aritmeettinen lukujono, koska peräkkäisten termien erotus on vakio,  $d = 5$ .

150. termi

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad | \quad n = 150, a_1 = 1, d = 5$$

$$a_{150} = 1 + (150-1) \cdot 5 = 746$$

Termien summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \quad | \quad n = 150, a_1 = 1, a_{150} = 746$$

$$S_{150} = 150 \cdot \frac{1+746}{2} = 56\,025$$

Vastaus: Summa on a) 33 975 b) 56 025

**104.** a) 4, -12, +36, -108, ...

Suhdeluku  $q$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$q = \frac{-12}{4} = -3$$

Kymmenen ensimmäisen termin summa

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \quad | \quad n = 10, a_1 = 4, q = -3$$

$$S_{10} = 4 \cdot \frac{1-(-3)^{10-1}}{1-(-3)} = 4 \cdot \frac{1+3^9}{4} = 19\,684$$

b)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

Suhdeluku  $q$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$q = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Kymmenen ensimmäisen termin summa

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \quad | \quad n = 10, a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$$

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{511}{256}$$

Vastaus: Summa on a) 19 684 b)  $\frac{511}{256}$

**105.**

a) Positiiviset kokonaisluvut muodostavat aritmeettisen jonon,  $d = 1$

Termien summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \quad | \quad n = 1\,000, a_1 = 1, a_{1000} = 1\,000$$

$$S_{150} = 1\,000 \cdot \frac{1 + 1\,000}{2} = 500\,500$$

b) Seitsemällä jaolliset positiiviset luvut muodostavat aritmeettisen jonon,  $d = 7$ .

$$a_1 = 7$$

$$a_{1000} = 7 + 999 \cdot 7 = 7\,000$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$S_{1000} = 1\,000 \cdot \frac{7 + 7\,000}{2} = 3\,503\,500$$

Vastaus: Summa on a) 500 500 b) 3 503 500

**106.** Matkat muodostavat aritmeettisen jonon,  $d = 100$  m

30. termi

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad | \quad n = 30, a_1 = 100 \text{ m}, d = 100 \text{ m}$$

$$a_{30} = 100 \text{ m} + (30-1) \cdot 100 \text{ m} = 3\,000 \text{ m}$$

Termien summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \quad | \quad n = 30, a_1 = 100 \text{ m}, a_{30} = 3\,000 \text{ m}$$

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{100 \text{ m} + 3\,000 \text{ m}}{2} = 46\,500 \text{ m} = 46,5 \text{ km}$$

Vastaus: Essi juoksi yhteensä 46,5 km.

107. Kukkaistutus muodostaa aritmeettisen jonon,  $d = 2$ .

8. termi

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad | \quad n = 8, a_1 = 1, d = 2$$

$$a_8 = 1 + (8-1) \cdot 2 = 15$$

Termien summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \quad | \quad n = 8, a_1 = 1, a_8 = 15$$

$$S_8 = 8 \cdot \frac{1+15}{2} = 64$$

Vastaus: Viimeiseen riviin tuli 15 kukkasta. Kukkasia oli yhteensä 64.

108. Matka muodostaa aritmeettisen jonon.

Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen termi on  $a_1 = 50$  (m)

Kahden peräkkäisen termin erotus  $d = 100$  (m)

Yhteenlaskettavien määrä  $n = 30$

Viimeisen päivän kävely matka

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_{30} = 50 + 29 \cdot 100 = 2950$$

Termien summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{a_1 + a_{30}}{2} = \frac{50 + 2950}{2} \cdot 30 = 45000 \text{ (m)}$$

Yksikön muunnos  $45\,000 \text{ m} = 45 \text{ km}$

Vastaus: Hän kävelee yhteensä 45 km

109.

Pylväitä  $\frac{10\,000}{50} + 1 = 201$  kappaletta

Urakoitsija joutuu hakemaan  $\frac{201}{3} = 67$  kuormaa.

Kuljettu matka

$$\begin{aligned}
S &= 2 \cdot (2 + 0,1) + 2 \cdot (2 + 0,25) + 2 \cdot (2 + 0,4) + \dots + 2 \cdot (2 + 10) \\
&= 2 \cdot (2,1 + 2,25 + 2,4 + \dots + 12) \\
&= 2 \cdot 67 \cdot \frac{2,1 + 12}{2} \\
&= 944,7 \text{ (km)}
\end{aligned}
\left. \begin{array}{l} \text{aritmeettinen summa } d = 0,15 \\ S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \end{array} \right\}$$

Vastaus: Urakoitsija joutuu kulkemaan 944,7 kilometrin matkan.

**110.** Matkat muodostavat aritmeettisen jonon,  $d = 10 \text{ m} + 10 \text{ m} = 20 \text{ m}$

Ensimmäinen haku (2. kuhilas)  $a_1 = 2 \cdot 10 \text{ m} = 20 \text{ m}$

Viimeinen, 19. haku (20. kuhilas)

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad | \quad n = 19, a_1 = 20 \text{ m}, d = 20 \text{ m}$$

$$a_{19} = 20 \text{ m} + (19-1) \cdot 20 \text{ m} = 380 \text{ m}$$

Termien summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \quad | \quad n = 19, a_1 = 20 \text{ m}, a_{19} = 380 \text{ m}$$

$$S_{19} = 19 \cdot \frac{20 \text{ m} + 380 \text{ m}}{2} = 3800 \text{ m} = 3,8 \text{ km}$$

Vastaus: Matka yhteensä 3,8 km

**111.** Muodostuu geometrinen jono, suhdelukuna prosenttikerroin

Väkimmäärän lisäys 50 %

$$\text{Prosenttikerroin } q = 100 \% + 50 \% = 150 \% = 1,5$$

a)  $n = 4$

Ensimmäinen termi  $a_1 = 21\,700$

Asukkaita vuonna 1890

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1$$

$$a_4 = 1,5^{4-1} \cdot 21\,700 \approx 73\,238$$

b)  $n = 16$

Ensimmäinen termi  $a_1 = 21\,700$

Asukkaita vuonna 2010

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1$$

$$a_{16} = 1,5^{16-1} \cdot 21\,700 \approx 9\,500\,000$$

Vastaus: a) 73 238 b) 9 500 000

**112. Aritmeettinen lukujono**

$$a_1 = 10$$

$$a_9 = 7$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad | \quad n=9, a_9 = 7$$

$$7 = 10 + 8d$$

$$8d = -3 \quad | \quad :8$$

$$d = -\frac{3}{8}$$

Termien summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} = n \cdot \frac{10 + 10 + (n-1)\left(-\frac{3}{8}\right)}{2} = n \cdot \frac{20 - \frac{3}{8}n + \frac{3}{8}}{2} = n \cdot \frac{20\frac{3}{8} - \frac{3}{8}n}{2}$$

Lasketaan millä  $n$ :n arvolla summa on nolla.

$$n \cdot \frac{20\frac{3}{8} - \frac{3}{8}n}{2} = 0 \quad | \quad \cdot 2$$

$$n \left( 20\frac{3}{8} - \frac{3}{8}n \right) = 0 \quad | \quad \text{tulon nollasääntö}$$

$$n = 0 \quad \text{tai} \quad 20\frac{3}{8} - \frac{3}{8}n = 0$$

$$n = 54\frac{1}{3}$$

Lasketaan summan arvo, kun  $n = 54$  ja kun  $n = 55$

$$S_{54} = 54 \cdot \frac{a_1 + a_{54}}{2} = 54 \cdot \frac{10 + 10 + (54-1)\left(-\frac{3}{8}\right)}{2} = 3\frac{3}{8} > 0$$

$$S_{55} = 55 \cdot \frac{a_1 + a_{55}}{2} = 55 \cdot \frac{10 + 10 + (55-1)\left(-\frac{3}{8}\right)}{2} = -6\frac{7}{8} < 0$$

Vastaus:  $n = 55$  ja  $S_{55} = -6\frac{7}{8}$

## 5. SÄÄSTÄMINEN

113. Korko  $r = kit$  |  $k = 3\,580 \text{ €}$ ,  $i = 3,4\% = 0,034$  ja  $t = 0,5 \text{ a}$

$$r = 3\,580 \text{ €} \cdot 0,034 \cdot 0,5 = 60,86 \text{ €}.$$

Vastaus: 60,86 €

114. Korko  $r = kit$  |  $k = 4\,280 \text{ €}$ ,  $i = 3,4\% = 0,034$  ja  $t = 3 \text{ kk} = 0,25 \text{ a}$

$$r = 4\,280 \text{ €} \cdot 0,034 \cdot 0,25 = 36,38 \text{ €}.$$

Pääoma talletusajan lopussa  $4\,280 \text{ €} + 36,38 \text{ €} = 4\,316,38 \text{ €}$

Vastaus: 4 316,38 €

115. Korko  $r = kit$  |  $k = 4\,680 \text{ €}$ ,  $i = 2,5\% = 0,025$  ja  $r = 71,50 \text{ €}$ .

Talletusaika  $71,50 = 4\,680 \cdot 0,025 \cdot t$  |  $:(4\,680 \cdot 0,025)$

$$t = 0,611\dots \text{ (a)}$$

Talletusaika  $0,611\dots \text{ a} = 220 \text{ d}$

Vastaus: 220 d

116. Korko  $r = kit$  |  $r = 1\,500 \text{ €} - 1\,250 \text{ €} = 250 \text{ €}$ ,  $i = 2,25\% = 0,0225$  ja  $k = 1\,250 \text{ €}$

Talletusaika  $250 = 1\,250 \cdot 0,0225 \cdot t$  |  $:(1\,250 \cdot 0,0225)$

$$t = 8,88\dots \text{ (a)}$$

Talletusaika on  $8,88\dots \text{ a} = 107 \text{ kk}$

Vastaus: 107 kk

117. Korko  $r = kit$  |  $r = 121,88 \text{ €}$ ,  $k = 6\,500 \text{ €}$  ja  $t = 10 \text{ kk} = \frac{10}{12} \text{ a}$

$$\text{Korkokanta } 121,88 = 6\,500 \cdot i \cdot \frac{10}{12} \quad \left| : \left( 6\,500 \cdot \frac{10}{12} \right) \right.$$

$$i \approx 0,0225$$

$$i = 2,25\%$$

Vastaus: 2,25 %

118. Alkuperäinen pääoma  $k$

Pääoman arvon nousu kolmessa kuukaudessa  $2,3\%$

Korko kolmessa kuukaudessa  $0,023k$

Korko kuukaudessa  $\frac{0,023k}{3}$

Korko 12 kuukaudessa  $12 \cdot \frac{0,023k}{3} = 0,092k$

Vuotuinen korkoprosentti  $0,092 = 9,2\%$

Vastaus: 9,2 %

119. Korko  $r = kit$  |  $k = 2\,500 \text{ €}$ ,  $i = 1,55\% = 0,0155$  ja  $t = 3 \text{ kk} = 0,25 \text{ a}$

Korko  $r = 2\,500 \text{ €} \cdot 0,0155 \cdot 0,25 \approx 9,69 \text{ €}$

Pääoma talletusajan lopussa  $K = 2\,500\text{ €} + 9,69\text{ €} = 2\,509,69\text{ €}$

Vastaus: 2 509,69 €

**120.** Pääoma talletusajan lopussa

$$K = k + kit \quad | \quad K = 2\,537,50\text{ €}, i = 3,60\% = 0,0360 \text{ ja } t = 5 \text{ kk} = \frac{5}{12} \text{ a}$$

$$2\,537,50 = k + k \cdot 0,0360 \cdot \frac{5}{12}$$

$$1,015k = 2\,537,50 \quad | :1,015$$

$$k = 2\,500$$

Vastaus: Talletuksen suuruus oli 2 500 €.

**121.** Korko  $r = kit \quad | \quad k = 4\,500\text{ €}, i = 3,00\% = 0,0300 \text{ ja } t = 200 \text{ d} = \frac{200}{360} \text{ a}$

$$\text{Korko } r = 4\,500\text{ €} \cdot 0,0300 \cdot \frac{200}{360} = 75\text{ €}$$

Kolmen kuukauden talletuksessa  $r = kit \quad | \quad r = 75\text{ €}, p = 5,00\% = 0,0500 \text{ ja } t = 3 \text{ kk} = 0,25 \text{ a}$

$$\text{Pääoma} \quad 75 = k \cdot 0,0500 \cdot 0,25 \quad | : (0,0500 \cdot 0,25)$$

$$k = 6\,000$$

Vastaus: Pääoma on 6 000 €.

**122.** Korko kesäkuun alussa  $r = kit \quad | \quad k = 1\,200\text{ €}, i = 2,25\% = 0,0225 \text{ ja}$

$$t = 31\text{d} + 28\text{d} + 31\text{d} + 30\text{d} + 31\text{d} + 1\text{d} = 152\text{d} =$$

$$\frac{152}{365} \text{ a}$$

$$\text{Korko } r = 1\,200\text{ €} \cdot 0,0225 \cdot \frac{152}{365} = 11,2438\dots\text{€}$$

Pano kesäkuun alussa 560 €.

Korko  $r = kit \quad | \quad k = 1\,760\text{ €}, i = 2,25\% = 0,0225 \text{ ja } t = 29\text{d} + 31\text{d} + 31\text{d} + 15\text{d} = 106\text{d} =$

$$\frac{106}{365} \text{ a}$$

$$\text{Korko } r = 1\,760\text{ €} \cdot 0,0225 \cdot \frac{106}{365} = 11,5002\dots\text{€}$$

Korot yhteensä  $11,2438\dots\text{€} + 11,5002\dots\text{€} = 22,744\dots\text{€}$

Ville nosti tililtä  $1\,760\text{ €} + 22,744\dots\text{€} \approx 1\,782,75\text{ €}$

Vastaus: Ville nosti 1 782,75 €.

123. Korkokanta 3,40 % = 0,034

Korko  $r = kit$

a)

Päivä	Pano/Nosto (€)	Saldo (€)	Aika (d)	Korko (€)
12.2	+1 530,00	1 530,00	17+17=34	$1\,530 \cdot 0,034 \cdot \frac{34}{365} \approx 4,85$
18.3	+2 450,00	3 980,00	99	36,70
25.6	-3 190,00	790,00	136	10,01
8.11	+ 885,00	1 675,00	54	8,43

Korko yhteensä 4,85 € + 36,70 € + 10,01 € + 8,43 € = 60,00 €

Saldo vuoden lopussa 1 675,00 € + 60,00 € = 1 735,00 €

b)

Kuukausi	Pienin saldo
helmikuu	0
maaliskuu	1 530,00
huhtikuu	3 980,00
toukokuu	3 980,00
kesäkuu	790,00
heinäkuu	790,00
elokuu	790,00
syyskuu	790,00
lokakuu	790,00
marraskuu	790,00
joulukuu	1 675,00

Lasketaan yksinkertainen korko kuukausittaisille talletuksille.

Tilille vuoden aikana kertyvä korko

$r = kit$

$$\begin{aligned} &= 1\,530 \text{ €} \cdot 0,034 \cdot \frac{1}{12} + 3\,980 \text{ €} \cdot 0,034 \cdot \frac{2}{12} + 790 \text{ €} \cdot 0,034 \cdot \frac{6}{12} \\ &\quad + 1\,675 \text{ €} \cdot 0,034 \cdot \frac{1}{12} \approx 45,06 \text{ €} \end{aligned}$$

Saldo vuoden lopussa 1 675,00 € + 45,06 € = 1 720,06 €

Vastaus: a) 1 735,00 € b) 1 720,06 €.

124. Korkoprosentti 3,1 % = 0,031

Korko  $r = kit$

Päivä	Pano (€)	Saldo (€)	Aika (d)	Korko (€)
1.1		3 452,00	31+19=50	$3\,452 \cdot 0,031 \cdot \frac{50}{365} \approx 14,66$
20.2	667,00	4 119,00	102	35,68
1.6	297,00	4 416,00	106	39,76
15.9	875,00	5 291,00	25	11,23
10.10	246,00	5 537,00	82	38,56

Korko yhteensä 14,66 € + 35,68 € + 39,76 € + 11,23 € + 38,56 € = 139,89 €

Saldo vuoden lopussa 5 537,00 € + 139,89 € = 5 676,89 €

Vastaus: Saldo vuoden lopussa 5 676,89 €

125. Korko  $r = kit$   $\left| \begin{array}{l} k = 92\,000\,000\,000, r = 15\,000\,000, t = \frac{2}{365} \end{array} \right.$

$$15\,000\,000 = 92\,000\,000\,000 \cdot i \cdot \frac{2}{365} \quad \left| \cdot \frac{365}{2 \cdot 92\,000\,000\,000} \right.$$

$$i \approx 0,0298$$

Vastaus: 2,98 %

126. Korkokanta 3,2 % = 0,032

Korko  $r = kit$

Pano/Nosto (€)	Saldo (€)	Aika (a)	Korko (€)
+10 000,00	10 000,00	0,5	$10\,000 \cdot 0,032 \cdot \frac{1}{2} = 160$
-3 000,00	7 000,00	0,5	$7\,000 \cdot 0,032 \cdot \frac{1}{2} = 112$

Korko yhteensä 160 € + 112 € = 272 €

Saldo vuoden lopussa 10 000,00 € - 3 000 € - 7 000 + 272 € = 272 €

Vastaus: 272 €

127. Alle vuoden talletuksesta saatu korko on  $r = kit$ , missä  $k = 25$  €,  $p = 1,35\% = 0,0135$

ja  $t = \frac{12}{12}, \frac{11}{12}, \frac{10}{12}, \dots, \frac{1}{12}$  a. Korko

$$r = 25 \text{ €} \cdot 0,0135 \cdot \frac{12}{12} + 25 \text{ €} \cdot 0,0135 \cdot \frac{11}{12} + \dots + 25 \text{ €} \cdot 0,0135 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= 25 \text{ €} \cdot 0,0135 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) \left| \begin{array}{l} S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ n = 12, a_1 = 12, a_n = 1 \end{array} \right.$$

$$= 25 \text{ €} \cdot 0,0135 \cdot \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot \frac{12+1}{2}$$

$$= 2,193 \dots \text{€}$$

Tililtä voi nostaa  $12 \cdot 25 \text{ €} + 2,193 \dots \text{€} \approx 302,19 \text{ €}$ .

Vastaus: Tililtä voi nostaa 302,19 €.

**128.** Korko  $r = kpt$ , missä  $p = 15 \% = 0,15$  ja  $t = \frac{8}{12}, \frac{7}{12}, \frac{6}{12}, \dots, \frac{1}{12}$  a. Pääoma kaikkien talletusten jälkeen on 200 €, joten

$$8k + k \cdot 0,15 \cdot \frac{8}{12} + k \cdot 0,15 \cdot \frac{7}{12} + \dots + k \cdot 0,15 \cdot \frac{1}{12} = 200$$

$$8k + k \cdot 0,15 \cdot \frac{1}{12} \cdot (8 + 7 + \dots + 1) = 200 \left| \begin{array}{l} S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ n = 8, a_1 = 8, a_n = 1 \end{array} \right.$$

$$8k + k \cdot 0,15 \cdot \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot \frac{8+1}{2} = 200$$

$$8,45k = 200 \quad | :200$$

$$k \approx 23,67$$

Vastaus: Kuukausierä 23,67 €.

**129.** Alle vuoden talletuksesta saatu korko on  $r = kit$ , missä  $k = 200 \text{ €}$ ,  $p = 1,75 \% = 0,0175$

ja  $t = \frac{12}{12}, \frac{10}{12}, \frac{8}{12}, \frac{6}{12}, \frac{4}{12}$  ja  $\frac{2}{12}$  a. Korko

$$r = 200 \text{ €} \cdot 0,0175 \cdot \frac{12}{12} + 200 \text{ €} \cdot 0,0175 \cdot \frac{10}{12} + \dots + 200 \text{ €} \cdot 0,0175 \cdot \frac{2}{12}$$

$$= 200 \text{ €} \cdot 0,0175 \cdot \left( \frac{12}{12} + \frac{10}{12} + \dots + \frac{2}{12} \right)$$

$$= 12,25 \text{ €}$$

Talletuksen pääoma vuoden lopussa  $6 \cdot 200 \text{ €} + 12,25 \text{ €} = 1212,25 \text{ €}$ .

Vastaus: 1 212,25 €

**130.** Pääoma  $K = kq^t$ , missä  $k = 1\,825 \text{ €}$ ,  $q = 1 + 0,018 = 1,018$  ja  $t = 3,5$  a. Pääoma 3,5 vuoden kuluttua  $K = 1\,825 \text{ €} \cdot 1,018^{3,5} \approx 1\,942,59 \text{ €}$ .

Vastaus: 1 942,59 €

**131.** Talletus kasvaa vuodessa  $q$ -kertaiseksi. Tällöin pääoma ajan  $t$  kuluttua on  $K = kq^t$ , missä  $k = 500 \text{ €}$ ,  $q = 1 + 0,0325 = 1,0325$  ja  $t = 18$  a. Pääoma 18 vuoden kuluttua

$$K = 500 \text{ €} \cdot 1,0325^{18} \approx 889,18 \text{ €}$$

Vastaus: 889,18 €

**132.** Pääoma  $K = kq^t$ , missä  $K = 19\,900$  €,  $k = 17\,500$  € ja  $t = 5$  a. Pääoma 5 vuoden kuluttua

$$19\,900 = 17\,500 \cdot q^5 \quad | :17\,500$$

$$q^5 = \frac{19\,900}{17\,500} \quad | \sqrt[5]{\phantom{x}}$$

$$q = \sqrt[5]{\frac{19\,900}{17\,500}}$$

$$q = 1,02603\dots$$

Korkokanta  $1,02603\dots - 1 \approx 0,0260 = 2,60\%$ .

Vastaus: 2,60 %

**133.** Pääoma  $K = kq^t$ , missä  $K = 32\,259,46$  €,  $k = 30\,000$  € ja  $t = 3$  a. Pääoma 3 vuoden kuluttua  $32\,259,46 = 30\,000 \cdot q^3 \quad | :30\,000$

$$q^3 = \frac{32\,259,46}{30\,000} \quad | \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{32\,259,46}{30\,000}}$$

$$q = 1,02499\dots$$

Korkokanta  $1,02499\dots - 1 \approx 0,0245 = 2,45\%$ .

Vastaus: 2,45 %

**134.** Pääoma  $K = kq^t$ , missä  $K = 110\,000$  €,  $k = 100\,000$  € ja  $q = 1,025$ . Pääoma  $t$  vuoden kuluttua

$$110\,000 = 100\,000 \cdot 1,025^t \quad | :100\,000$$

$$1,025^t = \frac{110\,000}{100\,000}$$

$$1,025^t = 1,1 \quad | \lg$$

$$\lg 1,025^t = \lg 1,1$$

$$t \lg 1,025 = \lg 1,1 \quad | \lg 1,025$$

$$t = \frac{\lg 1,1}{\lg 1,025}$$

$$t \approx 3,86$$

Vastaus: 3,86 vuodessa

**135.** Pääoma yhteensä 4 vuoden kuluttua

$$K = 1\,200 \cdot 1,025^4 + 1\,200 \cdot 1,025^3 + 1\,200 \cdot 1,025^2 + 1\,200 \cdot 1,025^1$$

$$= 1\,200 \cdot (1,025^4 + 1,025^3 + 1,025^2 + 1,025) \left| \begin{array}{l} S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \\ a_1 = 1,025, q = 1,025, n = 4 \end{array} \right.$$

$$= 1\,200 \cdot 1,025 \cdot \frac{1-1,025^4}{1-1,025}$$

$$\approx 5\,107,59$$

Vastaus: 5 107,59 €

**136.** Pääoma yhteensä 17 vuoden kuluttua

$$K = 250 \cdot 1,036^{17} + 250 \cdot 1,036^{16} + \dots + 250 \cdot 1,036^1 + 250$$

$$= 250 \cdot (1,036^{17} + 1,036^{16} + \dots + 1,036^1 + 1) \left| \begin{array}{l} S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \\ a_1 = 1, q = 1,036, n = 18 \end{array} \right.$$

$$= 250 \cdot 1 \cdot \frac{1-1,036^{18}}{1-1,036}$$

$$\approx 6\,180,97$$

Vastaus: 6 180,97 €

**137.** Ensimmäisen vuoden talletuksesta saatu korko on  $r = kpt$ , missä  $k = 250$  €,  $p = 1,80$  %

$$= 0,0180 \text{ ja } t = \frac{12}{12}, \frac{9}{12}, \frac{6}{12}, \frac{3}{12} \text{ a. Korko}$$

$$r = 250 \text{ €} \cdot 0,0180 \cdot \frac{12}{12} + 250 \text{ €} \cdot 0,0180 \cdot \frac{9}{12} + 250 \text{ €} \cdot 0,0180 \cdot \frac{6}{12} + 250 \text{ €} \cdot 0,0180 \cdot \frac{3}{12}$$

$$= 250 \text{ €} \cdot 0,0180 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 9 + 6 + 3)$$

$$= 11,25 \text{ €}$$

Pääoma vuoden jälkeen  $4 \cdot 250 \text{ €} + 11,25 \text{ €} = 1\,011,25 \text{ €}$ .

Samanlaisia talletusvuosia on neljä. Korkokerroin  $q = 1,018$ .

Talletusvuosi	$k$ (€)	$K$ (€)
1.	1 011,25	$1\,011,25 \cdot 1,018^4$
2.	1 011,25	$1\,011,25 \cdot 1,018^3$
3.	1 011,25	$1\,011,25 \cdot 1,018^2$
4.	1 011,25	$1\,011,25 \cdot 1,018$

Talletukset yhteensä

$$S_4 = 1\,011,25 \text{ €} \cdot 1,018^4 + 1\,011,25 \text{ €} \cdot 1,018^3 + 1\,011,25 \text{ €} \cdot 1,018^2 + 1\,011,25 \text{ €} \cdot 1,018$$

$$= 4\,230,33 \text{ €}$$

Vastaus: 4 230,33 €

138. Ensimmäisen vuoden talletuksesta saatu korko on  $r = kit$ , missä  $k = 250 \text{ €}$ ,  $p = 1,25 \%$   
 $= 0,0125$  ja  $t = \frac{12}{12}, \frac{11}{12}, \frac{10}{12}, \dots, \frac{1}{12}$  a.

Korko

$$r = 250 \text{ €} \cdot 0,0125 \cdot \frac{12}{12} + 250 \text{ €} \cdot 0,0125 \cdot \frac{11}{12} + \dots + 250 \text{ €} \cdot 0,0125 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= 250 \text{ €} \cdot 0,0125 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) \quad \left| \begin{array}{l} S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ n = 12, a_1 = 12, a_n = 1 \end{array} \right.$$

$$= 250 \text{ €} \cdot 0,0125 \cdot \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot \frac{12+1}{2}$$

$$= 20,31 \text{ €}$$

Tilillä ensimmäisen vuoden lopussa  $12 \cdot 250 \text{ €} + 20,31 \text{ €} = 3\,020,31 \text{ €}$ .

Tämä summa on tilillä vuoden , jolloin se kasvaa korkoa

$$r = kpt = 3\,020,31 \text{ €} \cdot 0,0125 = 37,75 \text{ €}$$

Ensimmäisen vuoden talletuksesta kertynyt summa on

$$3\,020,31 \text{ €} + 37,75 \text{ €} = 3\,058,06 \text{ €}$$

Toisen vuoden talletuksesta saatu yksinkertainen korko on sama kuin ensimmäisen vuoden korko 20,31 €.

Toiselta vuodelta kertynyt summa  $12 \cdot 250 \text{ €} + 20,31 \text{ €} = 3\,020,31 \text{ €}$ .

Säästöt lomamatkaa varten yhteensä  $3\,058,06 \text{ €} + 3\,020,31 \text{ €} = 6\,078,37 \text{ €}$ .

Vastaus: 6 078,37€

139. Ensimmäisen vuoden talletuksesta saatu korko on  $r = kpt$ , missä  $k = 300 \text{ €}$ ,

$p = 2,25 \%$   $= 0,0225$  ja  $t = \frac{12}{12}, \frac{11}{12}, \frac{10}{12}, \dots, \frac{1}{12}$  a. Korko

$$r = 300 \text{ €} \cdot 0,0225 \cdot \frac{12}{12} + 300 \text{ €} \cdot 0,0225 \cdot \frac{11}{12} + \dots + 300 \text{ €} \cdot 0,0225 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= 300 \text{ €} \cdot 0,0225 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) \quad \left| \begin{array}{l} S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ n = 12, a_1 = 12, a_n = 1 \end{array} \right.$$

$$= 300 \text{ €} \cdot 0,0225 \cdot \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot \frac{12+1}{2}$$

$$= 43,875 \text{ €}$$

Tilillä ensimmäisen vuoden lopussa  $12 \cdot 300 \text{ €} + 43,875 \text{ €} = 3\,643,875 \text{ €}$ .

Samanlaisia talletusvuosia on neljä. Korkokerroin  $q = 1,0225$ .

Talletusvuosi	$k$ (€)	$K$ (€)
1.	3 643,87	$3\,643,875 \cdot 1,0225^3$
2.	3 643,875	$3\,643,875 \cdot 1,0225^2$
3.	3 643,875	$3\,643,875 \cdot 1,0225$
4.	3 643,875	3 643,875

Talletukset yhteensä neljän vuoden kuluttua

$$S_4 = 3\,643,875 \text{ €} \cdot 1,0225^3 + 3\,643,875 \text{ €} \cdot 1,0225^2 + 3\,643,875 \text{ €} \cdot 1,0225 + 3\,643,875 \text{ €} \\ \approx 15\,074,86 \text{ €}$$

Talletukset yhteensä  $n$  vuoden kuluttua  $S_n$

$$3\,643,875 \cdot 1,0225^{n-1} + 3\,643,875 \cdot 1,0225^{n-2} + \dots + 3\,643,875 \cdot 1,0225 + 3\,643,875 \\ = 3\,643,875 \cdot (1,0225^{n-1} + 1,0225^{n-2} + \dots + 1,0225 + 1) \\ = 3\,643,875 \cdot \left( \frac{1-1,0225^n}{1-1,0225} \right)$$

Talletusten määrä 25 000 €

$$3\,643,875 \cdot \left( \frac{1-1,0225^n}{1-1,0225} \right) = 25\,000 \quad | : 3\,643,875$$

$$\frac{1-1,0225^n}{1-1,0225} = 6,8608... \quad | \cdot (1-1,0225)$$

$$1-1,0225^n = -0,15436...$$

$$-1,0225^n = -1,15436... \quad | \cdot (-1)$$

$$1,0225^n = 1,15436... \quad | \lg$$

$$\lg 1,0225^n = \lg 1,15436...$$

$$n \lg 1,0225 = \lg 1,15436... \quad | : \lg 1,0225$$

$$n = \frac{\lg 1,15436...}{\lg 1,0225}$$

$$n \approx 6,5$$

Vastaus: Tilillä on rahaa 15 074,86 € 4 vuoden kuluttua. Pitäisi säästää 6,5 vuotta, jotta tilillä olisi 25 000 €.

**140.** Ensimmäisen vuoden talletuksesta saatu korko on  $r = kpt$ , missä  $p = 2,80\% = 0,028$  ja

$$t = \frac{12}{12}, \frac{11}{12}, \frac{10}{12}, \dots, \frac{1}{12} \text{ a. Korko}$$

$$r = k \cdot 0,028 \cdot \frac{12}{12} + k \cdot 0,028 \cdot \frac{11}{12} + \dots + k \cdot 0,028 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= k \cdot 0,028 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) \quad \left| \begin{array}{l} S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ n = 12, a_1 = 12, a_n = 1 \end{array} \right.$$

$$= k \cdot 0,028 \cdot \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot \frac{12+1}{2}$$

$$= 0,182k$$

Tilillä ensimmäisen vuoden lopussa  $12 \cdot k + 0,182k = 12,182k$ .

Samanlaisia talletusvuosia on kolme. Korkokerroin  $q = 1,028$ .

Talletusvuosi	$K$ (€)
1.	$12,182k \cdot 1,0225^2$
2.	$12,182k \cdot 1,0225$
3.	$12,182k$

Talletukset yhteensä 12 190 € kolmen vuoden kuluttua, joten

$$12,182k \cdot 1,028^2 + 12,182k \cdot 1,028 + 12,182k = 12\,190$$

$$12,182k \cdot (1,028^2 + 1,028 + 1) = 12\,190$$

$$37,578\dots k = 12\,190 \quad | :37,578\dots$$

$$k \approx 324,38$$

Vastaus: Kertatalletus oli 324,38€.

**141.** Koronkorko  $K = kq^t$

Alkupääoma  $k$

Aika  $t$  vuosina ensimmäisestä talletuksesta

Korkokertoimet  $q$

$$100\% + 2,54\% = 102,54\% = 1,0254$$

$$100\% + 3,25\% = 103,25\% = 1,0325$$

Kasvaneiden pääomien on oltava yhtä suuret.

$$k \cdot 1,0254^t = k \cdot 1,0325^{t-1} \quad | :k$$

$$1,0254^t = 1,0325^{t-1}$$

$$1,0254^t = 1,0325^t \cdot 1,0325^{-1} \quad | :1,0325^t$$

$$\frac{1,0254^t}{1,0325^t} = 1,0325^{-1}$$

$$\left(\frac{1,0254}{1,0325}\right)^t = 1,0325^{-1}$$

$$t = \frac{\log 1,0325^{-1}}{\log\left(\frac{1,0254}{1,0325}\right)} = 4,635\dots$$

$$4,635\dots a = 4a + 0,635\dots \cdot 12 \text{ kk} \approx 4a \text{ 8 kk}$$

Tammikuun alusta 2002 lukien kysytty ajankohta on vuoden 2006 elokuu.

Vastaus: Neljän vuoden ja 8 kuukauden kuluttua eli vuoden 2006 elokuussa.

**142.** Talletuksen kaksinkertaistumiseen kuluva aika

$$K = kq^t \quad \left| \begin{array}{l} k = 58 \text{ Fr, } K = 2 \cdot 58 \text{ Fr} = 116 \text{ Fr, } q = 1 + \frac{0,8}{100} = 1,008 \end{array} \right.$$

$$116 = 58 \cdot 1,008^t \quad | :58$$

$$1,008^t = 2 \quad | \lg$$

$$\lg 1,008^t = \lg 2$$

$$t \lg 1,008 = \lg 2 \quad | : \lg 1,008$$

$$t = \frac{\lg 2}{\lg 1,008}$$

$$t = 86,98\dots$$

$$t \approx 87 \text{ (a)}$$

Vuosi, jonka alkuun mennessä talletus kaksinkertaistui  $1699 + 87 = 1786$

Talletuksen nelinkertaistumiseen kuluva aika

$$K = kq^t \quad \left| \begin{array}{l} k = 58 \text{ Fr}, K = 4 \cdot 58 \text{ Fr} = 232 \text{ Fr}, q = 1 + \frac{0,8}{100} = 1,008 \end{array} \right.$$

$$232 = 58 \cdot 1,008^t \quad | : 58$$

$$1,008^t = 4 \quad | \lg$$

$$\lg 1,008^t = \lg 4$$

$$t \lg 1,008 = \lg 4 \quad | : \lg 1,008$$

$$t = \frac{\lg 4}{\lg 1,008}$$

$$t = 173,97\dots$$

$$t \approx 174 \text{ (a)}$$

Vuosi, jonka alkuun mennessä talletus nelinkertaistui  $1699 + 174 = 1873$

Talletus tämän vuoden (2001) alussa

$$K = kq^t \quad \left| \begin{array}{l} k = 58 \text{ Fr}, q = 1 + \frac{0,8}{100} = 1,008, t = 2001 - 1699 = 302 \end{array} \right.$$

$$K = 58 \text{ Fr} \cdot 1,008^{302}$$

$$K \approx 643,44 \text{ Fr}$$

Vastaus: Vuoden 1786 alkuun mennessä. Vuoden 1873 alkuun mennessä, 643,44 Fr.

**143.** Pääoma ajan  $t$  kuluttua  $K = kq^t$

200 mk ajan  $t$  kuluttua  $200 \cdot 1,05^t$

10 markan talletukset yhteensä ajan  $t$  kuluttua vuoden lopussa

$$10 \text{ mk} \cdot 1,05^t + 10 \text{ mk} \cdot 1,05^{t-1} + \dots + 10 \text{ mk} \cdot 1,05^1$$

$$= 10 \cdot (1,05^t + 1,05^{t-1} + \dots + 1,05 + 1) = 10 \cdot \frac{1,05 \cdot (1 - 1,05^t)}{1 - 1,05}$$

Saadaan yhtälö

$$200 \cdot 1,05^t + 10 \cdot \frac{1,05 \cdot (1 - 1,05^t)}{1 - 1,05} = 500$$

$$200 \cdot 1,05^t - 210 \cdot (1 - 1,05^t) = 500$$

$$200 \cdot 1,05^t - 210 + 210 \cdot 1,05^t = 500$$

$$410 \cdot 1,05^t = 710 \quad | : 410$$

$$1,05^t = \frac{710}{410} \quad | \lg$$

$$\lg 1,05^t = \lg \frac{710}{410}$$

$$t \lg 1,05 = \lg \frac{710}{410} \quad | : \lg 1,05$$

$$t = \frac{\lg \frac{710}{410}}{\lg 1,05}$$

$$t = 11,2544\dots$$

Pääoma 11 vuoden kuluttua vuoden lopussa (vuosi 1878 + 11 = 1889)

$$200 \cdot 1,05^{11} + 10 \cdot \frac{1,05 \cdot (1 - 1,05^{11})}{1 - 1,05} \approx 491,24$$

Seuraavan vuoden 1890 alussa talletetaan 10 mk, jolloin pääoma on 491,24 mk + 10 mk = 501,24 mk. Joten pääoma ylittää 500 mk vuoden 1890 alussa

Vastaus: Vuoden 1890 alussa.

**144.** A:n ja B:n sijoittama yhteismäärä  $a$

Korkokanta  $i$

A:n sijoitus  $28a$

B:n sijoitus  $29a$

$$\text{A:n sijoitus + korko } 28a + 28a \cdot i \cdot \frac{292}{365}$$

$$\text{B:n sijoitus + korko } 29a + 29a \cdot i \cdot \frac{219}{365}$$

Koska rahamäärät olivat yhtäsuuret, saadaan yhtälö

$$28a + 28a \cdot i \cdot \frac{292}{365} = 29a + 29a \cdot i \cdot \frac{219}{365} \quad | : a$$

$$28 + 28i \cdot \frac{292}{365} = 29 + 29 \cdot i \cdot \frac{219}{365}$$

$$28i \cdot \frac{292}{365} - 29 \cdot i \cdot \frac{219}{365} = 1 \quad | \cdot 365$$

$$28 \cdot 292i - 29 \cdot 219i = 365$$

$$1\ 825i = 365 \quad | : 1\ 825$$

$$i = 0,20$$

Vastaus: 20 %

**145. Korkokanta  $i$** 

Tilille vuoden aikana kertyvä korko

$$r = kit$$

$$= 120 \text{ mk} \cdot i \cdot \frac{12}{12} + 280 \text{ mk} \cdot i \cdot \frac{10}{12} + 160 \text{ mk} \cdot i \cdot \frac{7}{12}$$

Toisaalta korko saadaan erotuksena  $583,45 \text{ mk} - (120 \text{ mk} + 280 \text{ mk} + 160 \text{ mk}) = 23,45 \text{ mk}$ 

Saadaan yhtälö

$$120 \text{ mk} \cdot i \cdot \frac{12}{12} + 280 \text{ mk} \cdot i \cdot \frac{10}{12} + 160 \text{ mk} \cdot i \cdot \frac{7}{12} = 23,45 \text{ mk}$$

$$\frac{5\,360}{12} i = 23,45 \quad | \quad : \frac{5\,360}{12}$$

$$i = 0,0525$$

$$\text{Ensimmäisen talletuksen korko } r = kit = 120 \text{ mk} \cdot 0,0525 \cdot \frac{12}{12} = 6,30 \text{ mk}$$

Vastaus: 6,30 mk**146. Pääoma ajan  $t$  kuluttua  $K = kq^t$ , missä  $k = 2\,000 \text{ €}$  ja  $q = 1 + 0,035 = 1,035$ .**

Talletusvuosi	$k$ (€)	$K$ (€)
1.	2 000	$2\,000 \cdot 1,035^4$
2.	2 000	$2\,000 \cdot 1,035^3$
3.	2 000	$2\,000 \cdot 1,035^2$
4.	2 000	$2\,000 \cdot 1,035$

Talletukset yhteensä viidennen vuoden alussa

$$S_4 = 2\,000 \text{ €} \cdot 1,035^4 + 2\,000 \text{ €} \cdot 1,035^3 + 2\,000 \text{ €} \cdot 1,035^2 + 2\,000 \text{ €} \cdot 1,035$$

$$\approx 8\,724,93 \text{ €}$$

Kertynyt pääoma nostetaan vuoden kahdessa yhtä suuressa erässä. Erän suuruus  $x$  (€).

$$1,035 \cdot (8\,724,93 - x) = x$$

$$-2,035x = -9\,030,30 \quad | \quad :(-2,035)$$

$$x \approx 4\,437,50$$

Vastaus: Erän suuruus 4 437,50 €.**147.  $K = kq^t$ , missä  $K = 2k$ ,  $q = 1,05$** 

$$2k = k \cdot 1,05^t \quad | \quad :k$$

$$2 = 1,05^t \quad | \quad \lg$$

$$\lg 2 = \lg 1,05^t$$

$$\lg 2 = t \lg 1,05 \quad | \quad : \lg 1,05$$

$$t = \frac{\lg 2}{\lg 1,05}$$

$$t = 14,2066\dots$$

Yksikkömuunnos

$14,2066\dots a = 14 a + 0,2066\dots a = 14 a + 360 \cdot 0,2066\dots d \approx 14 a 74 d = 14 a 2 \text{ kk } 14 d$   
Vastaus: 14 a 2 kk 14 d

**148.** Alkupääoma  $k$

Kasvanut pääoma, kun vuosikorkokanta on 10 % on  $1,1k$ .

Kuukausikorkokerroin  $q$

$$kq^{12} = 1,1k \quad | :k$$

$$q^{12} = 1,1 \quad | \sqrt[12]{\phantom{x}}$$

$$q = \sqrt[12]{1,1}$$

$$q = 1,00797\dots$$

Kuukausikorko  $100,797\dots \% - 100 \% \approx 0,80 \%$

Vastaus: 0,80 %

**149.**  $K = kq^t$ ,  $k = 1\,000 \text{ €}$

a)  $q = 1,02$

$$K = 1\,000 \cdot 1,02 = 1\,020$$

b) puolivuosisikorko 2 %

$q = 1,02$  ja  $t = 2$  (2 puolivuotta)

$$K = 1\,000 \cdot 1,02^2 = 1\,040,40$$

c) kuukausikorko 2 %

$q = 1,02$  ja  $t = 12$

$$K = 1\,000 \cdot 1,02^{12} = 1\,268,24$$

Vastaus: a) 1 020 €, b) 1 040,40 € c) 1 268,24 €

**150.**  $K = kq^t$ ,  $k = 1\,000 \text{ €}$ ,  $q = 1,03$

a)  $K = 1\,000 + 1\,000 \cdot 0,03 \cdot \frac{6}{12} = 1\,015$

b) puolivuosisikorko 3 %

$q = 1,03$  ja  $t = 1$  (1 puolivuosi)

$$K = 1\,000 \cdot 1,03 = 1\,030,00$$

c) neljännesvuosisikorko 3 %

$q = 1,03$  ja  $t = 2$  (2 neljännesvuotta)

$$K = 1\,000 \cdot 1,03^2 = 1\,060,90$$

Vastaus: a) 1 015 €, b) 1 030 € c) 1 060,90 €

**151.**  $K = kq^t$ ,  $q = 1,01$  ja  $t = 12$

$$K = k \cdot 1,01^{12} \approx 1,127k$$

Vuosikorkokanta  $112,7 \% - 100 \% = 12,7 \%$

Vastaus: 12,7 %

152. Nosto  $x$

$$\text{Ensimmäinen puolen vuoden korko } 5\,000 \cdot 0,025 \cdot \frac{1}{2} = 62,50$$

$$\text{Toinen puolen vuoden korko } (5\,000 - x) \cdot 0,025 \cdot \frac{1}{2}$$

Lopussa tilin saldo on nolla

$$5\,000 \text{ €} + 62,50 \text{ €} + (5\,000 - x) \cdot 0,025 \cdot \frac{1}{2} - 2x = 0$$

$$-2,0125x = -5\,125$$

$$x = 2\,546,58$$

Vastaus: 2 546,58 €

153. Maan arvo ajan  $t$  kuluttua  $K = kq^t$ , missä  $k = 45\,000$  \$,  $q = 1 + 0,08 = 1,08$  ja  $t = 20$  a. Maan arvo  $K = 45\,000$  \$ \cdot 1,08^{20} \approx 210\,000 \$.

154. Pääoma ajan  $t$  kuluttua  $K = kq^t$ , missä  $k = 3\,500$  kr ja  $q = 1 + 0,0300 = 1,03$ .

Talletusvuosi	$k$ (kr)	$K$ (kr)
1.	3 500	$3\,500 \cdot 1,03^6$
2.	3 500	$3\,500 \cdot 1,03^5$
3.	3 500	$3\,500 \cdot 1,03^4$
4.	3 500	$3\,500 \cdot 1,03^3$
5.	3 500	$3\,500 \cdot 1,03^2$
6.	3 500	$3\,500 \cdot 1,03^1$
7.	3 500	3 500

Talletukset yhteensä viidennen vuoden alussa

$$S_7 = 3\,500 \text{ kr} \cdot 1,03^6 + 3\,500 \text{ kr} \cdot 1,03^5 + \dots + 3\,500 \text{ kr} \cdot 1,03 + 3\,500 \text{ kr}$$

$$= 3\,500 \text{ kr} \cdot (1,03^6 + 1,03^5 + \dots + 1) \quad \left| \begin{array}{l} S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \\ a_1 = 1, q = 1,03, n = 7 \end{array} \right.$$

$$= 3\,500 \text{ kr} \cdot 1 \cdot \frac{1 - 1,03^7}{1 - 1,03}$$

$$\approx 26\,818,62 \text{ kr}$$

## TESTAA HYVÄT TAITOSI 1

1. Hinta alussa  $a$

Muuttunut hinta  $1,049 \cdot 1,025 \cdot 0,94a \approx 1,011a$

Vastaus: Hinta nousi 1,1 %

2. Hinta markkoina vuonna 2002  $x$

$$\frac{0,50}{651} = \frac{x}{1\,567}$$

$$651x = 783,5$$

$$x = 1,2035\dots$$

$$\text{Hinta sentteinä } \frac{1,2035\dots}{5,94573} \cdot 100 \approx 20$$

Vastaus: 20 senttiä

3. Myyntikurssi  $1 \text{ €} = 4,4330 \text{ PLN}$

$$75 \text{ €} = 75 \cdot 4,4330 \text{ PLN} \approx 332,48 \text{ PLN}$$

Ostokurssi  $1 \text{ €} = 4,4970 \text{ PLN}$

$$1\,497,50 \text{ PLN} = \frac{1\,497,50}{4,4970} \text{ €} \approx 333,00 \text{ €}$$

Vastaus: 332,48 PLN ja 333,00 €

4.  $a_{141} = 4 + (141 - 1) \cdot 4 = 564$

$$S_{141} = \frac{4 + 564}{2} \cdot 141 = 40\,044$$

Vastaus: 40 044

$$5. r = kit \quad \left| \quad k = 500, i = 0,36, t = \frac{10}{12} \right.$$

$$r = 500 \cdot 0,036 \cdot \frac{10}{12} = 15$$

Vastaus: 15 €

6. Hinta alussa  $a$

Keskimääräinen muutoskerroin  $q$

$$q^4 a = 1,032 \cdot 0,96 \cdot 1,023 \cdot 1,011 a \quad | :a$$

$$q^4 = 1,02465\dots$$

$$q = \sqrt[4]{1,02465\dots}$$

$$q \approx 1,006$$

Nousu prosentti  $100,6\% - 100\% = 0,6\%$

Vastaus: Hinta nousi keskimäärin  $0,6\%$

7. Martin palkan nousukerroin  $100\% + 7,5\% = 107,5\% = 1,075$

$$\text{Palkan nousun suhde indeksin nousuun} \frac{1,075}{\frac{109,8}{103,9}} = 1,0172\dots$$

Nousu prosentteina  $101,72\dots\% - 100\% \approx 1,7\%$

Vastaus: Reaalipalkka nousi  $1,7\%$

8.

$$S_6 = \frac{120 \cdot (1 - 1,08^6)}{1 - 1,08} \approx 880$$

Vastaus: 880

9.  $K = 239 \text{ €} \cdot 1,03^4 + 239 \text{ €} \cdot 1,03^3 + 239 \text{ €} \cdot 1,03^2 + 239 \text{ €} \cdot 1,03^1 \approx \underline{\underline{999,89 \text{ €}}}$

10. Tehtaan hinta  $a$

Korotuskerroin  $q$

$$a \cdot q \cdot q = 1,21a \quad | :a$$

$$q^2 = 1,21$$

$$q = \sqrt{1,21}$$

$$q = 1,1$$

Korotusprosentti  $110\% - 100\% = 10\%$

Vastaus: Voitto oli kummallakin  $10\%$

## 6. NYKYARVO

155. Nykyarvo  $k = \frac{K}{q^t}$  |  $K = 12\,800, q = 1 + 0,035 = 1,035, t = 2$

$$k = \frac{12\,800}{1,035^2} \text{ €} \approx 11\,948,94 \text{ €}$$

Vastaus: Tilille talletettava 11 948,94 €

156. Nykyarvo  $k = \frac{K}{q^t}$  |  $K = 7\,900, q = 1 + 0,045 = 1,045, t = 3$

$$k = \frac{7\,900}{1,045^3} \text{ €} \approx 6\,922,74 \text{ €}$$

Vastaus: Tilin nykyarvo on 6 922,74 €

157. Nykyarvo  $k = \frac{K}{q^t}$  |  $K = 9\,750, q = 1 + 0,065 = 1,065, t = 5$

$$k = \frac{9\,750}{1,065^5} \text{ €} \approx 7\,116,34 \text{ €}$$

Vastaus: Lainan nykyarvo vuoden 2007 alussa on 7 116,34 €.

158. Lasketaan tarjouksien nykyarvot. Ensimmäinen tarjous

$$k = \frac{K}{q^t} \quad | \quad K = 15\,000, q = 1 + 0,08 = 1,08, t = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$k = 75\,000 \text{ €} + \frac{15\,000}{1,08} \text{ €} + \frac{15\,000}{1,08^2} \text{ €} + \frac{15\,000}{1,08^3} \text{ €} + \frac{15\,000}{1,08^4} \text{ €} + \frac{15\,000}{1,08^5} \text{ €} \approx 134\,891 \text{ €}$$

Toinen tarjous  $k = \frac{K}{q^t}$  |  $K = 25\,000, q = 1 + 0,08 = 1,08, t = 1, 2, 3, 4$

$$k = 50\,000 \text{ €} + \frac{25\,000}{1,08} \text{ €} + \frac{25\,000}{1,08^2} \text{ €} + \frac{25\,000}{1,08^3} \text{ €} + \frac{25\,000}{1,08^4} \text{ €} \approx 132\,803 \text{ €}$$

Vastaus: Jälkimmäinen tarjous oli edullisempi.

159 . Lasketaan tarjouksien nykyarvot  $k = \frac{K}{q^t}$  . Veijoloiden tarjous  $k = 35\,000 \text{ €}$  .

$$\text{Terholoiden tarjous } k = 15\,000 \text{ €} + \frac{10\,000}{1,038} \text{ €} + \frac{12\,500}{1,038^2} \text{ €} \approx 36\,235 \text{ €}$$

Vastaus: Ailin kannattaa myydä Terholoille.

**160.** Lasketaan investointien nykyarvot  $k = \frac{K}{q^t}$ . Kivirakennus  $k = 150\,000$  €.

$$\text{Puurakennus } k = 120\,000 \text{ €} + \frac{120\,000}{1,05^{30}} \text{ €} \approx 147\,800 \text{ €}$$

Vastaus: Puusta rakennettu halli on edullisempi.

**161.** Tehtävien talletusten lukumäärä  $n$

Talletuksen nykyarvo  $k = \frac{K}{q^t}$  |  $k = 2\,000, K = 120, q = 1 + 0,03 = 1,03, t = 1, 2, \dots, n$

$$k = \frac{120}{1,03} + \frac{120}{1,03^2} + \frac{120}{1,03^3} + \dots + \frac{120}{1,03^n}$$

$$2000 = 120 \cdot (1,03^{-1} + 1,03^{-2} + 1,03^{-3} + \dots + 1,03^{-n})$$

$$\left| \begin{array}{l} S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \\ a_1 = 1,03^{-1}, q = \frac{1,03^{-2}}{1,03^{-1}} = 1,03^{-1} \end{array} \right.$$

$$2000 = 120 \cdot 1,03^{-1} \cdot \frac{1 - (1,03^{-1})^n}{1 - 1,03^{-1}}$$

$$2000 = 4000 [1 - (1,03^{-1})^n] \quad | :4000$$

$$1 - (1,03^{-1})^n = 0,5$$

$$-(1,03^{-1})^n = -0,5 \quad | :(-1)$$

$$(1,03^{-1})^n = 0,5 \quad | \lg$$

$$\lg(1,03^{-1})^n = \lg 0,5$$

$$n \lg 1,03^{-1} = \lg 0,5 \quad | : \lg 1,03^{-1}$$

$$n = \frac{\lg 0,5}{\lg 1,03^{-1}}$$

$$n \approx 23,4$$

Vastaus: Stipendi voidaan myöntää 23 vuotena.

**162.** Sijoituksen nykyarvo  $k = \frac{K}{q^t}$ .

$$k = \frac{4\,000}{1,0325^{0,5}} \text{ €} + \frac{10\,000}{1,0325} \text{ €} + \frac{15\,000}{1,0325^2} \text{ €} + \frac{18\,000}{1,0325^3} \text{ €} \approx 44\,045,51 \text{ €}$$

Vastaus: Koska talletusten nykyarvo on suurempi kuin sijoitettava rahamäärä, niin sijoitus oli kannattava.

**163.** Sijoituksen nykyarvo  $k = \frac{K}{q^t}$ .

$$k = \frac{30\,000}{1,06} \text{ €} + \frac{40\,000}{1,06^{2,5}} \text{ €} + \frac{60\,000}{1,06^3} \text{ €} \approx 113\,256,68 \text{ €}$$

Vastaus: Koska talletusten nykyarvo on pienempi kuin sijoitettava rahamäärä, niin sijoitus ei ollut kannattava.

**164.** Sijoitusten nykyarvo  $k = \frac{K}{q^t}$ .

$$k = 7\,000 \text{ €} + \frac{1\,500}{1,0475} \text{ €} + \frac{6\,500}{1,0475^3} \text{ €} + \frac{3\,000}{1,0475^4} \text{ €} \approx 16\,578,98 \text{ €}$$

Talletuksen arvo kahden vuoden kuluttua  $K = kq^t$  |  $k = 16\,578,98$ ,  $q = 1,0475$ ,  $t = 2$

$$k = 16\,578,98 \text{ €} \cdot 1,0475^2 \approx 18\,191 \text{ €}$$

Vastaus: Kahden vuoden kuluttua tehtävän sijoituksen suuruus olisi 18 191 €.

**165.** Yksinkertainen korko  $r = kit$

Pääoma talletuksen alussa  $k$

Pääoma talletuksen lopussa

$$K = k + kit \quad | \quad K = 7\,500, i = 0,0275, t = 0,5$$

$$7\,500 = k + k \cdot 0,0275 \cdot 0,5$$

$$1,01375k = 7\,500 \quad | :1,01375$$

$$k \approx 7\,398,27$$

Vastaus: Saamisen nykyarvo on 7 398,27 €.

**166.** Vekselin pääoma 4 000 €

Korkoprosentti 10,4 % = 0,104

$$\text{Yksinkertainen korko } r = kit = 4\,000 \text{ €} \cdot 0,104 \cdot \frac{10}{12} \approx 346,67 \text{ €}$$

$$\text{Käteen saatu pääoma } 4\,000 \text{ €} - 346,67 \text{ €} = 3\,653,33 \text{ €}$$

Vastaus: Lainanottaja saa käteen 3 653,33 €

**167.** Nykyarvo  $k = \frac{K}{q^t}$  |  $K = 3\,000$ ,  $q = 1 + 0,036 = 1,036$ ,  $t = 4$

$$\text{Jäännösarvon nykyarvo } k = \frac{3\,000}{1,036^4} \text{ €} \approx 2\,604,25 \text{ €}$$

Vastaus: Laitteen jäännösarvon nykyarvo on 2 604,25 €

**168.** Lasketaan maksuehtojen nykyarvot  $k = \frac{K}{q^t}$ . Korkokerroin  $q = 1 + 0,08 = 1,08$

$$\text{Tarjous A: } k = 0,4 \cdot 10000 \text{ €} + \frac{0,6 \cdot 10000}{1,08^2} \text{ €} \approx 9\,144,03 \text{ €}$$

$$\text{Tarjous B: } k = 0,1 \cdot 10000 \text{ €} + \frac{0,9 \cdot 10000}{1,08} \text{ €} \approx 9\,333,33 \text{ €}$$

Vastaus: Maksuehto A on ostajalle edullisempi.

**169.** Lasketaan tuottojen nykyarvot  $k = \frac{K}{q^t}$ . Korkokerroin  $q = 1 + 0,0400 = 1,04$

$$\text{Tuottojen nykyarvo } k = \frac{1000}{1,04} \text{ €} + \frac{1000}{1,04^2} \text{ €} + \frac{1000}{1,04^3} \text{ €} + \frac{1000}{1,04^4} \text{ €} \approx 3\,629,90 \text{ €}$$

Vastaus: Laitteesta kannattaa maksaa 3 629,90 €.

**170.** Nykyarvo  $k = \frac{K}{q^t}$

Koneen nettotuottojen ja poistoarvon nykyarvo, kun korkokanta on 5%.  
Korkokerroin  $q = 1 + 0,05 = 1,05$

$$1. \text{ vuoden tuoton nykyarvo } k_1 = \frac{25\,000}{1,05} \text{ mk} \approx 23\,809,52 \text{ mk}$$

$$2. \text{ vuoden tuoton nykyarvo } k_2 = \frac{25\,000}{1,05^2} \text{ mk} \approx 22\,675,74 \text{ mk}$$

$$3. \text{ vuoden tuoton nykyarvo } k_3 = \frac{25\,000}{1,05^3} \text{ mk} \approx 21\,595,94 \text{ mk}$$

$$4. \text{ vuoden tuoton nykyarvo } k_4 = \frac{25\,000}{1,05^4} \text{ mk} \approx 20\,567,56 \text{ mk}$$

$$5. \text{ vuoden tuoton nykyarvo } k_5 = \frac{25\,000}{1,05^5} \text{ mk} \approx 19\,588,15 \text{ mk}$$

$$\text{Poistoarvon nykyarvo } k_p = \frac{20\,000}{1,05^5} \text{ mk} \approx 15\,670,52 \text{ mk}$$

Nykyarvot yhteensä  $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_p \approx 123\,907,43 \text{ mk}$ .

Koska nettotuottojen ja poistoarvon nykyarvo on pienempi kuin koneen hankintahinta, niin hankinta ei kannata.

Vastaus: Koneen tuottojen nykyarvo 108 236,91 mk ja poiston nykyarvo 15 670,52 mk.  
Koneen hankinta ei kannata.

171. Arton tilille  $x$  (€)  
 Anjan tilille  $9\,500 - x$   
 Raha Anjan tilillä 5 vuotta, Arton tilillä 9 vuotta  
 Korko 2,5 %, joten sijoitus tulee 1,025-kertaiseksi joka vuosi

$$1,025^9 \cdot x = 1,025^5 \cdot (9\,500 - x)$$

$$1,025^9 x + 1,025^5 x = 9\,500$$

$$(1,025^9 - 1,025^5)x = 9\,500 \quad \Big| : (1,025^9 - 1,025^5)$$

$$x = \frac{9\,500}{1,025^9 - 1,025^5}$$

$$x = 4\,515,6107$$

$$x \approx 4\,515,60$$

Anjan tilille  $9\,500 - x \approx 4\,984,40$

Vastaus: Anjan tilille on sijoitettava 4 984,40 € ja Arton tilille 4 515,60 €

172. Korkotekijä  $q = 1 + \frac{4,5}{100} = 1,045$

Vuoden kuluttua maksettavan stipendin nykyarvo  $k_1 = \frac{K}{q^n} = \frac{200}{1,045}$  €

Kahden vuoden kuluttua maksettavan stipendin nykyarvo  $k_2 = \frac{300}{q^2} = \frac{300}{1,045^2}$  €

Kolmen vuoden kuluttua maksettavan stipendin nykyarvo  $k_3 = \frac{400}{q^3} = \frac{400}{1,045^3}$  €

Neljän vuoden kuluttua maksettavan stipendin nykyarvo  $k_4 = \frac{500}{q^4} = \frac{500}{1,045^4}$  €

Viiden vuoden kuluttua maksettavan stipendin nykyarvo  $k_5 = \frac{600}{q^5} = \frac{600}{1,045^5}$  €

Stipendien nykyarvot yhteensä

$$k = \frac{200}{1,045} \text{ €} + \frac{300}{1,045^2} \text{ €} + \frac{400}{1,045^3} \text{ €} + \frac{500}{1,045^4} \text{ €} + \frac{600}{1,045^5} \text{ €} \approx 1\,717,38 \text{ €}$$

Vastaus: Rahaa on lahjoitettava 1 717,38 €

173. Nykyarvo  $k = \frac{K}{q^t} \quad \Big| \quad K = 10\,000, q = 1 + 0,05 = 1,05, t = 7$

$$k = \frac{10\,000}{1,05^7} \text{ kr} \approx 7\,106,81 \text{ kr}$$

Vastaus: Lainan nykyarvo vuoden 2007 alussa on 7 100 kr.

## 7. LAINAT JA KAUPANKÄYNTIIN LIITTYVÄT KOROT

Tasalyhennyslaina

174.

Erä	Lainaa jäljellä	Korko	Lyhennys	Hoitomaksu
1.	10 000	260	3 000	3260
2.	7 000	182	7 000	7182

175.

Erä	Lainaa jäljellä	Korko	Lyhennys	Hoitomaksu
1.	8100,00	243,00	1350,00	1593,00
2.	6750,00	202,50	1350,00	1552,50
3.	5400,00	162,00	1350,00	1512,00
4.	4050,00	121,50	1350,00	1471,50
5.	2700,00	81,00	1350,00	1431,00
6.	1350,00	40,50	1350,00	1390,50

176.

Erä	Lainaa jäljellä	Korko	Lyhennys	Hoitomaksu
1.	12000,00	225,00	1500,00	1725,00
2.	10500,00	196,88	1500,00	1696,88
3.	9000,00	168,75	1500,00	1668,75
4.	7500,00	140,63	1500,00	1640,63
5.	6000,00	112,50	1500,00	1612,50
6.	4500,00	84,38	1500,00	1584,38
7.	3000,00	56,25	1500,00	1556,25
8.	1500,00	28,13	1500,00	1528,13

177.

Erä	Lainaa jäljellä	Korko	Lyhennys	Hoitomaksu
1.	5000,00	75,00	1000,00	1075,00
2.	4000,00	60,00	1000,00	1060,00
3.	3000,00	56,25	1000,00	1056,25
4.	2000,00	37,50	1000,00	1037,50
5.	1000,00	18,75	1000,00	1018,75
			yhteensä	5247,50

Annuiteetilaina

178. Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \begin{array}{l} K = 7\,500, q = 1 + \frac{0,0725}{1} = 1,0725, n = 5 \\ \\ \end{array} \right.$$
$$= 7\,500 \cdot 1,0725^5 \cdot \frac{1-1,0725}{1-1,0725^5}$$
$$\approx 1\,841,44$$

Lainaa jäljellä 3 vuoden kuluttua

$$V = Kq^k - A \frac{1-q^k}{1-q} \quad \left| \begin{array}{l} K = 7\,500, q = 1,0725, k = 3, A = 1\,841,44 \\ \\ \end{array} \right.$$
$$= 7\,500 \cdot 1,0725^3 - 1\,841,44 \cdot \frac{1-1,0725^3}{1-1,0725}$$
$$\approx 3\,317,86$$

Vastaus: Annuiteetin suuruus on 1 841,44 €. Lainaa on jäljellä 3 317,86 € kolmen vuoden kuluttua.

179. Annuiteetin suuruus

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \begin{array}{l} K = 3\,000 \\ q = 1 + \frac{0,098}{12} = 1,008166... \\ n = 4 \cdot 12 = 48 \\ \end{array} \right.$$
$$= 3\,000 \cdot 1,008166...^{48} \cdot \frac{1-1,008166...}{1-1,008166...^{48}}$$
$$\approx 75,80$$

Lainaa jäljellä 20 kuukauden kuluttua

$$V = Kq^k - A \frac{1-q^k}{1-q} \quad \left| \begin{array}{l} K = 3\,000 \\ q = 1 + \frac{0,098}{12} \approx 1,008166... \\ k = 20 \\ A = 75,80 \\ \end{array} \right.$$
$$= 3\,000 \cdot 1,008166...^{20} - 75,80 \cdot \frac{1-1,008166...^{20}}{1-1,008166...}$$
$$\approx 1\,890,32$$

Vastaus: Annuiteetin suuruus on 75,80 €. Lainaa on jäljellä 1 890,32 € vuoden ja 8 kk:n kuluttua.

**180.** Lainan hoitokulut yhteensä  $36 \cdot 51 \text{ €} = 1\,836 \text{ €}$ .

Hoitokulujen suhde lainaan  $\frac{1\,836}{1\,200} = 1,53$

Korkoprosentti koko laina-ajalta  $1,53 - 1 = 0,53 = 53 \%$

Vastaus: 53 %

**181.** a) Annuiteetti

Annuiteetin suuruus

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \begin{array}{l} K = 2\,300 \\ q = 1 + \frac{0,135}{12} = 1,01125 \\ n = 3 \cdot 12 = 36 \end{array} \right.$$
$$= 2\,300 \cdot 1,01125^{36} \cdot \frac{1-1,01125}{1-1,01125^{36}}$$
$$\approx 78,05$$

b) Annuiteetit yhteensä  $36 \cdot 78,05 = 2\,809,80$

Tilinhoitomaksut yhteensä  $36 \cdot 5 = 180$

Vuosimaksut yhteensä  $3 \cdot 10 = 30$

Kokonaiskustannukset  $2\,809,80 + 180 + 30 = 3\,019,80$

c) Koron osuus annuiteetit – pääoma =  $2\,809,80 - 2\,300 = 509,80$

Vastaus: a) Annuiteetin suuruus on 78,05 € b) kokonaiskustannukset 3 019,80 € c) korot 509,80 €.

**182.** Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \begin{array}{l} K = 105\,000, q = 1 + \frac{0,052}{12} = 1,00433\dots, n = 20 \cdot 12 = 240 \end{array} \right.$$

$$A = 105\,000 \text{ €} \cdot 1,00433\dots^{240} \cdot \frac{1-1,00433\dots}{1-1,00479\dots^{240}} \approx 704,61 \text{ €}$$

Vastaus: Koska  $A > 700 \text{ €}$ , niin nykyinen vuokra ei riitä kattamaan asunnon lainasta johtuvia maksuja.

Kaupankäyntiin liittyvät korot

**183.** Marraskuun 8. päivästä tammikuun 7. päivään on  $23 + 31 + 7 = 61$  päivää.

Lasketaan, kuinka suuri pääoma kasvaa 61 päivässä  $1\,950 \text{ €}$ :n suuruiseksi, kun korkokanta on  $7,6 \%$ .

Kasvanut pääoma

$$K = k + kit \quad \left| \begin{array}{l} K = 1\,950 \text{ €}, i = 0,076, t = \frac{61}{365} \end{array} \right.$$

$$1950 = k + k \cdot 0,076 \cdot \frac{61}{365} \quad | \cdot 365$$

$$711\,750 = 365k + 4,636k$$

$$369,636k = 711\,750 \quad | :369,636$$

$$k \approx 1\,925,54 \quad (\text{€})$$

Vastaus: Erikin pitää maksaa 1 925,54 €

**184.** Loppuerä  $182\,000 \text{ €} - 65\,000 \text{ €} = 117\,000 \text{ €}$ .

Heinäkuun 6. päivästä lokakuun 18. päivään on  $26 + 31 + 30 + 18 = 105$  päivää.

Lasketaan, kuinka suuri pääoma kasvaa 105 päivässä  $117\,000 \text{ €}$ :n suuruiseksi, kun korkokanta on  $7,5 \%$ .

Kasvanut pääoma

$$K = k + kit \quad | K = 117\,000 \text{ €}, i = 0,075, t = \frac{105}{365}$$

$$117\,000 = k + k \cdot 0,075 \cdot \frac{105}{365} \quad | \cdot 365$$

$$42\,705\,000 = 365k + 7,875k$$

$$372,875k = 42\,705\,000 \quad | :372,875$$

$$k \approx 114\,529,00 \quad (\text{€})$$

Yrityksen pitää maksaa  $114\,529,00 \text{ €}$ , joten hyvitys on

$$117\,000 \text{ €} - 114\,529,00 \text{ €} = 2\,471,00 \text{ €}$$

Vastaus: Hyvitys on 2 471,00 €

**185.** a) Luottohinta  $21 \text{ €} + 12 \cdot (150,23 \text{ €} + 4,60 \text{ €}) = 1\,878,96 \text{ €}$

$$\text{b) Keskimaksuaika} = \frac{12 \text{ kk} + 1 \text{ kk}}{2} = 6,5 \text{ kk}$$

c) Todellinen vuosikorkokanta on se korkokanta  $i$ , joka tuottaa käteishinnalle osamaksulisän verran korkoa keskimaksuajan kuluessa.

$$1\,599 \cdot i \cdot \frac{6,5}{12} = 1\,878,96 - 1\,599$$

$$1\,599 \cdot i \cdot \frac{6,5}{12} = 279,96 \quad | \cdot 12$$

$$10\,393,5i = 3\,359,52 \quad | :10\,393,5$$

$$i \approx 0,323$$

$$i = 32,3 \%$$

Vastaus: a) Luottohinta 1 878,96 € b) keskimaksuaika 6,5 kk c) todellinen vuosikorkokanta 32,3 %

**186.** a) Luottohinta  $26 \text{ €} + 12 \cdot (194,52 \text{ €} + 5,00 \text{ €}) = 2\,420,24 \text{ €}$

$$\text{b) Keskimaksuaika} = \frac{12 \text{ kk} + 1 \text{ kk}}{2} = 6,5 \text{ kk}$$

c) Todellinen vuosikorkokanta on se korkokanta  $i$ , joka tuottaa käteishinnalle osamaksulisän verran korkoa keskimaksuajan kuluessa.

$$1\,997 \cdot i \cdot \frac{6,5}{12} = 2\,420,24 - 1\,997$$

$$1\,997 \cdot i \cdot \frac{6,5}{12} = 423,24 \quad | \cdot 12$$

$$12\,980,50i = 5\,078,88 \quad | :12\,980,50$$

$$i \approx 0,391$$

$$i = 39,1\%$$

Vastaus: a) Luottohinta 2 420,24 € b) keskimaksuaika 6,5 kk c) todellinen vuosikorkokanta 39,1 %

**187.** a) Kuukausivuokra on 1,62 % hankintahinnasta

$$\text{Kuukausivuokra } 0,0162 \cdot 37\,000 \text{ €} = 599,40 \text{ €}$$

b) Vuokraeriä on 48

$$\text{Kokonaiskustannukset ovat } 48 \cdot 599,40 \text{ €} = 28\,771,20 \text{ €}$$

Vastaus: a) Kuukausivuokra on 599,40 € b) Kokonaiskustannukset ovat 28 771,20 €

**188.** a) Kuukausivuokra prosentteina hankintahinnasta  $\frac{155}{6\,500} = 0,02384\dots \approx 2,38\%$ , joten

leasingkerroin on 2,38.

b) Vuokraeriä on 36

$$\text{Kokonaiskustannukset ovat } 36 \cdot 155 \text{ €} = 5\,580 \text{ €}$$

Vastaus: a) Leasingkerroin on 2,38 b) Kokonaiskustannukset ovat 5 580 €

### **Todellinen korko**

**189.** Hallinnolliset kulut vähennetään lainan nimellisarvosta.

Aunon saaman luoton suuruus on  $3\,500 \text{ €} - 52 \text{ €} = 3\,448 \text{ €}$ .

Lasketaan, minkä korkokannan mukaan  $3\,448 \text{ €}$  kasvaa korkoa korolle  $4\,250 \text{ euroksi}$  kyseisessä ajassa.

Korkopäivien määrä

$$t = 365 \text{ d} + 31 \text{ d} + 28 \text{ d} + 31 \text{ d} = 455 \text{ d} = \frac{455}{365} \text{ a}$$

Korkokerroin

$$\begin{array}{l|l} K = kq^t & K = 4\,250 \\ & k = 3\,448 \\ & t = \frac{455}{365} \\ \hline 4\,250 = 3\,448 \cdot q^{\frac{455}{365}} & | : 3\,448 \\ \hline q^{\frac{455}{365}} = \frac{4\,250}{3\,448} & | \left( \right)^{\frac{365}{455}} \\ \hline q = \left( \frac{4\,250}{3\,448} \right)^{\frac{365}{455}} \\ q = 1,1826\dots \end{array}$$

Korkokanta  $118,26\dots\% - 100\% = 18,26\dots\% \approx 18,3\%$

Vastaus: Todellinen vuosikorkokanta on 18,3 %.

**190.** Hallinnolliset kulut vähennetään lainan nimellisarvosta.

Aunon saaman luoton suuruus on  $5\,100\text{ €} - 45\text{ €} = 5\,055\text{ €}$ .

Lasketaan, minkä korkokannan mukaan  $5\,055\text{ €}$  kasvaa korkoa korolle  $6\,700$  euroksi kyseisessä ajassa.

Korkopäivien määrä

$$t = 31\text{ d} + 30\text{ d} + 31\text{ d} + 30\text{ d} + 31\text{ d} + 31\text{ d} + 30\text{ d} + 31\text{ d} + 30\text{ d} + 31\text{ d} + (365\text{ d} - 31\text{ d}) =$$

$$640\text{ d} = \frac{640}{365}\text{ a}$$

Korkokerroin

$$\begin{array}{l|l} K = kq^t & K = 6\,700 \\ & k = 5\,055 \\ & t = \frac{640}{365} \\ \hline 6\,700 = 5\,055 \cdot q^{\frac{640}{365}} & | : 5\,055 \\ \hline q^{\frac{640}{365}} = \frac{6\,700}{5\,055} & | \left( \right)^{\frac{365}{640}} \\ \hline q = \left( \frac{6\,700}{5\,055} \right)^{\frac{365}{640}} \\ q = 1,1743\dots \end{array}$$

Korkokanta  $117,43\dots\% - 100\% = 17,43\dots\% \approx 17,4\%$

Vastaus: Todellinen vuosikorkokanta on 17,4 %.

**191.** Lasketaan minkä korkokannan mukaan kummankin erän luotonottohetkeen diskontattu yhteenlaskettu nykyarvo on 7 000 €.

$$4250 \cdot q^{-1} + 4250 \cdot q^{-2} = 7000$$

$$\overset{q)}{\frac{4250}{q} + \frac{4250}{q^2} = 7000}$$

$$\frac{4250q}{q^2} + \frac{4250}{q^2} = \frac{7000q^2}{q^2} \quad | \cdot q^2$$

$$4250q + 4250 = 7000q^2$$

$$-7000q^2 + 4250q + 4250 = 0$$

$$q = \frac{-4250 \pm \sqrt{4250^2 - 4 \cdot (-7000) \cdot 4250}}{2 \cdot (-7000)}$$

$$= \frac{-4250 \pm \sqrt{137\,062\,500}}{-14000}$$

$$q_1 = \frac{-4250 - \sqrt{137\,062\,500}}{-14000} = 1,1398\dots$$

$$q_2 = \frac{-4250 + \sqrt{137\,062\,500}}{-14000} = -0,532\dots < 0 \text{ ei käy, } q > 0$$

Korkokanta  $1,1398\dots - 1 = 0,1398\dots \approx 14,0\%$

Vastaus: Todellinen vuosikorkokanta on 14,0 %.

**192.** Lasketaan minkä korkokannan mukaan kummankin erän luotonottohetkeen diskontattu yhteenlaskettu nykyarvo on 16 200 €.

$$9\,200 \cdot q^{-1} + 9\,200 \cdot q^{-2} = 16200$$

$$\overset{q)}{\frac{9\,200}{q} + \frac{9\,200}{q^2} = 16200}$$

$$\frac{9\,200q}{q^2} + \frac{9\,200}{q^2} = \frac{16200q^2}{q^2} \quad | \cdot q^2$$

$$9\,200q + 9\,200 = 16200q^2$$

$$-16200q^2 + 9\,200q + 9\,200 = 0$$

$$q = \frac{-9\,200 \pm \sqrt{9\,200^2 - 4 \cdot (-16200) \cdot 9\,200}}{2 \cdot (-16200)}$$

$$= \frac{-9\,200 \pm \sqrt{680\,800\,000}}{-32\,400}$$

$$q_1 = \frac{-9\,200 + \sqrt{680\,800\,000}}{-32\,400} = 1,0892\dots$$

$$q_2 = \frac{-9\,200 \pm \sqrt{680\,800\,000}}{-32\,400} = -0,521\dots < 0 \text{ ei käy, } q > 0$$

Korkokanta  $1,892\dots - 1 = 0,892\dots \approx 8,92\%$

Vastaus: Todellinen vuosikorkokanta on 8,9 %.

**193.** Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \quad A = 120, q = 1 + \frac{0,103}{12} = 1,00858\dots, n = 2 \cdot 12 = 24 \right.$$

$$\text{Lainan suuruus } 120 = K \cdot 1,00858\dots^{24} \frac{1-1,00858\dots}{1-1,00858\dots^{24}}$$

$$0,0462\dots K = 120 \quad | :0,0462\dots$$

$$K \approx 2\,593$$

Vastaus: Lainan suuruus 2 593 €.

**194.** Lainapääoma 10 000 €

Laina-aika 3 a

Lyhennysten määrä  $3 \cdot 4 = 12$

a) Kaikki lyhennykset yhtä suuria  $\frac{10\,000}{12} \text{ €} \approx 833,33 \text{ €}$ .

b) Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \quad K = 10\,000, q = 1 + \frac{0,065}{4} = 1,01625, n = 3 \cdot 4 = 12 \right.$$

$$A = 10\,000 \cdot 1,01625^{12} \cdot \frac{1-1,01625}{1-1,01625^{12}} \approx 923,95$$

Ensimmäisessä erässä maksettava korko  $r = kpt = 0,065 \cdot 10\,000 \cdot \frac{1}{4} = 162,50$ .

Ensimmäisessä erässä maksettava lyhennys  $923,95 \text{ €} - 162,50 \text{ €} = 761,45 \text{ €}$

Lainaa jäljellä 11 lyhennyksen jälkeen

$$V = Kq^k - A \frac{1-q^k}{1-q} \quad \left| \quad K = 10\,000, q = 1,01625, A = 923,95, k = 11 \right.$$

$$V = 10\,000 \cdot 1,01625^{11} - 923,95 \cdot \frac{1-1,01625^{11}}{1-1,01625} \approx 909,22$$

Viimeisessä erässä maksettava lyhennys 909,22 €

Vastaus: a) molemmat 833,33 € b) 761,45 € ja 909,22 €

**195.** a) Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \quad K = 10\,000, q = 1 + \frac{0,075}{2} = 1,0375, n = 3 \cdot 2 = 6 \right.$$

$$A = 10\,000 \cdot 1,0375^6 \cdot \frac{1-1,0375}{1-1,0375^6} \approx 1\,892,12$$

Korkokulut = Hoitomaksut – Lainapääoma  
 $6 \cdot 1\,892,12 \text{ €} - 10\,000 \text{ €} = 1\,352,73 \text{ €}$

b)

Erä	Lainaa jäljellä	Korko	Lyhennys	Hoitomaksu
1.	10000,00	375,00	1666,67	2041,67
2.	8333,33	312,50	1666,67	1979,17
3.	6666,67	250,00	1666,67	1916,67
4.	5000,00	187,50	1666,67	1854,17
5.	3333,33	125,00	1666,67	1791,67
6.	1666,67	62,50	1666,67	1729,17
	yhteensä	1312,50		

Vastaus: a)  $1\,352,73 \text{ €}$  b)  $1\,312,50 \text{ €}$

196. Tasalyhennyslainassa lyhennyksen suuruus  $\frac{100\,000}{144} \text{ €} \approx 694,44 \text{ €}$

Ensimmäinen korko  $r = kpt = 0,0575 \cdot 100\,000 \text{ €} \cdot \frac{1}{12} \approx 479,17 \text{ €}$

Ensimmäinen hoitomaksu  $694,44 \text{ €} + 479,14 \text{ €} = 1\,173,61 \text{ €}$   
 Puolivälissä lainaa on jäljellä  $50\,000 \text{ €}$

Keskimmäisen erän korko  $r = 0,0575 \cdot 50\,000 \text{ €} \cdot \frac{1}{12} \approx 239,58 \text{ €}$

Keskimmäinen hoitomaksu  $694,44 \text{ €} + 239,58 \text{ €} = 934,02 \text{ €}$

Viimeisen erän korko  $r = 0,0575 \cdot 694,44 \text{ €} \cdot \frac{1}{12} \approx 3,33 \text{ €}$

Viimeinen hoitomaksu  $694,44 \text{ €} + 3,33 \text{ €} = 697,77 \text{ €}$

Tasaerälainassa hoitomaksun eli annuiteetin suuruus on kaikissa erissä sama

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \quad K = 100\,000, q = 1 + \frac{0,0575}{12} = 1,00479\dots, n = 12 \cdot 12 = 144 \right.$$

$$A = 100\,000 \text{ €} \cdot 1,00479\dots^{144} \cdot \frac{1 - 1,00479\dots^{144}}{1 - 1,00479\dots^{144}} \approx 962,96 \text{ €}$$

Vastaus: Tasaerälainassa kaikki hoitomaksut  $962,96 \text{ €}$  tasalyhennyslainassa 1. hoitomaksu  $1\,173,61 \text{ €}$ , 73. hoitomaksu  $934,02 \text{ €}$  ja viimeinen hoitomaksu  $697,77 \text{ €}$ .

197.

Erä	Lainaa jäljellä	Korko	Lyhennys
1.	3400,00	95,20	0,00
2.	3495,20	97,87	0,00
3.	3593,07	100,61	100,61
4.	3593,07	100,61	100,61
5.	3593,07	100,61	100,61
6.	3593,07	100,61	100,61

Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \quad K = 3\,593,07 \quad q = 1 + \frac{0,056}{12} = 1,004666\dots, n = 3 \cdot 12 = 36 \right.$$

$$A = 3\,593,07 \cdot 1,004666\dots^{36} \cdot \frac{1-1,004666\dots}{1-1,004666\dots^{36}} \approx 108,66$$

Vastaus: 108,66 €

**198.** Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \quad K = 5\,000, \quad q = 1 + \frac{0,065}{2} = 1,0325, n = 2 \right.$$

$$A = 5\,000 \cdot 1,0325^2 \cdot \frac{1-1,0325}{1-1,0325^2} \approx 2\,622,52$$

Vastaus: 2 622,52 €

**199.** Populaatio kasvaa kuukaudessa tietyn prosentuaalisen osuuden ja samalla vähenee tietyllä samalla yksilömäärällä, joten kyseessä on sama tilanne kuin koron korossa tasaerälainassa. Populaatiota jäljellä vuoden kuluttua

$$V = Kq^k - A \frac{1-q^k}{1-q} \quad \left| \quad K = 500, q = 1,12, A = 70, k = 12 \right.$$

$$V = 500 \cdot 1,12^{12} - 70 \cdot \frac{1-1,12^{12}}{1-1,12} \approx 260$$

Vastaus: Jäljellä on noin 260 hiirtä.

**200.** Ruusuja jäljellä

$$V = Kq^k - A \frac{1-q^k}{1-q} \quad \left| \quad K = 12\,000, q = 1 - 0,1 = 0,9, A = -1\,000, k = 10 \right.$$

$$V = 12\,000 \cdot 0,9^{10} + 1\,000 \cdot \frac{1-0,9^{10}}{1-0,9} \approx 10\,700$$

Vastaus: Ruusuja jäljellä noin 10 700 kappaletta.

**201.** a) Laskusta saa 2 %:n alennuksen 12.4. Maksettava  $100\% - 2\% = 98\% = 0,98$ .  
Maksun suuruus  $0,98 \cdot 654,00 \text{ €} = 640,92 \text{ €}$ .

b) Maksettava 654,00 €.

c) Laskun korko  $r = kpt$ , missä  $k = 654,00 \text{ €}$ ,  $p = 12\% = 0,12$  ja  $t = 10 \text{ d} = \frac{10}{365} \text{ a}$ .

Korko  $r = 654,00 \text{ €} \cdot 0,12 \cdot \frac{10}{365} = 2,15 \text{ €}$ . Maksettava  $654,00 \text{ €} + 2,15 \text{ €} = 656,15 \text{ €}$ .

Vastaus: a) 640,92 € b) 654,00 € c) 656,15 €

**202.**Kuukausimaksun suuruus  $x$ 

$$\text{Kuukauden korko } \frac{6,2\%}{12} = 0,5166\ldots\%$$

$$\text{Korkokerroin } 100\% + 0,5166\ldots\% = 100,5166\ldots\% = 1,005166\ldots$$

Jäännösarvon nykyarvo hankintahetkellä 6,2 %:n korkokannan mukaan

$$k = K \cdot q^{-t} \quad | \quad K = 10\,000 \text{ €}, q = 1,062, t = 3$$

$$k = 10\,000 \text{ €} \cdot 1,062^{-3} = 8\,348,845\ldots \text{ €}$$

Näin auton vuokrattavan osuuden nykyarvo on  $25\,000 \text{ €} - 8\,348,845\ldots \text{ €} = 16\,651,154\ldots \text{ €}$ 

Ensimmäinen vuokra maksetaan heti alussa ja viimeinen 36 kuukauden kuluttua.

Vuokrien yhteinen nykyarvo

$$x + 1,005166\ldots^{-1} \cdot x + 1,005166\ldots^{-2} \cdot x + \dots + 1,005166\ldots^{-35} \cdot x$$

Ratkaistaan yhtälö

$$x + 1,005166\ldots^{-1} \cdot x + 1,005166\ldots^{-2} \cdot x + \dots + 1,005166\ldots^{-35} \cdot x = 16\,651,154\ldots$$

$$\left(1 + 1,005166\ldots^{-1} + 1,005166\ldots^{-2} + \dots + 1,005166\ldots^{-35}\right)x = 16\,651,154\ldots \quad | \text{geom.summa } S_{36}$$

$$\frac{1 \cdot \left(1 - (1,005166\ldots^{-1})^{36}\right)}{1 - 1,005166\ldots^{-1}} x = 16\,651,154\ldots$$

$$32,942\ldots x = 16\,651,154\ldots \quad | :32,942\ldots$$

$$x \approx 505,46$$

Vastaus: Leasingkuukausimaksun tulee olla 505,46 €.**203. Vuokraerän suuruus  $x$** 

$$\text{Neljännesvuoden korko } \frac{5,4\%}{4} = 1,35\%$$

$$\text{Korkotekijä } 100\% + 1,35\% = 101,35\% = 1,0135$$

Jäännösarvon nykyarvo hankintahetkellä 5,4 %:n korkokannan mukaan

$$k = K \cdot q^{-t} \quad | \quad K = 0,20 \cdot 23\,000 = 4\,600 \text{ €}, q = 1,054, t = 4$$

$$k = 4\,600 \text{ €} \cdot 1,054^{-4} = 3\,727,308\ldots \text{ €}$$

Näin laitteen vuokrattavan osuuden nykyarvo on  $23\,000 \text{ €} - 3\,727,308\ldots \text{ €} = 19\,272,691\ldots \text{ €}$ 

Ensimmäinen vuokra maksetaan heti alussa ja viimeinen 4 vuoden kuluttua.

Vuokrien yhteinen nykyarvo

$$x + 1,0135^{-1} \cdot x + 1,0135^{-2} \cdot x + \dots + 1,0135^{-15} \cdot x$$

Ratkaistaan yhtälö

$$x + 1,0135^{-1} \cdot x + 1,0135^{-2} \cdot x + \dots + 1,0135^{-15} \cdot x = 19272,691\dots$$

$$(1 + 1,0135^{-1} + 1,0135^{-2} + \dots + 1,0135^{-15})x = 19272,691\dots \left| \begin{array}{l} S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \\ n = 16, q = 1,035, a_1 = 1 \end{array} \right.$$

$$\frac{1 \cdot (1 - (1,0135^{-1})^{16})}{1 - 1,0135^{-1}} x = 19272,691\dots$$

$$12,517\dots x = 19272,691\dots \quad | \cdot 12,517\dots$$

$$x \approx 1539,67$$

Vastaus: Leasingin tulo on 1 539,67 €.

**204.** Lasketaan minkä korkokannan mukaan kolmen erän luotonottohetken diskontattu yhteenlaskettu nykyarvo on 4 800 €.

$$2010 \cdot q^{-1} + 2010 \cdot q^{-2} + 2010 \cdot q^{-3} = 4800$$

$$\overset{q^2}{\frac{2010}{q}} + \overset{q}{\frac{2010}{q^2}} + \frac{2010}{q^3} = \overset{q^3}{4800}$$

$$\frac{2010q^2}{q^3} + \frac{2010q}{q^3} + \frac{2010}{q^3} = \frac{4800q^3}{q^3} \quad | \cdot q^3$$

$$2010q^2 + 2010q + 2010 = 4800q^3$$

$$-4800q^3 + 2010q^2 + 2010q + 2010 = 0$$

Haetaan funktion  $f(x) = -4800q^3 + 2010q^2 + 2010q + 2010$  positiiviset nollakohdat haarukoimalla.

$x$	$f(x)$
1	1 230
1,1	264,30
1,2	-978 nollakohta välillä ]1,1;1,2[
1,15	-320,475 nollakohta välillä ]1,1;1,15[
1,13	-78,04... nollakohta välillä ]1,1;1,13[
1,12	38,89... nollakohta välillä ]1,12;1,13[
1,125	-19,22... nollakohta välillä ]1,12;1,125[
1,123	4,10... nollakohta välillä ]1,123;1,125[
1,1235	-1,712... nollakohta välillä ]1,123;1,1235[

Nollakohta 4 desimaalin tarkkuudella on 1,123, koska kaikki luvut välillä ]1,123; 1,1235[ pyöristyvät luvuksi 1,123.

$$\text{Korkokanta } 112,3\% - 100\% = 12,3\%$$

Vastaus: Todellinen vuosikorkokanta on 12,3 %.

**205.** Koron osuus on  $1\,308 - 1\,000 = 308$  (mk)

Lasketaan minkä suuruisen lainan kuukausikorko on 308 mk, kun vuosikorko on 8,59 %

$$\text{Kuukausikorkoprosentti on } \frac{8,59\%}{12} = \frac{0,0859}{12}$$

$x =$  lainapääoma

$$\frac{0,0859}{12} \cdot x = 308 \quad | \cdot 12$$

$$0,0859x = 3\,696 \quad | : 0,0859$$

$$x \approx 43\,026,78 \text{ (mk)}$$

Kuukausilyhennyksiä on jäljellä  $\frac{43\,026,78}{1\,000} \approx 43$  kpl

1997 syyskuusta 43 kuukautta eteenpäin on vuoden 2001 maaliskuu, jolloin maksetaan viimeinen lyhennys ja se on muita suurempi eli 1 026,78 mk.

Vastaus: Vuoden 2001 maaliskuussa maksetaan viimeinen erä tai jos viimeinen erä ei saa olla muita suurempi, maksetaan viimeinen erä (26,78 mk) huhtikuussa 2001.

**206.** Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \quad A = 2\,354, q = 1 + \frac{0,12}{12} = 1,01, n = 2 \cdot 12 = 24 \right.$$

$$2\,354 = K \cdot 1,01^{24} \frac{1-1,01}{1-1,01^{24}} \quad \left| : \left( 1,01^{24} \frac{1-1,01}{1-1,01^{24}} \right) \right.$$

$$K = \frac{2\,354}{1,01^{24}} \cdot \frac{1-1,01}{1-1,01} \approx 50\,000$$

Vastaus: Lainan suurus noin 50 000 mk.

**207.** Annuiteetti  $A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \quad K = 100\,000, q = 1 + 0,10 = 1,1, n = 10 \right.$

$$\text{Vakioerä} \quad A = 100\,000 \text{ mk} \cdot 1,1^{10} \cdot \frac{1-1,1}{1-1,1^{10}} \approx 16\,274,54 \text{ mk}$$

Lainaa jäljellä 9 vuoden kuluttua jäljellä

$$V = Kq^k - A \frac{1-q^k}{1-q} \quad \left| \quad K = 100\,000, q = 1,1, A = 16\,274,54, k = 9 \right.$$

$$V = 100\,000 \cdot 1,1^9 - 16\,274,54 \frac{1-1,1^9}{1-1,1} \approx 14\,795,03$$

Koron osuus viimeisessä erässä  $16\,274,54 \text{ mk} - 14\,795,03 \text{ mk} \approx 1\,479,50 \text{ mk}$

Vastaus: 16 274,54 mk ja 1 479,50 mk

**208.** Metsä kasvaa prosentuaalisesti ja vähenee joka vuosi tietyn saman määrän (annuiteetin).  
Metsää jäljellä

$$V = Kq^k - A \frac{1-q^k}{1-q} \quad | \quad V = 120, K = 100, q = 1 + 0,17 = 1,17, A = 16$$

$$120 = 100 \cdot 1,17^k - 16 \cdot \frac{1-1,17^k}{1-1,17}$$

$$120 = 100 \cdot 1,17^k + \frac{16}{0,17} - \frac{16}{0,17} \cdot 1,17^k$$

$$5,882 \dots \cdot 1,17^k = 25,882 \dots \quad | \quad 5,882 \dots$$

$$1,17^k = 4,4 \quad | \quad \lg$$

$$k \lg 1,17 = \lg 4,4 \quad | \quad : \lg 1,17$$

$$k = \frac{\lg 4,4}{\lg 1,17} \approx 9,4$$

Vuosi 1988 + 10 = 1998

Vastaus: Vuoden 1998 alussa.

**209.**

Erä	Lainaa jäljellä	Korko	Lyhennys
1.	40000,00	3000,00	10000,00
2.	33000,00	2475,00	10000,00
3.	25475,00		

Vastaus: 25 475 kr

## 8. VEROTUS

### Ansiotulojen verotus

**210.** Kunnallisveroprosentti 17,75 %

Kirkollisveroprosentti 1,50 %

Sairausvakuutusmaksu 1,50 %

Veroprosentti kunnallisverotuksessa yhteensä 17,75 % + 1,50 % + 1,50 % = 20,75%

Kunnallisverot yhteensä 0,2075 · 31647 € = 6 566,75 €

Vastaus: Matti maksoi kunnallisveroa 6 567 €.

**211.** Martin ansiotulo on välillä 20 000–31 800 €, joten vero alarajalla oli 1 240 €.

Veroprosentti alarajan ylittävästä osasta 22,0% = 0,22

Vero alarajan ylittävästä osasta 0,22 · (30865 – 20000) € = 2 390,30 €

Valtion vero yhteensä 1 290 € + 2 390,30 € = 3 630,30 €

Vastaus: Matti maksoi veroa valtiolle 3 630 €.

**212.** Veroprosentti kunnallisverotuksessa  $21,90\% = 0,2190$   
Kunnallisvero yhteensä  $0,2190 \cdot 27\,423 \text{ €} = 6\,005,64 \text{ €}$   
Helkan ansiotulo on välillä  $20\,000\text{--}31\,800 \text{ €}$ , joten vero alarajan kohdalla oli  $1\,240 \text{ €}$ .  
Veroprosentti alarajan ylittävistä osasta  $22,0\% = 0,220$   
Vero alarajan ylittävistä osasta  $0,220 \cdot (27\,524 - 20\,000) \text{ €} = 1\,655,28 \text{ €}$   
Valtion vero yhteensä  $1\,240 \text{ €} + 1\,655,28 \text{ €} = 2\,895,28 \text{ €}$   
Kunnallisvero ja valtionvero yhteensä  $6\,005,64 \text{ €} + 2\,895,28 \text{ €} = 8\,900,92 \text{ €}$   
Vastaus: Helka maksoi veroja yhteensä  $8\,901 \text{ €}$ .

**213.** Veroprosentti kunnallisverotuksessa  $21,00\% = 0,2100$   
Kunnallisvero yhteensä  $0,2100 \cdot 46\,538 \text{ €} = 9\,772,98 \text{ €}$   
Aslakin ansiotulo on välillä  $31\,200\text{--}55\,200 \text{ €}$ , joten vero alarajan kohdalla oli  $3\,704 \text{ €}$ .  
Veroprosentti alarajan ylittävistä osasta  $28,0\% = 0,280$   
Vero alarajan ylittävistä osasta  $0,280 \cdot (47\,248 - 31\,200) \text{ €} = 4\,493,44 \text{ €}$   
Valtion vero yhteensä  $3\,704 \text{ €} + 4\,493,44 \text{ €} = 8\,197,44 \text{ €}$   
Kunnallisvero ja valtionvero yhteensä  $9\,772,98 \text{ €} + 8\,197,44 \text{ €} = 17\,970,42 \text{ €}$   
Ennakkoverot yhteensä  $18\,975 \text{ €}$   
Palautus  $18\,975 \text{ €} - 17\,970,42 \text{ €} = 1\,004,58 \text{ €}$   
Vastaus: Aslak sai palautusta  $1\,004,58 \text{ €}$ .

**214.** Perusprosentti  $30,5\% = 0,305$   
Perusprosentin mukaan pidätetään veroa  $2\,400 \text{ eurosta}$ .  
Perusprosentin mukaan pidätettävä vero  $0,305 \cdot 2\,400 \text{ €} = 732 \text{ €}$   
Lisäprosentti  $47,0\% = 0,470$   
Lisäprosentin mukaan pidätettävä vero  $0,470 \cdot (3\,534 - 2\,400) \text{ €} = 532,98 \text{ €}$   
Ennakkoverot yhteensä  $732 \text{ €} + 532,98 \text{ €} = 1\,264,98 \text{ €}$   
Vastaus: Reino maksoi ennakkoveroja  $1\,265 \text{ €}$  kuukaudessa.

**215.** Ennakkonpidätys kahdessa viikossa  
 $0,355 \cdot 1\,650 \text{ €} + 0,540 \cdot (1\,732 - 1\,650) \text{ €} = 630,03 \text{ €}$   
Ennakkonpidätys vuodessa  $26 \cdot 630,03 \text{ €} = 16\,380,78 \text{ €}$   
Ennakkonpidätys sivuansioista  $0,540 \cdot 6\,476 \text{ €} = 3\,497,04 \text{ €}$   
Ennakkonpidätykset yhteensä  $16\,380,78 \text{ €} + 3\,497,04 \text{ €} = 19\,877,82 \text{ €}$   
Allin tulot vuoden aikana  $26 \cdot 1\,732 \text{ €} + 6\,476 \text{ €} = 51\,508 \text{ €}$   
Kunnallisvero lopullisessa verotuksessa  $0,2150 \cdot 51\,508 \text{ €} = 11\,074,22 \text{ €}$   
Valtionvero lopullisessa verotuksessa  $3\,704 \text{ €} + 0,280 \cdot (51\,508 - 31\,200) \text{ €} = 9\,390,24 \text{ €}$   
Lopullinen vero yhteensä  $11\,074,22 \text{ €} + 9\,390,24 \text{ €} = 20\,464,46 \text{ €}$   
Lopullisessa verotuksessa maksettava  $20\,464,46 \text{ €} - 19\,877,82 \text{ €} = 586,64 \text{ €}$   
Vastaus: Anselmi sai mätkyjä  $586,64 \text{ €}$ .

**216.** Kunnallisvero päätoimen tuloista  $0,2175 \cdot 54\,345 \text{ €} = 11\,820,04 \text{ €}$   
Valtionvero päätoimen tuloista  $3\,704 \text{ €} + 0,280 \cdot (54\,345 - 31\,200) \text{ €} = 10\,184,60 \text{ €}$   
Verot yhteensä päätoimesta  $11\,820,04 \text{ €} + 10\,184,60 \text{ €} = 22\,004,64 \text{ €}$   
Tulot päätoimesta ja sivutoimesta yhteensä  $54\,345 \text{ €} + 5\,300 \text{ €} = 59\,645 \text{ €}$   
Kunnallisvero  $0,2175 \cdot 59\,645 \text{ €} = 12\,972,79 \text{ €}$   
Valtionvero  $10\,424 \text{ €} + 0,350 \cdot (59\,645 - 55\,200) \text{ €} = 11\,979,75 \text{ €}$

Verot yhteensä päätoimesta  $12\,972,79\text{ €} + 11\,979,75\text{ €} = 24\,952,54\text{ €}$

Verojen lisäys  $24\,952,54\text{ €} - 22\,004,64\text{ €} = 2\,947,90\text{ €}$

Marginaaliveroprosentti  $\frac{2\,947,90}{5\,300} = 0,5562\dots \approx 55,6\%$

Vastaus: Juuditin marginaaliveroprosentti olisi ollut 55,6

**217.** Verotettava tulo  $x$  (€)

Valtionvero  $5\,467\text{ €}$ , joten tulot ovat välillä  $31\,200 - 55\,200$

Vero alarajan kohdalla  $3\,704\text{ €}$

Veroprosentti alarajan ylittävästä tulon osasta  $28,0\% = 0,28$

$3\,704 + 0,280 \cdot (x - 31\,200) = 5\,467$

$$3\,704 + 0,280x - 8\,736 = 5\,467$$

$$0,280x = 5\,467 + 8\,736 - 3\,704$$

$$0,280x = 10\,499 \quad | :0,280$$

$$x \approx 37\,496$$

Vastaus: Martin tulot olivat  $37\,496\text{ €}$ .

**218.** Verotettava tulo  $x$  (€)

Verot  $13\,257\text{ €}$ , joten arvataan, että tulot olisivat välillä  $31\,200 - 55\,200$

Vero alarajan kohdalla  $3\,704\text{ €}$

Veroprosentti alarajan ylittävästä tulon osasta  $28,0\% = 0,28$

Kunnallisveroprosentti  $20,50\% = 0,2050$

Kunnallisvero  $0,2050x$

Valtionvero  $3\,704 + 0,280 \cdot (x - 31\,200)$

Verot yhteensä

$0,2050x + 3\,704 + 0,280 \cdot (x - 31\,200) = 13\,257$

$$0,2050x + 3\,704 + 0,280x - 8\,736 = 13\,257$$

$$0,2050x + 0,280x = 13\,257 + 8\,736 - 3\,704$$

$$0,485x = 18\,289 \quad | :0,485$$

$$x \approx 37\,709$$

Vastaus: Janin tulot olivat  $37\,709\text{ €}$ .

**219.** Lisäprosentin raja  $x$  (€)

Tuulikin tulot  $12\,135\text{ €}$

Tuulikin verot  $4\,732\text{ €}$

Perusprosentti  $35\% = 0,35$

Lisäprosentti  $54\% = 0,54$

Perusprosentin mukaan peritty ennakkovero  $0,35x$

Lisäprosentin mukaan peritty ennakkovero  $0,54 \cdot (12\,135 - x)$

Verot yhteensä  $0,35x + 0,54 \cdot (12\,135 - x)$

Lisäprosentin raja

$0,35x + 0,54 \cdot (12\,135 - x) = 4\,732$

$$0,35x + 6\,552,90 - 0,54x = 4\,732$$

$$0,35x - 0,54x = 4\,732 - 6\,552,90$$

$$-0,19x = -1820,90 \quad | :(-0,19)$$

$$x \approx 9584$$

Vastaus: Lisäprosentin raja oli 9 584 €.

**220.** Tertun bruttopalkka  $x$  (€)

Marginaaliveroprocentti 45 %

Käteen jäävä palkka prosentteina  $100 \% - 45 \% = 55 \%$

Käteen jäävä palkka 250 €

$$0,55x = 250 \quad | :0,55$$

$$x \approx 454,55$$

Sosiaalivakuutusmaksut  $0,25 \cdot 454,55 \text{ €} \approx 113,64 \text{ €}$

Työntajan kulut  $454,55 \text{ €} + 113,64 \text{ €} = 568,19 \text{ €}$

Verokiila  $568,19 \text{ €} - 250 \text{ €} = 318,19 \text{ €}$

Vastaus: Verokiila oli 318,19 €.

### **Perintö- ja lahjavero**

**221.** Koska Aslak sai perinnön sedältään, hän kuului toiseen veroluokkaan.

Vero taulukon mukaan  $1\,445 \text{ €} + 0,13 \cdot (34\,700 - 17\,000) \text{ €} = 3\,746 \text{ €}$

Toisessa veroluokassa vero peritään kaksinkertaisena.

Perintöveron suuruus  $2 \cdot 3\,746 \text{ €} = 7\,492 \text{ €}$

Vastaus: Aslak joutui maksamaan perintöveroa 7 492 €.

**222.** Omaisuudesta puolet tuli isänperintönä ja puolet äidin perintönä.

Isän omaisuus  $\frac{75\,400}{2} \text{ €} = 37\,700 \text{ €}$

Äidin omaisuus oli samansuuruinen eli 37 700 €

Helka peri isän omaisuudesta puolet  $\frac{37\,700}{2} \text{ €} = 18\,850 \text{ €}$

Koska Helka oli rintaperillinen, hän kuului ensimmäiseen veroluokkaan.

Perintövero isältä peritystä omaisuudesta  $1\,445 \text{ €} + 0,13 \cdot (18\,850 - 17\,000) \text{ €} = 1\,685,50 \text{ €}$

Helka peri äidiltään samansuuruisen perinnön kuin isältään.

Perintövero äidiltä saadusta perinnöstä 1 685,50 €

Perintövero yhteensä  $1\,685,50 \text{ €} + 1\,685,50 \text{ €} = 3\,371 \text{ €}$

Vastaus: Helka joutui maksamaan perintöveroa 3 371 €.

**223.** Koska Terttu peri avopuolisonsa, jonka kanssa hänellä ei ollut yhteisiä lapsia, hän kuului kolmanteen veroluokkaan, jossa perintövero peritään kolminkertaisena.

Jos perintö olisi 17 000 €, vero olisi  $3 \cdot 1\,445 \text{ €} = 4\,335 \text{ €}$

Jos perintö olisi 50 000 €, vero olisi  $3 \cdot 5\,735 \text{ €} = 17\,205 \text{ €}$

Tämän perusteella perinnön suuruus on suurempi kuin 50 000 €

Perinnön suuruus  $x$  (€)

Perittävä vero 22 687 €

$$3 \cdot [5\,735 + 0,16 \cdot (x - 50\,000)] = 22\,687$$

$$3 \cdot [5\,735 + 0,16x - 8\,000] = 22\,687$$

$$17205 + 0,48x - 24000 = 22687$$

$$0,48x = 29482 \quad | :0,48$$

$$x \approx 61420$$

Vastaus: Terttu sai 61 420 € suuruisen perinnön.

**224.** Koska Kalevi peri vanhempansa, niin hän kuului ensimmäiseen veroluokkaan. Puolet perinnöstä tuli isältä ja puolet äidiltä, joten perintöverostakin puolet johtui isän ja puolet äidin perinnöstä.

$$\text{Isän perinnöstä johtuva perintövero } \frac{6250}{2} \text{ €} = 3125 \text{ €}$$

Jos perintö olisi 17 000 €, vero olisi 1 445 €

Jos perintö olisi 50 000 €, vero olisi 5 735 €

Tämän perusteella perinnön suuruus on välillä 17 000 – 50 000 €

Perinnön suuruus  $x$  (€)

Perittävä vero 3 125 €

$$1445 + 0,13 \cdot (x - 17000) = 3125$$

$$1445 + 0,13x - 2210 = 3125$$

$$0,13x = 3890 \quad | :0,13$$

$$x \approx 29923$$

Kalevi sai saman perinnön myös äidiltään, joten koko perinnön suuruus oli

$$2 \cdot 29923 \text{ €} = 59846 \text{ €}$$

Vastaus: Kalevi sai 59 846 € suuruisen perinnön.

### Lähdevero

**225.** Talletuksen pääoma  $k = 3500$  €

Korko  $i = 2,76\% = 0,0276$

Talletusaika  $t = 4$  kk =  $\frac{4}{12}$  a

$$\text{Talletuksesta saatava verollinen korko } r = kit = 3500 \text{ €} \cdot 0,0276 \cdot \frac{4}{12} = 32,20 \text{ €}$$

Talletuksen korosta perittävä lähdevero  $0,29 \cdot 32,20 \text{ €} \approx 9,34 \text{ €}$

Tapanin saama korkotuotto  $32,20 \text{ €} - 9,34 \text{ €} = 22,86 \text{ €}$

Vastaus: Lähdeveron suuruus oli 9,34 €, ja Tapani sai talletuksestaan 22,86 €:n korkotuoton.

**226.** Talletuksesta saatava verollinen korko  $x$  (€)

Talletuksesta saatu veroton korko 82,50

Lähdevero 29 %

Korosta käteen jäävä osuus  $100\% - 29\% = 71\% = 0,71$

Verollinen korko

$$0,71x = 82,50 \quad | :0,71$$

$$x = 116,197\dots$$

Talletuksen korko  $i = 2,50\% = 0,0250$

Talletusaika  $t = 1$  a

Talletuksen pääoma  $y$  (€)

Talletuksesta saatava korko  $r = kit$

$$116,197\dots = y \cdot 0,0250 \cdot 1 \quad | :0,0250$$

$$y \approx 4647,89$$

Vastaus: Talletuksen suuruus oli 4 647,89 €.

**227.** Aleksin tulot yhteensä  $6\,987\text{ €} + 7\,217\text{ €} + 8\,023\text{ €} = 22\,227\text{ €}$

Lähdeveroprosentti  $35\% = 0,35$

Lähdevero  $0,35 \cdot 22\,227\text{ €} \approx 7\,779\text{ €}$

Vastaus: Aleks maksoi tuloistaan lähdeveroa 7 779 €.

### **Arvonlisävero**

**228.** Leivästä maksetaan 17 %:n arvonlisävero

Prosenttikerroin  $100\% + 17\% = 117\% = 1,17$

Korin myyntihinta  $1,17 \cdot 2,15\text{ €} \approx 2,52\text{ €}$

Vastaus: Leivän myyntihinta on 2,52 €.

**229.** Voittoprosentti 30 %

Prosenttikerroin  $100\% + 30\% = 130\% = 1,30$

Tuolin arvonlisäveroton hinta  $1,30 \cdot 32,40\text{ €} = 42,12\text{ €}$

Tuolista maksetaan 22 %:n arvonlisävero

Prosenttikerroin  $100\% + 22\% = 122\% = 1,22$

Tuolin myyntihinta  $1,22 \cdot 42,12\text{ €} \approx 51,39\text{ €}$

Vastaus: Leivän myyntihinta on 51,39 €.

**230.** Elintarvikkeista maksettava arvonlisävero on 17 %

Kahvipaketin veroton hinta  $x$  (€)

Paketin hintaan sisältyvä arvonlisävero  $0,17x$

Paketin myyntihinta  $2,34\text{ €}$

$$x + 0,17x = 2,34$$

$$1,17x = 2,34 \quad | :1,17$$

$$x = 2$$

Kahvipaketin hintaan sisältyvä arvonlisävero  $2,34\text{ €} - 2\text{ €} = 0,34\text{ €}$

Vastaus: Kahvipaketin hintaan sisältyy 0,34 € arvonlisäveroa.

**231.** Hampurilaisesta sisällä maksettava arvonlisävero on 22 %

Hampurilaisen veroton hinta  $x$  (€)

Hampurilaisen hintaan sisältyvä arvonlisävero  $0,22x$

Hampurilaisen myyntihinta sisällä  $5,95\text{ €}$

$$x + 0,22x = 5,95$$

$$1,22x = 5,95 \quad | :1,22$$

$$x = 4,877\dots$$

Hampurilaisesta maksetaan drive-in myynnissä 17 %:n arvonlisävero

Prosenttikerroin  $100\% + 17\% = 117\% = 1,17$

Hampurilaisen drive-in myyntihinta  $1,17 \cdot 4,877\dots\text{ €} \approx 5,71\text{ €}$

Vastaus: Hampurilaisen drive-in myyntihinta on 5,71 €.

**232.** Vasaran veroton hinta  $x$  (€)

Vasarasta maksettava arvonlisävero  $0,22x$

Leivän veroton hinta  $y$  (€)

Leivästä maksettava arvonlisävero  $0,17y$

Myyntihinnoista ja arvonlisäveroista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 1,22x + 1,17y = 19,58 \\ 0,22x + 0,17y = 3,38 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan } y$$

$$0,22x + 0,17y = 3,38 \quad | :0,17$$

$$0,17y = 3,38 - 0,22x \quad | :0,17$$

$$y = \frac{3,38}{0,17} - \frac{0,22}{0,17}x \quad \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön}$$

$$1,22x + 1,17 \cdot \left( \frac{3,38}{0,17} - \frac{0,22}{0,17}x \right) = 19,58$$

$$1,22x + 23,262 - 1,514x = 19,58$$

$$-0,294x = -3,682 \quad | :(-0,294)$$

$$x \approx 12,52 \quad \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön}$$

$$1,22 \cdot 12,52 + 1,17y = 19,58$$

$$1,17y = 4,3056 \quad | :1,17$$

$$y = 3,68 \quad (\text{€})$$

Vasarasta maksettava arvonlisävero  $0,22x = 0,22 \cdot 12,52 \text{ €} \approx 2,75 \text{ €}$

Vasaran myyntihinta  $12,52 \text{ €} + 2,75 \text{ €} = 15,27 \text{ €}$

Leivästä maksettava arvonlisävero  $0,17y = 0,17 \cdot 3,68 \text{ €} = 0,63 \text{ €}$

Leivän myyntihinta  $3,68 \text{ €} + 0,63 \text{ €} = 4,31 \text{ €}$

Vastaus: Vasaran myyntihinta oli 15,27 € ja leivän 4,31 €.

**233.** Elintarvikkeiden arvonlisäveroprosentti  $17 \% = 0,17$

Janin saama myyntihinta  $450 \text{ €}$

Janin saama veroton hinta  $x$  (€)

$$x + 0,17x = 450$$

$$1,17x = 450 \quad | :1,17$$

$$x \approx 384,62$$

Janin valtiolle tilittämä arvonlisävero  $450 \text{ €} - 384,62 \text{ €} = 65,38 \text{ €}$

Tukkuliikkeen saama myyntihinta  $650 \text{ €}$

Tukkuliikkeen saama veroton hinta  $x$  (€)

$$x + 0,17x = 650$$

$$1,17x = 650 \quad | :1,17$$

$$x \approx 555,56$$

Tukkuliikkeen valtiolle tilittämä arvonlisävero  $650 \text{ €} - 555,56 \text{ €} - 65,38 \text{ €} = 29,06 \text{ €}$

Vähittäiskauppiaan saama myyntihinta  $1\,050 \text{ €}$

Vähittäiskauppiaan saama veroton hinta  $x$  (€)

$$x + 0,17x = 1\,050$$

$$1,17x = 1\,050 \quad | :1,17$$

$$x \approx 897,44$$

Vähittäiskauppiiaan valtiolle tilittämä arvonlisävero

$$1\,050\text{ €} - 897,44\text{ €} - 65,38\text{ €} - 29,06\text{ €} = 58,12\text{ €}$$

Torikauppiiaan saama myyntihinta 1 565 €

Torikauppiiaan saama veroton hinta  $x$  (€)

$$x + 0,17x = 1565$$

$$1,17x = 1565 \quad | :1,17$$

$$x \approx 1337,61$$

Torikauppiiaan valtiolle tilittämä arvonlisävero

$$1\,565\text{ €} - 1\,337,61\text{ €} - 65,38\text{ €} - 29,06\text{ €} - 58,12\text{ €} = 74,83\text{ €}$$

Vastaus: Jani tilitti arvonlisäveroa 65,38 €, tukkukauppias 29,06 €, vähittäiskauppias 58,12 € ja torikauppias 74,83 €.

**234.** Veroton hinta  $a$  (€)

Arvonlisävero 22 %

$$\text{Prosenttikerroin } 100\% + 22\% = 122\% = 1,22$$

Verollinen myyntihinta  $1,22a$

$$\text{Arvonlisäveron osuus myyntihinnasta } \frac{0,22a}{1,22a} = 0,1803\dots \approx 18\%$$

Prosentti ei riipu myyntihinnasta.

Vastaus: Arvonlisäveron osuus myyntihinnasta on 18 % ja se ei riipu myyntihinnasta.

**235.** Veroton hinta  $x$  (mk)

$$\text{Prosenttikerroin } 100\% + 22\% = 122\% = 1,22$$

Verollinen hinta

$$1,22x = 136 \quad | :1,22$$

$$x = \frac{136}{1,22}$$

$$x \approx 111,48$$

Uusi ALV-prosentti  $22\% - 10\% = 12\%$

$$\text{Uusi hinta } 1,12 \cdot \frac{136}{1,22} \text{ mk} \approx 124,90 \text{ mk}$$

Vastaus: Uusi maksu olisi 124,90 mk.

**236.** Palkkatulo  $x$  (mk)

Vähennyksen suuruus

$$y = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 15\,000 \\ 0,2(x - 15\,000), & \text{kun } 15\,000 < x \leq 42\,500 \\ 5\,500, & \text{kun } 42\,500 < x \leq 43\,000 \\ 5\,500 - 0,02(x - 43\,000), & \text{kun } 43\,000 < x \leq 318\,000 \\ 0, & \text{kun } x > 318\,000 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 15\,000 \\ 0,2x - 3\,000, & \text{kun } 15\,000 < x \leq 42\,500 \\ 5\,500, & \text{kun } 42\,500 < x \leq 43\,000 \\ -0,02x + 6\,360, & \text{kun } 43\,000 < x \leq 318\,000 \\ 0, & \text{kun } x > 318\,000 \end{cases}$$

Vähennys on täysimääräinen, kun

$$0,2x - 3\,000 = 5\,500$$

$$0,2x = 8\,500 \quad | :0,2$$

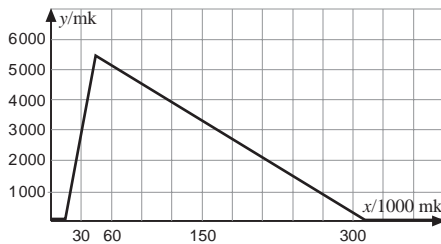
$$x = 42\,500$$

Vähennys loppuu kokonaan, kun

$$-0,02x + 6\,360 = 0$$

$$-0,02x = -6\,360 \quad | :(-0,02)$$

$$x = 318\,000$$



Vastaus: Vähennyksen määrä loppuu kokonaan 318 000 markan vuosituloilla.

**237.** Omakotitalo on kiinteistö.

Kiinteistöveroprosentti 4,0 % = 0,04

Varainsiirtovero  $0,04 \cdot 125\,000 \text{ €} = 5\,000 \text{ €}$

Vastaus: Omakotitalosta joudutaan maksamaan 5 000 € varainsiirtoveroa.

**238.** a) Koska verotettava varallisuus 150 000 € jää alle 185 000 €, niin varallisuusvero on 0 €.

b) Verotettava omaisuus 256 000 €

Vero alarajan kohdalla 80 €

Veroprosentti alarajan ylittävästä omaisuudesta 0,9 % = 0,009

Vero alarajan ylittävästä omaisuudesta  $0,009 \cdot (256\,000 - 185\,000) \text{ €} = 639 \text{ €}$

Vero yhteensä  $80 \text{ €} + 639 \text{ €} = 719 \text{ €}$

Vastaus: Varallisuusveroa joudutaan maksamaan a) 0 € b) 719 €.

**239.** Edwardin marginaaliveroprosentti 48 %

Tuloista jää Edwardille käteen  $100 \% - 48 \% = 52 \% = 0,52$

Hierojan perimä maksu 20 €

Edwardin hierojan käyntiä varten tienaama palkka  $x$  (€)

Palkasta käteen jäävä osuus  $0,52x$

$$0,52x = 20 \quad | :0,52$$

$$x \approx 38,46$$

Edwardin maksama tulovero  $38,46 \text{ €} - 20 \text{ €} = 18,46 \text{ €}$

Hierojalle maksettava veroton hinta  $x$  (€)

Hierojan palkkioon sisältyvä arvonlisävero  $0,22x$

Hierojan palkkio  $20 \text{ €}$

$$x + 0,22x = 20$$

$$1,22x = 20 \quad | :1,22$$

$$x \approx 16,39$$

Hierojan maksama arvonlisävero  $20 \text{ €} - 16,39 \text{ €} = 3,61 \text{ €}$

Hierojan maksama tulovero  $0,52 \cdot 12 \text{ €} = 6,24 \text{ €}$

Verot yhteensä  $18,46 \text{ €} + 3,61 \text{ €} + 6,24 \text{ €} = 28,31 \text{ €}$

Vastaus: Veroja kertyy yhteensä  $28,31 \text{ €}$ .

**240.** Auton hinta Suomessa  $32\,000 \text{ €}$

Autoveroprosentti  $25\% = 0,25$

Autovero  $0,25 \cdot 32\,000 \text{ €} = 8\,000 \text{ €}$

Arvonlisävero  $0,22 \cdot 8\,000 \text{ €} = 1\,760 \text{ €}$

Matka- ja rekisteröinti- ym. kulut  $800 \text{ €}$

Auton hinta Saksassa  $20\,800 \text{ €}$

Saksasta tuodun auton hinta  $20\,800 \text{ €} + 8\,000 \text{ €} + 1\,760 \text{ €} + 800 \text{ €} = 31\,360 \text{ €}$

Koska Saksasta tuodun auton hinta  $31\,360 \text{ €}$  on pienempi kuin vastaavan Suomesta ostetun auton, niin Martin kannattaa tuoda auto Saksasta.

Vastaus: Martin kannattaa tuoda auto Saksasta.

**241.** Annin tulot vuodessa  $12 \cdot 2\,312 \text{ €} = 27\,744 \text{ €}$

Kunnallisveroprosentti  $20,75 = 0,2075$

Kunnallisvero  $0,2075 \cdot 27\,744 \text{ €} = 5\,756,88 \text{ €}$

Valtion vero  $1\,240 \text{ €} + 0,22 \cdot (27\,744 - 20\,000) \text{ €} = 2\,943,68 \text{ €}$

Verot yhteensä  $5\,756,88 \text{ €} + 2\,943,68 \text{ €} = 8\,700,56 \text{ €}$

Perusprosentti  $\frac{8\,700,56}{27\,744} = 0,3136... \approx 31,50\%$

Tulorajana kuukaudessa  $2\,312 \text{ €}$

Vastaus: Annin ennakonpidätyksen perusprosentti oli  $31,50\%$ .

**242.** Käteen jäävän osan suuruus  $x$  (mk)

Ensimmäisen maksama perintöveroprosentti  $\frac{2\frac{1}{2}}{1000} = 0,0025$

Ensimmäisen maksama perintövero  $0,0025x$

Toisen maksama perintöveroprosentti  $\frac{6}{1000} = 0,006$

Toisen maksama perintövero  $0,006x$

Osuudet yhteensä veroineen  $56\,900 \text{ mk}$

$$x + 0,0025x + x + 0,006x = 56\,900$$

$$2,0085x = 56900 \quad | :2,0085$$

$$x \approx 28329,60$$

Ensimmäisen alkuperäinen osuus  $28\,329,60 \text{ mk} + 0,0025 \cdot 28\,329,60 \text{ mk} \approx 28\,400 \text{ mk}$

Toisen alkuperäinen osuus  $28\,329,60 \text{ mk} + 0,006 \cdot 28\,329,60 \text{ mk} \approx 28\,500 \text{ mk}$

Vastaus: Ensimmäisen alkuperäinen osuus oli 28400 mk ja toisen 28 500 mk.

**243.** Valmistettaessa 100 litraa olutta tarvitaan 26,5 kg maltaita.

$$\text{Tulot ennen korotusta } \frac{100}{16} \cdot 6 \text{ mk} = 37,50 \text{ mk}$$

$$\text{Maltaiden vero ennen korotusta } 2,65 \cdot 1 \text{ mk} = 2,65 \text{ mk}$$

$$\text{Voitto ennen korotusta } 37,50 \text{ mk} - 2,65 \text{ mk} = 34,85 \text{ mk}$$

$$\text{Tulot nyt } \frac{100}{16} \cdot 8 \text{ mk} = 50,00 \text{ mk}$$

$$\text{Maltaiden vero nyt } 2,65 \cdot 4 \text{ mk} = 10,60 \text{ mk}$$

$$\text{Voitto nyt } 50,00 \text{ mk} - 10,60 \text{ mk} = 39,40 \text{ mk}$$

$$\text{Voiton lisäys } 39,40 \text{ mk} - 34,85 \text{ mk} = 4,55 \text{ mk}$$

$$\text{Voitto prosentteina nykyisestä hinnasta } \frac{4,55}{50,00} = 0,091 = 9,1\%$$

Vastaus: Voitto on kohonnut 9,1 % nykyisestä korkeammasta oluen hinnasta.

**244.** Talletus 1918 1 heinäkuuta 960 mk

$$\text{Korkopäiviä vuonna 1918 yhteensä } 30 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 183$$

Korkoprosentti 4 %

Korko vuonna 1918

$$r = kit \quad \left| \quad k = 960 \text{ mk}, i = 4\% = 0,04, t = \frac{183}{365}$$

$$r = 960 \text{ mk} \cdot 0,04 \cdot \frac{183}{365} \approx 19,25 \text{ mk}$$

Veroprosentti 5 %

$$\text{Verosta tallettajalle } 100\% - 5\% = 95\% = 0,95$$

$$\text{Korosta tallettajalle } 0,95 \cdot 19,25 \text{ mk} \approx 18,29 \text{ mk}$$

$$\text{Talletus vuoden lopussa } 960 \text{ mk} + 18,29 \text{ mk} = 978,29 \text{ mk}$$

$$\text{Korkopäiviä vuonna 1919 yhteensä } 31 + 28 + 31 + 14 = 104$$

Korkoprosentti 5 %

Korko vuonna 1919

$$r = kit \quad \left| \quad k = 978,29 \text{ mk}, i = 5\% = 0,05, t = \frac{104}{365}$$

$$r = 978,29 \text{ mk} \cdot 0,05 \cdot \frac{104}{365} \approx 13,94 \text{ mk}$$

Veroprosentti 5 %

$$\text{Verosta tallettajalle } 100\% - 5\% = 95\% = 0,95$$

$$\text{Korosta tallettajalle } 0,95 \cdot 13,94 \text{ mk} \approx 13,24 \text{ mk}$$

$$\text{Talletus nostopäivänä } 978,29 \text{ mk} + 13,24 \text{ mk} = 991,53 \text{ mk}$$

Vastaus: Henkilö voi nostaa 991,53 mk.

245. Kotiapulaisen palkka kuukaudessa 4 600 mk  
Kotiapulaisen palkka vuodessa  $12 \cdot 4\,600 \text{ mk} = 55\,200 \text{ mk}$

Vaimon palkka kuukaudessa  $x$  (mk)

Vaimon palkasta verovapaata vuodessa 20 000 mk

Vaimon palkasta verovapaata kuukaudessa  $\frac{20\,000}{12}$  mk

Vaimon veroprosentti 36 %

Vaimon tuloista käteen jäävä prosentti  $100 \% - 36 \% = 64 \% = 0,64$

Vaimon tuloista käteen vuodessa  $20\,000 + 0,64 \cdot 12 \left( x - \frac{20\,000}{12} \right)$

Vaimon tulot yhtä suuret kuin kotiapulaisen palkka

$$20\,000 + 0,64 \cdot 12 \left( x - \frac{20\,000}{12} \right) = 55\,200$$

$$20\,000 + 7,68x - 12\,800 = 55\,200$$

$$7,68x = 48\,000 \quad | :7,68$$

$$x = 6\,250$$

Vastaus: Vaimon palkan pitäisi olla 6 250 mk kuukaudessa.

246. Puolen vuoden korko  $\frac{1}{2} \cdot 0,075 \cdot 40\,000 \text{ mk} = 1\,500 \text{ mk}$

Vero  $0,25 \cdot 1\,500 \text{ mk} = 375 \text{ mk}$

Tuotto  $1\,500 \text{ mk} - 375 \text{ mk} - 20 \text{ mk} = 1\,105 \text{ mk}$

Vuotuinen korkoprosentti  $x$

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot 40\,000 = 1\,105$$

$$x = 0,055$$

$$x = 5,5\%$$

Vastaus: Tuotto 1 105 mk, prosentuaalinen tuotto oli 5,5 %

247. Veroton hinta  $x$  (€)

Vero  $17 \% = 0,17$

Verollinen hinta 4,50 €

Vero euroina

$$x + 0,17x = 4,50$$

$$1,17x = 4,50 \quad | :1,17$$

$$x = 3,846\dots$$

Veroa hinnassa  $4,50 \text{ €} - 3,846\dots \text{ €} \approx 0,65 \text{ €}$

Vastaus: Hinnassa on 0,65 € veroa.

## 9. ARVOPAPERIT

**248.** Vuoden korko  $0,0275 \cdot 2\,000 \text{ €} = 55 \text{ €}$   
Viiden vuoden korko  $5 \cdot 55 \text{ €} = 275 \text{ €}$   
Tuotto prosentti  $100 \% - 29 \% = 71 \%$   
Korkotuotto veron vähennyksen jälkeen  $0,71 \cdot 275 \text{ €} = 195,25 \text{ €}$   
Vastaus: Alpo sai korkotuottoa 195,25 €.

**249.** Vuoden korko  $0,0393 \cdot 1\,800 \text{ €} = 70,74 \text{ €}$   
Neljän vuoden korko  $4 \cdot 70,74 \text{ €} = 282,96 \text{ €}$   
Tuotto prosentti  $100 \% - 29 \% = 71 \%$   
Korkotuotto veron vähennyksen jälkeen  $0,71 \cdot 282,96 \text{ €} \approx 200,90 \text{ €}$   
Vastaus: Raakel sai korkotuottoa 200,90 €.

**250.** Myyjä on pitänyt obligaatiota hallussaan  $29 + 30 + 30 + 30 + 30 + 6 = 155$  päivää ennen myyntiä ja Erik joutuu maksamaan myyjälle koron tältä ajalta.

Korko

$$r = kit \quad | \quad k = 12\,000, i = 0,0385, t = \frac{155}{360}$$

$$r = 12\,000 \text{ €} \cdot 0,0385 \cdot \frac{155}{360} \approx 198,92 \text{ €}$$

Vastaus: Liisa maksaa korkoa 198,92 €.

**251.** Myyjä on pitänyt obligaatiota hallussaan  $29 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 12 = 191$  päivää ennen myyntiä ja Erik joutuu maksamaan myyjälle koron tältä ajalta.

Korko

$$r = kit \quad | \quad k = 3\,200, i = 0,0278, t = \frac{191}{360}$$

$$r = 3\,200 \text{ €} \cdot 0,0278 \cdot \frac{191}{360} \approx 47,20 \text{ €}$$

Vastaus: Aslak maksaa korkoa 47,20 €.

**252.** Lasketaan korkojen ja lainapääoman yhteinen nykyarvo.

Yhden vuoden korko  $1\,800 \text{ €} \cdot 0,032 = 57,60 \text{ €}$

Korko 57,60 € maksetaan 1, 2, 3 ja 4 vuoden kuluttua.

Korkojen yleisellä korkokertoimella 1,023 diskontattu nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t} \quad | \quad K = 57,60, q = 1,023, t = 1, 2, 3, 4$$

$$k = 57,60 \text{ €} \cdot 1,023^{-1} + 57,60 \text{ €} \cdot 1,023^{-2} + 57,60 \text{ €} \cdot 1,023^{-3} + 57,60 \text{ €} \cdot 1,023^{-4} = 217,737 \dots \text{€}$$

Obligaatiolaina 1 800 € maksetaan takaisin 4 vuoden kuluttua.

Lainapääoman yleisellä korkokertoimella 1,023 diskontattu nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t} \quad | \quad K = 1800, q = 1,023, t = 4$$

$$k = 1\,800 \text{ €} \cdot 1,023^{-4} = 1\,643,500 \dots \text{€}$$

Korkojen ja lainapääoman yhteinen nykyarvo

$$217,737\dots\text{€} + 1\,643,500\dots\text{€} \approx 1\,861,24\text{€}$$

$$\text{Prosentteina nimellisarvosta } \frac{1\,861,24}{1\,800} \approx 103,4\%$$

Vastaus: Obligaation nykyarvo on 1 861,24 € ja se on 103,4 % nimellisarvosta.

**253.** Lasketaan korkojen ja lainapääoman yhteinen nykyarvo.

$$\text{Yhden vuoden korko } 12\,500\text{€} \cdot 0,045 = 562,50\text{€}$$

Korko 562,50 € maksetaan 1, 2, 3, 4 ja 5 vuoden kuluttua.

Korkojen yleisellä korkokertoimella 1,034 diskontattu nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t} \quad | \quad K = 562,50, q = 1,034, t = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$k = 562,50\text{€} \cdot 1,034^{-1} + 562,50\text{€} \cdot 1,034^{-2} + 562,50\text{€} \cdot 1,034^{-3} + 562,50\text{€} \cdot 1,034^{-4} + 562,50\text{€} \cdot 1,034^{-5} = 2\,546,925\dots\text{€}$$

Obligaatiolaina 12 500 € maksetaan takaisin 5 vuoden kuluttua.

Lainapääoman yleisellä korkokertoimella 1,034 diskontattu nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t} \quad | \quad K = 12\,500, q = 1,034, t = 5$$

$$k = 12\,500\text{€} \cdot 1,034^{-5} = 10\,575,656\dots\text{€}$$

Korkojen ja lainapääoman yhteinen nykyarvo

$$2\,546,925\dots\text{€} + 10\,575,656\dots\text{€} \approx 13\,122,58\text{€}$$

$$\text{Prosentteina nimellisarvosta } \frac{13\,122,58}{12\,500} \approx 105,0\%$$

Vastaus: Obligaation nykyarvo on 13 122,58 € ja 105,0 % nimellisarvosta.

**254.** Lasketaan minkä korkokannan mukaan lainapääoman 2 500 € ja kahden vuoden korkojen yhteinen nykyarvo on Oskarin maksama obligaation hinta.

$$\text{Oskarin maksama hinta } 0,92 \cdot 2\,500 = 2\,300$$

$$\text{Yhden vuoden korko } 0,0348 \cdot 2\,500 = 87$$

Koronmaksut ovat 1 ja 2 vuoden kuluttua

Korkokerroin  $q$

Korkojen korkokertoimella  $q$  diskontattu nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t} \quad | \quad K = 87, t = 1 \text{ ja } 2$$

$$k = 87\text{€} \cdot q^{-1} + 87\text{€} \cdot q^{-2}$$

Lainan takaisinmaksuun on 2 vuotta

Lainapääoman korkokertoimella  $q$  diskontattu nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t} \quad | \quad K = 2\,500, t = 2$$

$$k = 2\,500\text{€} \cdot q^{-2}$$

Korkojen ja lainapääoman yhteinen nykyarvo on oltava Oskarin maksama hinta 2 300 €.

Saadaan yhtälö

$$^q) \frac{87}{q} + \frac{87}{q^2} + \frac{2500}{q^2} = 2300$$

$$\frac{87q}{q^2} + \frac{87}{q^2} + \frac{2500}{q^2} = \frac{2300}{q^2} \quad | \cdot q^2$$

$$87q + 87 + 2500 = 2300q^2$$

$$-2300q^2 + 87q + 2587 = 0$$

$$q = \frac{-87 \pm \sqrt{87^2 - 4 \cdot (-2300) \cdot 2587}}{2 \cdot (-2300)}$$

$$q_1 \approx -1,04 \quad \text{ei käy, } q > 0$$

$$q_2 \approx 1,080$$

Korko on  $108,0\% - 100\% = 8,0\%$

Vastaus: Efektiivinen korkokanta oli 8,0 %.

**255.** Lasketaan minkä korkokannan mukaan lainapääoman 4 500 € ja kahden vuoden korkojen yhteinen nykyarvo on Ailin maksama obligaation hinta.

Ailin maksama hinta 4 185 €

Yhden vuoden korko  $0,0325 \cdot 4\,500 = 146,25$

Koronmaksut ovat 1 ja 2 vuoden kuluttua

Korkokerroin  $q$

Korkojen korkokertoimella  $q$  diskontattu nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t} \quad | \quad K = 146,25, \quad t = 1 \text{ ja } 2$$

$$k = 146,25 \text{ €} \cdot q^{-1} + 146,25 \text{ €} \cdot q^{-2}$$

Lainan takaisinmaksuun on 2 vuotta

Lainapääoman korkokertoimella  $q$  diskontattu nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t} \quad | \quad K = 4500, \quad t = 2$$

$$k = 4\,500 \text{ €} \cdot q^{-2}$$

Korkojen ja lainapääoman yhteinen nykyarvo on oltava Ailin maksama hinta 4 185 €.

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
& q^3 \frac{146,25}{q} + \frac{146,25}{q^2} + \frac{4500}{q^2} = q^2 \cdot 4185 \\
& \frac{146,25q}{q^2} + \frac{146,25}{q^2} + \frac{4500}{q^2} = \frac{4185}{q^2} \quad | \cdot q^2 \\
& 146,25q + 146,25 + 4500 = 4185q^2 \\
& -4185q^2 + 146,25q + 4646,25 = 0 \\
& q = \frac{-146,25 \pm \sqrt{146,25^2 - 4 \cdot (-4185) \cdot 4646,25}}{2 \cdot (-4185)}
\end{aligned}$$

$$q_1 \approx -1,04 \quad \text{ei käy, } q > 0$$

$$q_2 \approx 1,071$$

Korko on  $107,1\% - 100\% = 7,1\%$

Vastaus: Efektiivinen korkokanta oli 7,1 %.

**256.** Ostohinta  $450 \cdot 3,80 \text{ €} = 1710 \text{ €}$

Välityspalkkio  $0,01 \cdot 1710 \text{ €} \approx 17,10 \text{ €}$

Kulut yhteensä  $1710 \text{ €} + 17,10 \text{ €} = 1727,10 \text{ €}$

Myyntihinta  $450 \cdot 3,95 \text{ €} = 1777,50 \text{ €}$

Välityspalkkio  $0,01 \cdot 1777,50 \approx 17,78 \text{ €}$

Myyntivoitto  $1777,50 \text{ €} - 1727,10 \text{ €} - 17,78 \text{ €} = 32,62 \text{ €}$

Tuotto veron jälkeen  $0,72 \cdot 32,62 \text{ €} \approx 23,49 \text{ €}$

Osinkojen veroton osuus  $450 \cdot 0,30 \cdot 0,05 \text{ €} = 6,75 \text{ €}$

Osinkojen verollinen osuus veron jälkeen  $450 \cdot 0,70 \cdot 0,72 \cdot 0,05 \text{ €} \approx 11,34 \text{ €}$

Myyntituotto + osinko  $23,49 \text{ €} + 6,75 \text{ €} + 11,34 \text{ €} \approx 41,58 \text{ €}$

Prosentteina kuluista  $\frac{41,58}{1727,10 + 17,78} \approx 0,024 = 2,4\%$

Vastaus: Kokonaistuotto oli 41,58 € ja 2,4 %.

**257.** Ostohinta  $550 \cdot 6,30 \text{ €} = 3465 \text{ €}$

Välityspalkkio  $0,01 \cdot 3465 \text{ €} = 34,65 \text{ €}$

Kulut yhteensä  $3465 \text{ €} + 34,65 \text{ €} = 3499,65 \text{ €}$

Myyntihinta  $550 \cdot 7,60 \text{ €} = 4180 \text{ €}$

Välityspalkkio  $0,01 \cdot 4180 = 41,80 \text{ €}$

Myyntivoitto  $4180 \text{ €} - 3499,65 \text{ €} - 41,80 \text{ €} = 638,55 \text{ €}$

Tuotto veron jälkeen  $0,72 \cdot 638,55 \text{ €} \approx 459,76 \text{ €}$

Osinkojen veroton osuus  $550 \cdot 0,30 \cdot 0,43 \text{ €} = 70,95 \text{ €}$

Osinkojen verollinen osuus veron jälkeen  $550 \cdot 0,70 \cdot 0,72 \cdot 0,43 \text{ €} \approx 119,20 \text{ €}$

Myyntituotto + osinko  $459,76 \text{ €} + 70,95 \text{ €} + 119,20 \text{ €} \approx 649,91 \text{ €}$

Prosentteina  $\frac{649,91}{3499,65 + 41,80} \approx 18,4\%$

Vastaus: Kokonaistuotto oli 649,91 € ja 18,4 %.

258.

Osake	Määrä	Hankintahinta	Yhteensä	Arvo 1,5 vuoden kuluttua	Yhteensä
Alma Media	80	19	1520	24	1920
Elcotec	150	10,5	1575	11,27	1690,5
Orion	90	27,05	2434,5	14,4	1296
Stockmann	110	13	1430	15,4	1694
Vaisala	120	27,05	3246	17,8	2136
		yhteensä	10205,5		8736,5

Salkun arvo laski  $10\,205,50 \text{ €} - 8\,736,50 \text{ €} = 1\,469 \text{ €}$ .

Arvon lasku prosentteina  $\frac{1\,469}{10\,205,50} \approx 14,4\%$

Vastaus: Arvo laski 1 469 € ja prosentteina 14,4 %.

259. Arvon nousu  $79,93 \text{ €} - 79,33 \text{ €} = 0,60 \text{ €}$

Vuosikorko yksinkertaisella korolla

$$r = kit \quad \left| \quad r = 0,60, k = 79,33, t = \frac{21}{360} \right.$$

$$0,60 = 79,33 \cdot i \cdot \frac{21}{360} \quad | \cdot 360$$

$$216 = 1\,665,93i \quad | :1665,93$$

$$i \approx 0,130 = 13,0\%$$

Vastaus: Kurssinousu vastaa 13,0 %:n korkokantaa.

260. Korkokerroin

$$K = kq^t \quad \left| \quad K = 18,72, k = 17,60, t = 3 \right.$$

$$18,72 = 17,60 \cdot q^3 \quad | :17,60$$

$$1,0636\dots = q^3$$

$$q = \sqrt[3]{1,0636\dots}$$

$$q = 1,0207\dots$$

Korkoprosentti  $102,07\dots\% - 100\% \approx 2,1\%$

Vastaus: Kurssinousu vastaa 2,1 %:n korkokantaa.

261. Osakekannan markkina-arvo saadaan kertomalla osakkeen pörssihinta osakkeiden kokonaismäärällä.

$$14,06 \text{ €} \cdot 4\,795\,067\,413 = 67\,418\,647\,830 \text{ €}$$

Vastaus: 67 418 647 830 €

**262.** a) Arvon nousu = Myyntihinta – Ostohinta – Remontin hinta

$$120\,000\text{ €} - 82\,000\text{ €} - 7\,000\text{ €} = 31\,000\text{ €}$$

b) Todellinen arvon nousu = Myyntihinta – Ostohinnan nykyarvo – Remontin hinnan nykyarvo

Ostohinnan ja remontin hinnan nykyarvo korkokannalla 1,6 % yhteensä

$$(82\,000\text{ €} + 7\,000\text{ €}) \cdot 1,016^5 = 96\,351,514\dots\text{€}$$

$$120\,000\text{ €} - 96\,351,514\dots\text{€} = 23\,648,486\text{ €}$$

$$\text{Todellinen arvon nousu prosentteina } \frac{23\,648,486\dots}{96\,351,514\dots} = 0,2454\dots \approx 24,5\%$$

c) Lasketaan minä korkokannan mukaan 96 351,51 € kasvaa 120 000 €:ksi.

Korkokerroin

$$K = kq^t \quad | \quad K = 120\,000, k = 96\,351,51, t = 5$$

$$120\,000 = 96\,351,51 \cdot q^5 \quad | :96\,351,51$$

$$1,2454\dots = q^5$$

$$q = \sqrt[5]{1,2454\dots}$$

$$q = 1,0448\dots$$

Korkoprosentti 104,48...% – 100 %  $\approx$  4,5 %

Vastaus: a) 31 000 € b) 24,5 % c) vuosikorkokanta 4,5 %

**263.** Vuokra  $x$

Kuukausivuokratuotto veron ja yhtiövastikkeen vähennyksen jälkeen  $0,71 \cdot (x - 67)$

Tavoiteltu vuosituotto  $0,045 \cdot 95\,000\text{ €} = 4\,275\text{ €}$

Saadaan yhtälö

$$12 \cdot 0,71 \cdot (x - 67) = 4\,275$$

$$8,52x - 570,84 = 4\,275$$

$$8,52x = 4\,845,84$$

$$x \approx 568,76\text{ €}$$

Vastaus: Vuokran tulisi olla 568,76 €

**264.** 1°  $a$  = pääoma

Koska korosta peritään 28 %:n vero, jää siitä  $100\% - 28\% = 72\% = 0,72$ .

Korko on  $0,72 \cdot 0,05 \cdot a = 0,036a$ .

2°  $x$  = korkokerroin

$$x \cdot 0,72 \cdot a = 0,05 \cdot a \quad | :a$$

$$0,72x = 0,05 \quad | :0,72$$

$$x = \frac{0,05}{0,72} \approx 0,0694 \approx 6,9\%$$

Vastaus: 1°Obligaation todellinen korko on 3,6 %. 2° Obligaation vuotuisen koron tulisi olla 6,9 %, jotta todellinen korko olisi 5 %.

**265.** a) Sijoitus kasvaa korkoa korolle

$$K_t = kq^t$$

$$K_t = 95\,600\text{ mk}$$

$$k = 65\,000 \text{ mk}$$

$$t = 6 \text{ a}$$

$$95\,600 = 65\,000q^6 \quad | : 65\,000$$

$$q^6 = \frac{95\,600}{65\,000} \quad | \sqrt[6]{\phantom{x}}$$

$$q = \sqrt[6]{\frac{95\,600}{65\,000}}$$

$$q = 1,0664\dots$$

$$q \approx 1,0664$$

Vuotuinen nimellinen korkokanta 6,64%.

b) Inflaation vaikutuksesta sijoituksen pitäisi kasvaa 2,0% joka vuosi. Jotta sijoituksen arvo ei muuttuisi sijoituksen pitäisi olla

$$K_6 = 65\,000 \cdot 1,02^6 \text{ mk} = 73\,200,55\dots \text{ mk}$$

Käytetään tätä arvoa sijoituksena, kun lasketaan reaalin korkokanta

$$K_n = K_6 q^6$$

$$95\,600 = 65\,000 \cdot 1,02^6 q^6 \quad | : 65\,000 \cdot 1,02^6$$

$$q^6 = \frac{95\,600}{65\,000 \cdot 1,02^6} \quad | \sqrt[6]{\phantom{x}}$$

$$q = \sqrt[6]{\frac{95\,600}{65\,000 \cdot 1,02^6}}$$

$$q \approx 1,0455$$

Reaalin korkokanta 4,45%.

Vastaus: Nimellinen korkokanta 6,64% b) Reaalin korkokanta 4,55%

**266.** Sijoitus, josta kulut pois

$$60 - 0,02 \cdot 60 - 1,35 = 57,45 \text{ (€)}$$

Lasketaan yhden vuoden tuotto

1. pano on tilillä 12 kk, toinen 11 kk, ..., viimeinen 1 kk

$$\text{kuukauden korko } \frac{0,044}{12}$$

vuodessa korko

$$\frac{0,044}{12} \cdot 57,45 \cdot 12 + \frac{0,044}{12} \cdot 57,45 \cdot 11 + \dots + \frac{0,044}{12} \cdot 57,45$$

$$= \frac{0,044}{12} \cdot 57,45 \cdot (12 + 11 + \dots + 1)$$

$$\text{aritmeettinen summa } S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$= \frac{0,044}{12} \cdot 57,45 \cdot \frac{12+1}{2} \cdot 12$$

$$= 16,4307$$

Sijoitus 1. vuoden jälkeen

$$16,4307 \text{ €} + 12 \cdot 57,45 \text{ €} = 705,8307 \text{ €}$$



Ostoja tehtiin yhteensä  $13 \cdot 100 \text{ €} = 1\,300 \text{ €}$

Jos osuuksia olisi ostettu heti alussa  $1\,300 \text{ €}$ :lla, olisi saatu  $\frac{1300}{20} = 65$  ja näiden yhteisarvo

olisi lopussa ollut sama kuin alussa  $1\,300 \text{ €}$ .

Sijoitusten suhde  $\frac{1941,27}{1300} = 1,4932\dots$

Joten valittu sijoitustapa tuotti  $149,32\dots\% - 100\% \approx 49,3\%$  suuremman summan.

Vastaus: 49,3 % suurempi

**269.** Korkokerroin

$$K = kq^t \quad | \quad K = 12\,000, k = 9\,000, t = 5$$

$$12\,000 = 9\,000 \cdot q^5 \quad | : 9\,000$$

$$1,333\dots = q^5$$

$$q = \sqrt[5]{1,333\dots}$$

$$q = 1,0592\dots$$

Korkoprosentti  $105,92\dots\% - 100\% \approx 5,9\%$

Vastaus: Ärlliga räntesats 5,9 %

## 10. TALOUSMATEMATIIKKA TAULUKKOLASKENTA-OHJELMALLA

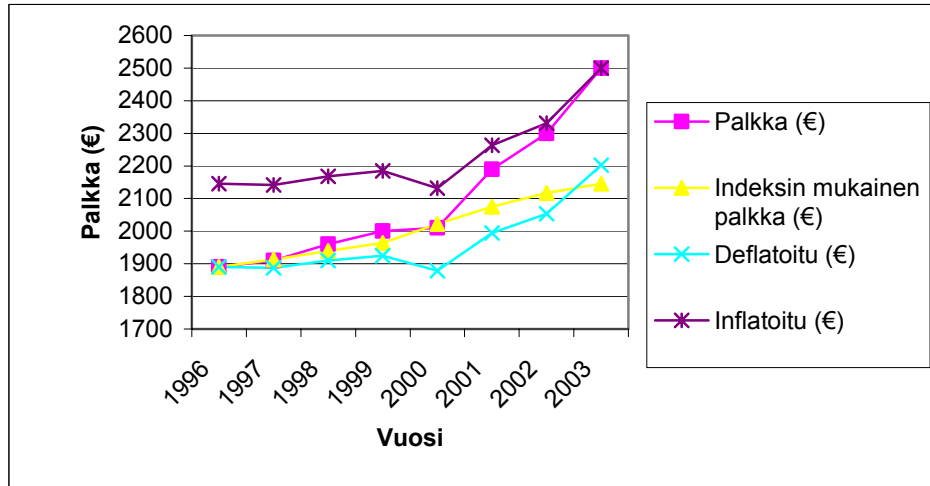
**270.**

Vuosi	Indeksi	kahvi (mk)	kahvi (€)	vehnäj. (mk)	vehnäj. (€)	jauhel. (mk)	jauhel. (€)	elokuva (mk)	elokuva (€)	parturi (mk)	parturi (€)	Lewis (mk)	Lewis (€)
2003	1577	30,72	5,17	11,90	2,00	62,30	10,48	32,45	5,46	59,27	9,97	430,48	72,40
2002	1563	30,45	5,12	11,79	1,98	61,75	10,39	32,16	5,41	58,75	9,88	426,66	71,76
2001	1539	29,98	5,04	11,61	1,95	60,80	10,23	31,67	5,33	57,84	9,73	420,11	70,66
2000	1501	29,24	4,92	11,32	1,90	59,30	9,97	30,88	5,19	56,42	9,49	409,74	68,91
1999	1452	28,28	4,76	10,95	1,84	57,36	9,65	29,88	5,02	54,57	9,18	396,36	66,66
1998	1435	27,95	4,70	10,83	1,82	56,69	9,53	29,53	4,97	53,94	9,07	391,72	65,88
1997	1415	27,56	4,64	10,68	1,80	55,90	9,40	29,12	4,90	53,18	8,94	386,26	64,96
1996	1398	27,23	4,58	10,55	1,77	55,23	9,29	28,77	4,84	52,54	8,84	381,62	64,18
1995	1390	27,08	4,55	10,49	1,76	54,91	9,24	28,60	4,81	52,24	8,79	379,44	63,82
1994	1376	26,80	4,51	10,38	1,75	54,36	9,14	28,31	4,76	51,72	8,70	375,62	63,17
1993	1361	26,51	4,46	10,27	1,73	53,77	9,04	28,00	4,71	51,15	8,60	371,52	62,49
1992	1333	25,97	4,37	10,06	1,69	52,66	8,86	27,43	4,61	50,10	8,43	363,88	61,20
1991	1300	25,32	4,26	9,81	1,65	51,36	8,64	26,75	4,50	48,86	8,22	354,87	59,68
1990	1248	24,31	4,09	9,42	1,58	49,30	8,29	25,68	4,32	46,91	7,89	340,67	57,30
1989	1177	22,93	3,86	8,88	1,49	46,50	7,82	24,22	4,07	44,24	7,44	321,29	54,04
1988	1104	21,50	3,62	8,33	1,40	43,61	7,34	22,72	3,82	41,49	6,98	301,37	50,69
1987	1052	20,49	3,45	7,94	1,33	41,56	6,99	21,65	3,64	39,54	6,65	287,17	48,30
1986	1015	19,77	3,33	7,66	1,29	40,10	6,74	20,88	3,51	38,15	6,42	277,07	46,60
1985	980	19,09	3,21	7,39	1,24	38,72	6,51	20,16	3,39	36,83	6,20	267,52	44,99
1984	925	18,02	3,03	6,98	1,17	36,54	6,15	19,03	3,20	34,77	5,85	252,50	42,47
1983	865	16,85	2,83	6,53	1,10	34,17	5,75	17,80	2,99	32,51	5,47	236,12	39,71
1982	797	15,52	2,61	6,01	1,01	31,49	5,30	16,40	2,76	29,96	5,04	217,56	36,59
1981	729	14,20	2,39	5,50	0,93	28,80	4,84	15,00	2,52	27,40	4,61	199,00	33,47

271.

Vuosi	Indeksi	Palkka (€)	Indeksin mukainen palkka (€)	Deflatoitu (€)	Inflatoitu (€)
1996	100	1890	1890,00	1890,00	2145,15
1997	101,2	1910	1912,68	1887,35	2142,14
1998	102,6	1960	1939,14	1910,33	2168,23
1999	103,9	2000	1963,71	1924,93	2184,79
2000	107	2010	2022,30	1878,50	2132,10
2001	109,8	2190	2075,22	1994,54	2263,80
2002	112	2300	2116,80	2053,57	2330,80
2003	113,5	2500	2145,15	2202,64	2500,00

d)



e) 0,95

272.

Tavoite	7 800,00 €
Korkopros	1,9525 %
Säästöjä/vuosi	12
Säästöaika	6
Kertasäästö	- 102,03 €

273.

Tavoite	30 000,00 €
Korkopros	2,3430 %
Säästöjä/vuosi	12
Säästöaika	5
Kertasäästö	- 470,85 €

274.

Korkopros	3,0175 %
Säästöjä/vuosi	12
Säästöaika	10
Kertäsäästö	-120,00 €
Tuleva arvo	16 826,43 €

275.

Korkopros	2,6625 %
Säästöjä/vuosi	6
Säästöaika	6
Kertäsäästö	-300,00 €
Tuleva arvo	11 734,30 €

276.

	1. maksu	1000 €					
	Korkoprosentti	5,2 %					
	Nousuprosentti	7 %					
vuosi	pääoma vuoden alussa	talletus	yhteensä	verollinen korko	vero	nettokorko	pääoma vuoden lopussa
1	0,00	1000,00	1000,00	52,00	14,56	37,44	1037,44
2	1037,44	1070,00	2107,44	109,59	30,68	78,90	2186,34
3	2186,34	1144,90	3331,24	173,22	48,50	124,72	3455,96
4	3455,96	1225,04	4681,01	243,41	68,16	175,26	4856,26
5	4856,26	1310,80	6167,06	320,69	89,79	230,89	6397,95
6	6397,95	1402,55	7800,51	405,63	113,58	292,05	8092,56
7	8092,56	1500,73	9593,29	498,85	139,68	359,17	9952,46
8	9952,46	1605,78	11558,24	601,03	168,29	432,74	11990,98
9	11990,98	1718,19	13709,17	712,88	199,61	513,27	14222,44
10	14222,44	1838,46	16060,90	835,17	233,85	601,32	16662,22
11	16662,22	1967,15	18629,37	968,73	271,24	697,48	19326,85
12	19326,85	2104,85	21431,71	1114,45	312,05	802,40	22234,11
13	22234,11	2252,19	24486,30	1273,29	356,52	916,77	25403,07
14	25403,07	2409,85	27812,91	1446,27	404,96	1041,32	28854,23
15	28854,23	2578,53	31432,76	1634,50	457,66	1176,84	32609,61
16	32609,61	2759,03	35368,64	1839,17	514,97	1324,20	36692,84
17	36692,84	2952,16	39645,00	2061,54	577,23	1484,31	41129,31
18	41129,31	3158,82	44288,13	2302,98	644,84	1658,15	45946,27
19	45946,27	3379,93	49326,21	2564,96	718,19	1846,77	51172,98
20	51172,98	3616,53	<b>54789,51</b>				
				Vastaus:	54 789,51 €		





280.

	Luoton määrä		40000	€	
	Korkoprosentti alussa		4,00 %		
	Korkoprosentti lopussa		6,50 %		
	Lyhennyksiä vuodessa		2		
	Maksuaika		5		
vuosi	lainaa jäljellä	lyhennys	korko	erän suuruus	lainaa jäljellä
1	40000	0	800	800	40000
1	40000	0	800	800	40000
2	40000	0	800	800	40000
2	40000	0	800	800	40000
3	40000	4000	800	4800	36000
3	36000	4000	720	4720	32000
4	32000	4000	1040	5040	28000
4	28000	4000	910	4910	24000
5	24000	4000	780	4780	20000
5	20000	4000	650	4650	16000
6	16000	4000	520	4520	12000
6	12000	4000	390	4390	8000
7	8000	4000	260	4260	4000
7	4000	4000	130	4130	0

## 281.

	Lainapääoma	2600			
	Korkoprosentti p.a	9,25 %			
	Lyh per vuosi	12			
	Laina-aika vuosina	3			
	Annuiteetti	-82,98 €			
Erä	korko	lyhennys	tilinhoitomaksu	yhteensä	Lainaa jäljellä
1	-20,04 €	-62,94 €	-4,00 €	-86,98 €	2 537,06 €
2	-19,56 €	-63,43 €	-4,00 €	-86,98 €	2 473,63 €
3	-19,07 €	-63,91 €	-4,00 €	-86,98 €	2 409,72 €
4	-18,57 €	-64,41 €	-4,00 €	-86,98 €	2 345,31 €
5	-18,08 €	-64,90 €	-4,00 €	-86,98 €	2 280,41 €
6	-17,58 €	-65,40 €	-4,00 €	-86,98 €	2 215,00 €
7	-17,07 €	-65,91 €	-4,00 €	-86,98 €	2 149,10 €
8	-16,57 €	-66,42 €	-4,00 €	-86,98 €	2 082,68 €
9	-16,05 €	-66,93 €	-4,00 €	-86,98 €	2 015,75 €
10	-15,54 €	-67,44 €	-4,00 €	-86,98 €	1 948,31 €
11	-15,02 €	-67,96 €	-4,00 €	-86,98 €	1 880,34 €
12	-14,49 €	-68,49 €	-4,00 €	-86,98 €	1 811,86 €
13	-13,97 €	-69,02 €	-4,00 €	-86,98 €	1 742,84 €
14	-13,43 €	-69,55 €	-4,00 €	-86,98 €	1 673,29 €
15	-12,90 €	-70,08 €	-4,00 €	-86,98 €	1 603,21 €
16	-12,36 €	-70,62 €	-4,00 €	-86,98 €	1 532,58 €
17	-11,81 €	-71,17 €	-4,00 €	-86,98 €	1 461,42 €
18	-11,27 €	-71,72 €	-4,00 €	-86,98 €	1 389,70 €
19	-10,71 €	-72,27 €	-4,00 €	-86,98 €	1 317,43 €
20	-10,16 €	-72,83 €	-4,00 €	-86,98 €	1 244,60 €
21	-9,59 €	-73,39 €	-4,00 €	-86,98 €	1 171,21 €
22	-9,03 €	-73,95 €	-4,00 €	-86,98 €	1 097,26 €
23	-8,46 €	-74,52 €	-4,00 €	-86,98 €	1 022,74 €
24	-7,88 €	-75,10 €	-4,00 €	-86,98 €	947,64 €
25	-7,30 €	-75,68 €	-4,00 €	-86,98 €	871,96 €
26	-6,72 €	-76,26 €	-4,00 €	-86,98 €	795,70 €
27	-6,13 €	-76,85 €	-4,00 €	-86,98 €	718,85 €
28	-5,54 €	-77,44 €	-4,00 €	-86,98 €	641,41 €
29	-4,94 €	-78,04 €	-4,00 €	-86,98 €	563,37 €
30	-4,34 €	-78,64 €	-4,00 €	-86,98 €	484,73 €
31	-3,74 €	-79,25 €	-4,00 €	-86,98 €	405,49 €
32	-3,13 €	-79,86 €	-4,00 €	-86,98 €	325,63 €
33	-2,51 €	-80,47 €	-4,00 €	-86,98 €	245,16 €
34	-1,89 €	-81,09 €	-4,00 €	-86,98 €	164,06 €
35	-1,26 €	-81,72 €	-4,00 €	-86,98 €	82,35 €
36	-0,63 €	-82,35 €	-4,00 €	-86,98 €	0,00 €
	-387,36 €	-2 600,00 €	-144,00 €	-3 131,36 €	

	Lainapääoma	2750			
	Korkoprosentti p.a	13,25 %			
	Lyh per vuosi	12			
	Laina-aika vuosina	2,5			
	Annuiteetti	-108,19 €			
Erä	korko	lyhennys	tilinhoitomaksu	yhteensä	Lainaa jäljellä
1	-30,36 €	-77,82 €	-4,00 €	-112,19 €	2 672,18 €
2	-29,51 €	-78,68 €	-4,00 €	-112,19 €	2 593,50 €
3	-28,64 €	-79,55 €	-4,00 €	-112,19 €	2 513,95 €
4	-27,76 €	-80,43 €	-4,00 €	-112,19 €	2 433,52 €
5	-26,87 €	-81,32 €	-4,00 €	-112,19 €	2 352,20 €
6	-25,97 €	-82,21 €	-4,00 €	-112,19 €	2 269,99 €
7	-25,06 €	-83,12 €	-4,00 €	-112,19 €	2 186,87 €
8	-24,15 €	-84,04 €	-4,00 €	-112,19 €	2 102,83 €
9	-23,22 €	-84,97 €	-4,00 €	-112,19 €	2 017,86 €
10	-22,28 €	-85,91 €	-4,00 €	-112,19 €	1 931,96 €
11	-21,33 €	-86,85 €	-4,00 €	-112,19 €	1 845,10 €
12	-20,37 €	-87,81 €	-4,00 €	-112,19 €	1 757,29 €
13	-19,40 €	-88,78 €	-4,00 €	-112,19 €	1 668,51 €
14	-18,42 €	-89,76 €	-4,00 €	-112,19 €	1 578,74 €
15	-17,43 €	-90,75 €	-4,00 €	-112,19 €	1 487,99 €
16	-16,43 €	-91,76 €	-4,00 €	-112,19 €	1 396,23 €
17	-15,42 €	-92,77 €	-4,00 €	-112,19 €	1 303,46 €
18	-14,39 €	-93,79 €	-4,00 €	-112,19 €	1 209,67 €
19	-13,36 €	-94,83 €	-4,00 €	-112,19 €	1 114,84 €
20	-12,31 €	-95,88 €	-4,00 €	-112,19 €	1 018,96 €
21	-11,25 €	-96,94 €	-4,00 €	-112,19 €	922,03 €
22	-10,18 €	-98,01 €	-4,00 €	-112,19 €	824,02 €
23	-9,10 €	-99,09 €	-4,00 €	-112,19 €	724,93 €
24	-8,00 €	-100,18 €	-4,00 €	-112,19 €	624,75 €
25	-6,90 €	-101,29 €	-4,00 €	-112,19 €	523,46 €
26	-5,78 €	-102,41 €	-4,00 €	-112,19 €	421,06 €
27	-4,65 €	-103,54 €	-4,00 €	-112,19 €	317,52 €
28	-3,51 €	-104,68 €	-4,00 €	-112,19 €	212,84 €
29	-2,35 €	-105,84 €	-4,00 €	-112,19 €	107,00 €
30	-1,18 €	-107,00 €	-4,00 €	-112,19 €	0,00 €
	-495,59 €	-2 750,00 €	-120,00 €	-3 365,59 €	

## 283.

			lainamäärä	100000	€	
			korkoprosentti	6	%	
			kulut/erä	5	€	
			1. lyhennys	1800	€	
			nousu-%	10	%	
			lyhennyksiä/vuosi	2		
Erä	laina ennen lyhennystä	lyhennys	korko	kulut	hoitomaksu	laina lyhennyksen jälkeen
1	100000,00	1800,00	3000,00	5,00	4805,00	98200,00
2	98200,00	1980,00	2946,00	5,00	4931,00	96220,00
3	96220,00	2178,00	2886,60	5,00	5069,60	94042,00
4	94042,00	2395,80	2821,26	5,00	5222,06	91646,20
5	91646,20	2635,38	2749,39	5,00	5389,77	89010,82
6	89010,82	2898,92	2670,32	5,00	5574,24	86111,90
7	86111,90	3188,81	2583,36	5,00	5777,17	82923,09
8	82923,09	3507,69	2487,69	5,00	6000,38	79415,40
9	79415,40	3858,46	2382,46	5,00	6245,92	75556,94
10	75556,94	4244,31	2266,71	5,00	6516,01	71312,64
11	71312,64	4668,74	2139,38	5,00	6813,12	66643,90
12	66643,90	5135,61	1999,32	5,00	7139,93	61508,29
13	61508,29	5649,17	1845,25	5,00	7499,42	55859,12
14	55859,12	6214,09	1675,77	5,00	7894,86	49645,03
15	49645,03	6835,50	1489,35	5,00	8329,85	42809,53
16	42809,53	7519,05	1284,29	5,00	8808,33	35290,49
17	35290,49	8270,95	1058,71	5,00	9334,67	27019,53
18	27019,53	9098,05	810,59	5,00	9913,63	17921,49
19	17921,49	10007,85	537,64	5,00	10550,50	7913,64
20	7913,64	7913,64	237,41	5,00	8156,05	0,00
		100000,00	39871,50	100,00	139971,50	

## 284.

a)

Korkoprosentti	5,15 %
Säästöjä/vuosi	12
Säästöaika	12
Kertäsäästö	-125,00 €
Tuleva arvo	24 944,33 €

b)

Korkoprosentti	5,15 %
Säästöjä/vuosi	12
Säästöaika	12
Kertäsäästö	-125,00 €
Nykyarvo	13 463,32 €

**285.**

a)

Korkoprosentti	2,30 %
Säästöjä/vuosi	12
Säästöaika	3,5
Kertäsäästö	-85,00 €
Tuleva arvo	3 721,04 €

b)

Korkoprosentti	2,30 %
Säästöjä/vuosi	12
Säästöaika	3,5
Kertäsäästö	-85,00 €
Nykyarvo	3 433,50 €

**286.**

Korkoprosentti	3,15 %
1. stipendi	100
2. stipendi	100
3. stipendi	100
4. stipendi	100
5. stipendi	100
6. stipendi	100
7. stipendi	100
8. stipendi	100
9. stipendi	100
10. stipendi	100
11. stipendi	100
12. stipendi	100
Stipendien nykyarvo	986,55 €

**287.**

Korkoprosentti	2,45 %
Säästöjä/vuosi	12
Säästöaika	5
Kertäsäästö	-50,00 €
Nykyarvo	2 820,82 €

**288.**

Luoton määrä	2 750
1. lyhennys	-1 000
2. lyhennys	-1 000
3. lyhennys	-1 000
4. lyhennys	-1 000
Todellinen vuosikorko	16,88 %

**289.**

Luoton määrä	1400
1. lyhennys	-200
2. lyhennys	-300
3. lyhennys	-400
4. lyhennys	-500
5. lyhennys	-600
Todellinen vuosikorko	11,04 %

**290.**

Luoton määrä	800
1	-46
2	-46
3	-46
4	-46
5	-46
6	-46
7	-46
8	-46
9	-46
10	-46
11	-46
12	-46
13	-46
14	-46
15	-46
16	-46
17	-46
18	-46
19	-46
20	-46
21	-46
22	-46
23	-46
24	-46
Todellinen kuukausikorko	2,76 %
Todellinen vuosikorko	33,06 %

291.

Luoton määrä	990
1	-35
2	-35
3	-35
4	-35
5	-35
6	-35
7	-35
8	-35
9	-35
10	-35
11	-35
12	-35
13	-35
14	-35
15	-35
16	-35
17	-35
18	-35
19	-35
20	-35
21	-35
22	-35
23	-35
24	-35
25	-35
26	-35
27	-35
28	-35
29	-35
30	-35
31	-35
32	-35
33	-35
34	-35
35	-35
36	-35
Todellinen kuukausikorko	1,37 %
Todellinen vuosikorko	16,40 %

292.

	Lainan määrä	20000
	Korkoprosentti	8,00 %
	Laina-aika	3
	Lyhennyksiä vuodessa	2
	Toimitusmaksu	500
	Annuiteetti	-3 815,24
jakso	tapaukset puolivuositain	
0	19 500,00 €	
1	-3 815,24 €	
2	-3 815,24 €	
3	-3 815,24 €	
4	-3 815,24 €	
5	-3 815,24 €	
6	-3 815,24 €	
	Puolen vuoden jakson todellinen korko	4,783 %
	Todellinen vuosikorko	9,57 %

293.

	Auton hinta	12000
	Käsiraha	4000
	Lainan määrä	8000
	Korkoprosentti	10,00 %
	Laina-aika	2
	Lyhennyksiä vuodessa	2
	Rahoituslisä	-50
	Annuiteetti	-2 256,09 €
jakso	tapaukset puolivuositain	
0	8 000,00 €	
1	-2 306,09 €	
2	-2 306,09 €	
3	-2 306,09 €	
4	-2 306,09 €	
	Jakson todellinen korko	5,950 %
	Todellinen vuosikorko	<b>11,90 %</b>

## TESTAA HYVÄT TAITOSI 2

1. Lyhennys  $\frac{8\,000}{10} = 800$

Puolen vuoden korko  $\frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot 8\,000 = 200$

Hoitomaksu  $800\text{ €} + 200\text{ €} = 1\,000\text{ €}$

Vastaus: 1 000 €

2. Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \begin{array}{l} K = 8\,000, q = 1 + \frac{0,05}{2} = 1,025, n = 10 \end{array} \right.$$
$$= 8\,000 \cdot 1,025^{10} \cdot \frac{1-1,025}{1-1,025^{10}}$$
$$\approx 914,07$$

Vastaus: 914,07 €

3. Leasingerä  $0,03 \cdot 1\,100\text{ €} = \underline{33\text{ €}}$

4. Koronkorko

$$K = k \cdot q^t \quad \left| \begin{array}{l} K = 5\,000, q = 1,04, t = 3 \end{array} \right.$$

$$5\,000 = k \cdot 1,04^3 \quad \left| \begin{array}{l} :1,04^3 \end{array} \right.$$

$$k = \frac{5\,000}{1,04^3}$$

$$k \approx 4\,444,98$$

Vastaus: 4 444,98 €

5. Lasketaan talletusten yhteinen nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t}$$

$$k = 1\,200\text{ €} \cdot 1,02^{-1} + 2\,400\text{ €} \cdot 1,02^{-2} + 2\,200\text{ €} \cdot 1,02^{-3} \approx 5\,556,38\text{ €}$$

Vastaus: 5 556,38 €

6. Veroton hinta  $x$

$$1,08 \cdot x = 71,28$$

$$x = \frac{71,28}{1,08}$$

$$x = 66$$

Vastaus: 66 €

$$7. \text{ Vero } 0,185 \cdot 12\,200 + (14\,250 - 12\,200) \cdot 0,45 = 3\,179,50$$

Vastaus: 3 179,50 €

8. Myyjä on pitänyt obligaatiota hallussaan  $29 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 7 = 216$  päivää ennen myyntiä ja Terttu joutuu maksamaan myyjälle koron tältä ajalta.

Korko

$$r = kit \quad | \quad k = 3000, i = 0,045, t = \frac{216}{360}$$

$$r = 3\,300 \text{ €} \cdot 0,045 \cdot \frac{216}{360} = 81 \text{ €}$$

Vastaus: Terttu maksaa korkoa 81 €.

$$9. \text{ Ostohinta } 200 \cdot 7,29 \text{ €} = 1\,458 \text{ €}$$

$$\text{Välityspalkkio } 0,01 \cdot 1\,458 \text{ €} = 14,58 \text{ €}$$

$$\text{Kulut yhteensä } 1\,458 \text{ €} + 14,58 \text{ €} = 1\,472,58 \text{ €}$$

$$\text{Myyntihinta } 200 \cdot 13,00 \text{ €} = 2\,600 \text{ €}$$

$$\text{Välityspalkkio } 0,01 \cdot 2\,600 = 26,00 \text{ €}$$

$$\text{Myyntivoitto } 2\,600 \text{ €} - 1\,472,58 \text{ €} - 26,00 \text{ €} = 1\,101,42 \text{ €}$$

$$\text{Tuotto veron jälkeen } 0,72 \cdot 1\,101,42 \text{ €} \approx 793,02 \text{ €}$$

$$\text{Osinkojen veroton osuus } 200 \cdot 0,30 \cdot 0,98 \text{ €} = 58,80 \text{ €}$$

$$\text{Osinkojen verollinen osuus veron jälkeen } 200 \cdot 0,70 \cdot 0,72 \cdot 0,98 \text{ €} \approx 98,78 \text{ €}$$

$$\text{Myyntituotto} + \text{osinko } 793,02 \text{ €} + 58,80 \text{ €} + 98,78 \text{ €} \approx 950,60 \text{ €}$$

Vastaus: 950,60 €

10. Lasketaan kaikkien 600 000 mk:n erien yhteinen nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t} \quad | \quad K = 600\,000, q = 1 + \frac{0,06}{2} = 1,03, t = 0, 1, 2, \dots, 74$$

$$k = 600\,000 \text{ €} + 600\,000 \text{ €} \cdot 1,03^{-1} + 600\,000 \text{ €} \cdot 1,03^{-2} + \dots + 600\,000 \text{ €} \cdot 1,03^{-74}$$

$$k = \frac{600\,000 \cdot \left(1 - (1,03^{-1})^{75}\right)}{1 - 1,03^{-1}}$$

$$k \approx 18\,355\,728,64$$

Muutetaan vuoden 1873 markat vuoden 2002 euroiksi

$$3,6216 \cdot 18\,355\,728,64 = 66\,477\,106,84 \text{ €}$$

Vastaus: 18 355 728,64 mk ja 66 477 106,84 €.

# HARJOITUSKOE 1

1. kirjasta

2.

Vuosi	Suomenhevosia	Indeksi
1910	297 100	100
1920	391 370	131,7
1930	356 650	120,0
1940	347 000	116,8
1950	408 800	137,6
1960	250 600	84,3
1970	89 800	30,2
1980	19 700	6,6
1990	15 900	5,4
2000	19 500	6,6

3. Jenin arvo nousee euroon nähden eli jenillä saa revalvaation jälkeen 13 % enemmän euroja kuin ennen revalvaatiota.

Lasketaan jenin kurssi euroina alussa.

$$1 \text{ €} = 130,65 \text{ JPY} \quad | : 130,65$$

$$\frac{1}{130,65} \text{ €} = 1 \text{ JPY}$$

Kurssi revalvaation jälkeen

$$1,13 \cdot \frac{1}{130,65} \text{ €} = 1 \text{ JPY} \quad \left| \cdot \frac{130,65}{1,13} \right. \text{ muutetaan kurssi takaisin euron kurssiksi}$$

$$1 \text{ €} = \frac{130,65}{1,13} \text{ JPY}$$

$$1 \text{ €} = 115,62 \text{ JPY}$$

Vastaus: 1 € = 115,62 JPY

4. Annuiteetin suuruus

$$\begin{aligned} A &= Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} & \left\{ \begin{array}{l} K = 95\,000 \\ q = 1 + \frac{0,048}{12} = 1,004 \\ n = 12 \cdot 12 = 144 \end{array} \right. \\ &= 95\,000 \cdot 1,004^{144} \cdot \frac{1-1,004}{1-1,004^{144}} \\ &\approx 869,14 \end{aligned}$$

Lainaa jäljellä 6 vuoden eli 72 kuukauden kuluttua

$$V = Kq^k - A \frac{1-q^k}{1-q} \quad \left| \begin{array}{l} K = 95\,000 \\ q = 1,004 \\ k = 72 \\ A = 869,14 \end{array} \right.$$

$$= 95\,000 \cdot 1,004^{72} - 869,14 \cdot \frac{1-1,004^{72}}{1-1,004}$$

$$\approx 54\,280,16$$

Lainan kokonaiskustannukset ovat  $144 \cdot 869,14 \text{ €} = 125\,156,16 \text{ €}$

Vastaus: Annuiteetin suuruus on 869,14 €. Lainaa on jäljellä 54 280,16 € kuuden vuoden kuluttua. Lainan kokonaiskustannukset ovat 125 156,16 €.

5. Myyjä on pitänyt obligaatiota hallussaan  $29 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 5 = 214$  päivää ennen myyntiä ja Aili joutuu maksamaan myyjälle koron tältä ajalta.

Korko

$$r = kit \quad \left| \begin{array}{l} k = 2\,600, i = 0,034, t = \frac{214}{360} \end{array} \right.$$

$$r = 2\,600 \text{ €} \cdot 0,034 \cdot \frac{214}{360} = 52,55 \text{ €}$$

Vastaus: Aili maksaa korkoa 52,55 €.

6. Lasketaan minkä korkokannan mukaan kummankin erän luotonottohetkeen diskontattu yhteenlaskettu nykyarvo on 3 600 €.

$$2100 \cdot q^{-1} + 2100 \cdot q^{-2} = 3600$$

$$\stackrel{q)}{\frac{2100}{q} + \frac{2100}{q^2} = q^2} 3600$$

$$\frac{2100q}{q^2} + \frac{2100}{q^2} = \frac{3600q^2}{q^2} \quad \left| \cdot q^2 \right.$$

$$2100q + 2100 = 3600q^2$$

$$-3600q^2 + 2100q + 2100 = 0$$

$$q = \frac{-2100 \pm \sqrt{2100^2 - 4 \cdot (-3600) \cdot 2100}}{2 \cdot (-3600)}$$

$$= \frac{-2100 \pm \sqrt{34\,650\,000}}{-7200}$$

$$q_1 = \frac{-2100 - \sqrt{34\,650\,000}}{-7200} = 1,1092\dots$$

$$q_2 = \frac{-2100 + \sqrt{34\,650\,000}}{-7200} = -0,525\dots \text{ ei käy, } q > 0$$

Korkokanta  $1,1092\dots - 1 = 0,1092\dots \approx 10,9\%$

Vastaus: Todellinen vuosikorkokanta on 10,9 %.

7. Lasketaan stipendien yhteinen nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t}$$

$$k = 180 \text{ €} \cdot 1,024^{-1} + 180 \text{ €} \cdot 1,024^{-2} + 180 \text{ €} \cdot 1,024^{-3} + 180 \text{ €} \cdot 1,024^{-4} + 180 \text{ €} \cdot 1,024^{-5} \\ \approx 858,79 \text{ €}$$

Vastaus: 858,79 €

8. Kaloja 10 vuoden kuluttua

$$V = Kq^k - A \frac{1-q^k}{1-q} \quad | \quad K = 1800, q = 1,14, A = 150, k = 10$$

$$V = 1800 \cdot 1,14^{10} - 150 \cdot \frac{1-1,14^{10}}{1-1,14} \approx 3800$$

Vastaus: Kaloja on noin 3800 kg.

## HARJOITUSKOE 2

1. Alkuperäinen hinta  $x$

$$0,70 \cdot 0,85 x = 150$$

$$0,595x = 150$$

$$x = \frac{150}{0,595}$$

$$x \approx 252,10$$

Vastaus: 252,10 €

2.

$$\frac{\text{Palkkojen suhde}}{\text{Indeksilukujen suhde}} = \frac{\frac{2135}{2093}}{\frac{1577}{1501}} = 0,9709\dots$$

Reaalipalkka laski  $100\% - 97,099\dots\% \approx 2,9\%$

Vastaus: Reaalipalkka laski 2,9 %

$$3. \quad 2450 \text{ NOK} = \frac{2450}{8,25130} \approx 296,92 \text{ €}$$

$$296,92 \text{ €} = 1,55210 \cdot 296,92 \text{ CHF} \approx 460,85 \text{ CHF}$$

Vastaus: 460,85 Sveitsin frangia

4. Talletukset ovat tilillä 3,4,5,6 ja 7 vuotta

$$K = 600 \cdot 1,024^7 + 600 \cdot 1,024^6 + 600 \cdot 1,024^5 + 600 \cdot 1,024^4 + 600 \cdot 1,024^3 \approx 3\,379,60$$

Vastaus: 3 379,60 €

5. Tasaerälainan hoitomaksut ovat kokoajan yhtäsuuria.

Annuiteetti

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \quad \left| \quad K = 12\,000, q = 1 + \frac{0,0530}{12} = 1,00441\dots, n = 4 \cdot 12 = 48 \right.$$

$$A = 12\,000 \text{ €} \cdot 1,00441\dots^{48} \cdot \frac{1-1,00441\dots}{1-1,00441\dots^{48}} \approx 277,99 \text{ €}$$

Vastaus: Kaikki hoitomaksut ovat 277,99 €.

6. Lasketaan stipendien yhteinen nykyarvo

$$k = K \cdot q^{-t}$$

$$k = 250 \text{ €} \cdot 1,045^{-1} + 250 \text{ €} \cdot 1,045^{-2} + \dots + 250 \text{ €} \cdot 1,045^{-20} = 250 \cdot \frac{1 - (1,045^{-1})^{20}}{1 - 1,045^{-1}} \approx 3\,398,32 \text{ €}$$

Vastaus: Vähintään 3 398,32 €

7. Ostohinta  $1\,500 \cdot 13,58 \text{ €} = 20\,370 \text{ €}$

Välityspalkkio  $0,008 \cdot 20\,370 \text{ €} + 2,00 \text{ €} = 164,96 \text{ €}$

Kulut yhteensä  $20\,370 \text{ €} + 164,96 \text{ €} = 20\,534,96 \text{ €}$

Myyntihinta  $1\,500 \cdot 14,47 \text{ €} = 21\,705 \text{ €}$

Välityspalkkio  $0,008 \cdot 21\,705 + 2,00 = 175,64 \text{ €}$

Myyntivoitto  $21\,705 \text{ €} - 20\,534,96 \text{ €} - 175,64 \text{ €} = 994,40 \text{ €}$

Tuotto veron jälkeen  $0,72 \cdot 994,40 \text{ €} \approx 715,97 \text{ €}$

Vuosikorko, kun korkopäiviä oli  $29+30+30+30+30+30+30+1=240$

$r = kit$

$$715,97 = (20\,534,96 + 175,64) \cdot i \cdot \frac{240}{360} \quad \left| \cdot 360 \right.$$

$$257\,749,20 = 4\,970\,544i \quad \left| : 4\,970\,544 \right.$$

$$i \approx 0,052$$

Vastaus: 5,2 %

8. a)  $3\,704 \text{ €} + (45\,729 \text{ €} - 31\,200 \text{ €}) \cdot 0,28 = 7\,772,12 \text{ €}$

b) Veron määrästä nähdään, että tulot ovat välillä  $31\,200 \text{ €} - 55\,200 \text{ €}$

Verotettava tulo  $x$

$$3\,704 \text{ €} + (x - 31\,200 \text{ €}) \cdot 0,28 = 9\,634 \text{ €}$$

$$3\,704 \text{ €} + 0,28x - 8\,736 \text{ €} = 9\,634 \text{ €}$$

$$0,28x = 14\,666$$

$$x = \frac{14\,666}{0,28}$$

$$x \approx 52\,378,57$$

Vastaus: a) 7 772,12 € b) 52 378,57 €

### HARJOITUSKOE 3

1. vaihtoehto 2

2. vaihtoehto 3

3. vaihtoehto 1

4. vaihtoehto 4

Kolmas termi 0,75, joten  $q = \frac{0,75}{1,5} = 0,5$

Ensimmäinen termi  $2 \cdot 1,5 = 3$

$$S_5 = \frac{3 \cdot (1 - 0,5^5)}{1 - 0,5} = 5,8125$$

5. vaihtoehto 3

Annuiteetti on 738,39 €

Ensimmäinen korko  $0,03 \cdot 4\,000 \text{ €} = 120 \text{ €}$

Ensimmäinen lyhennys  $738,39 \text{ €} - 120 \text{ €} = 618,39 \text{ €}$

6. vaihtoehto 2

Revalvaatiokerroin  $\frac{33,517}{30,417} \approx 1,102$

7. vaihtoehto 2

$$26+30+31+30+31+31+30+17=226$$

8. vaihtoehto 2

Muutoskerroin  $\sqrt[4]{1,024 \cdot 0,984 \cdot 1,037 \cdot 1,046} \approx 1,0225$

9. vaihtoehto 1

Talletukset ja korot yhteensä

$$12 \cdot 60 + 60 \cdot 0,032 \cdot \frac{1}{12} \cdot (1 + 2 + \dots + 12) \approx 732,48 \text{ €}$$

10. vaihtoehto 4

Veroton myyntihinta  $\frac{4,50}{1,22} \approx 3,69$

Verottoman hinnan arvon nousu  $3,69 - 1,80 = 1,89$

$$ALV = 0,22 \cdot 1,89 \text{ €} \approx 0,42 \text{ €}$$

11. vaihtoehto 1

$$\text{Matin talletusten nykyarvo } 800 + 2\,200 \cdot 1,035^{-1} + 1\,000 \cdot 1,035^{-2} \approx 3\,859,11$$

12. vaihtoehto 3

## KOE 1

1. Raakaöljy maksoi 32 \$/barreli ja kuukauden päästä sen hinta oli 45,31 \$/barreli. Mitä vuotuisen korkokannan mukaista vuosikorkoa hinnan nousu vastaa?
2. Sirkun verokortissa oli perusprosenttina 30 ja lisäprosenttina 41,5 sekä rajatulona 2 000 € kuukaudessa. Kuinka paljon Sirkku maksoi ennakkoveroja kuukaudessa, kun hänen tulonsa olivat 2 154 €?
3. Koulu hankkii leasingrahoituksella tietokoneen, jonka hankintahinta on 2 860 €, vuokra-aika 48 kk, eräväli 1 kk ja leasingkerroin 1,68. a) Laske kuukausivuokran suuruus, b) Kuinka paljon koulu maksaa vuokraa koko vuokra-ajalta?
4. Yritys investoi uuteen laitteistoon 234 000 €. Investointi tuotti vuoden kuluttua 46 000 €, kahden vuoden kuluttua 57 000 €, kolmen ja puolen vuoden kuluttua 71 000 € ja neljän vuoden kuluttua 80 000 €. Oliko sijoitus kannattava, kun korkokanta oli 5,3 %?
5. Väinön lainan kuukausiannuiteetti on 114 €. Laina-aika on 7 vuotta ja korkokanta 4,75 %. Laske lainapääoman suuruus.
6. Oskari asettaa tavoitteekseen säästää 3 800 € viidessä vuodessa. Talletukset tapahtuvat vuoden alussa. Kuinka paljon säästötilille on kerralla pantava, jotta tavoite täytyisi? Tilin korko on 2,1 %.
7. Leenan kuukausiansio oli 1 540 € vuonna 1997 ja 2 115 € vuonna 2003. Kuinka monta prosenttia Leenan reaalipalkka oli noussut tai laskenut? Vuoden 1997 indeksi on 1 415 ja vuoden 2003 indeksi on 1 577.
8. Oletetaan, että pankin korkokanta on  $p$  %, kun korko lisätään pääomaan vuosittain. Mikä korkokannan pitäisi olla, jos korko lisättäisiin pääomaan puolivuositain, jotta tulos pysyisi samana? (S99/4b)

KOE 2

1. Laske 30 560 euron annuiteettilainan annuiteetti, kun laina-aika on 6 vuotta ja korkokanta 4,8 %.

2. Pankkitilin alkusaldo oli vuoden alussa 2 130 €. Tilin tapahtumat olivat seuraavat:

Päivämäärä	Tapahtuma
23.2	+1 670,00
17.4	- 820,00
25.6	+2 780,00
14.9	- 567,00
9.11	+ 348,00

Kuinka suuri oli tilille vuoden aikana maksettava korko, kun korko laskettiin käyttäen todellisia korkopäiviä? Vuosikorko oli 1,75 %.

3. Vaatekauppa ostaa paidan 15,30 eurolla (veroton hinta). Mikä tulee paidan myyntihinnaksi kaupassa, kun arvonlisävero on 22 % ja kauppa haluaa 40 % myyntivoittoa, joka lasketaan verottomasta ostohinnasta?

4.

Aika	EUR	USD
8.7.2003	1	1,1326
17.8.2004	1	1,2097

Laske oheisen taulukon avulla.

a) Kuinka monella prosentilla euro on revalvoitunut suhteessa USA:n dollariin?

b) Kuinka monella prosentilla dollari on devalvoitunut suhteessa euroon?

5. Metsän puuston määrä on alussa 580 m<sup>3</sup> ja vuotuinen kasvu 15 %. Metsästä myydään joka vuoden lopussa 75 m<sup>3</sup> puuta. Kuinka paljon puuta on 12 vuoden kuluttua?

6. Kuinka paljon kannatta enintään maksaa 2 400 euron obligaatiosta, jonka laina-aikaa on jäljellä 4 vuotta, korko on 4,25 % ja yleinen korkotaso 3,75 %?

7. Ville tallettaa joka kuukausi 35 €, kuinka paljon tilillä on rahaa 4 vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, kun korko on 2,1 % p.a.?

8. Tuotteen hintaa nostettiin ensin  $p$  % ja alennettiin sitten  $2p$  %. Tällöin saatu hinta oli 94,5 % alkuperäisestä. Määritä  $p$ . (s81/5b)

KOE 3

Seuraavien monivalintatehtävien neljästä vaihtoehdosta vain yksi on oikea.

1. Laskettaessa kuinka monta prosenttia luku 85 on pienempi kuin luku 124, voidaan käyttää lauseketta

1.  $\frac{124}{85} =$
2.  $\frac{124 - 85}{85} =$
3.  $\frac{124 - 85}{124} \cdot 100\% =$
4.  $\frac{85}{124 - 85} \cdot 100\% =$

2. Mikä seuraavista väitteistä ei ole tosi?

1. Arvonlisävero lasketaan verottomasta myyntihinnasta.
2. Jos arvonlisävero on 22 %, niin myyntihinta sisältää arvonlisäveroa  $\left(1 - \frac{1}{1,22}\right) \cdot 100\%$
3. Myyjä saa vähentää arvonlisäverotilityksestä itse maksamansa arvonlisäverot.
4. Jos arvonlisävero on 8 % ja verollinen myyntihinta  $a$ , niin verottoman myyntihinnan saa lausekkeella  $0,92a$ .

3. Mikä seuraavista väitteistä on tosi?

1. Revalvaatio tarkoittaa hintojen nousua.
2. Devalvaatio tarkoittaa valuutan ulkoisen arvon nousua.
3. Koska euron arvo dollareina oli ensin 1,0956 ja myöhemmin 1,2642, niin dollari devalvoitui euroon nähden.
4. Devalvaatio laskee tuontitavaroiden hintoja.

4. Aritmeettisen lukujonon kahdeksantoista ensimmäisen termin summa on  $-215,1$  ja ensimmäinen termi on  $2,5$ .

1. Jonon viides termi on  $-5,6$ .
2. Peräkkäisten termien erotus on  $-3$ .
3. Tällaista jonoa ei ole olemassa.
4. Jonon sadas termi on  $-165,8$ .

5. Neljän vuoden annuiteettilainan lyhennykset ovat puolen vuoden välein. Korkokanta on 4,5 % p.a. ja lainapääoma 12 000 €.

1. Lainaa on jäljellä 1,5 vuoden kuluttua 7 520,76 €.
2. Ensimmäinen ja viimeinen hoitomaksu on 1 695,82 €.
3. Ensimmäisen hoitomaksun lyhennyksen osuus on 1385,82€.
4. Ensimmäinen korko on 272 €.

6. Elinkustannusindeksi oli alussa 1 390 ja viiden vuoden kuluttua 1 452.

1. Kokonaisinflaatio oli tuona aikana 4,6 %
2. Hinnat laskivat viidessä vuodessa 4,46 %.
3. Rahan ostovoima laski 4,27 %.
4. Keskimääräinen vuosi-inflaatio oli 0,892 %.

7. Oona ottaa 15.4 luoton, joka sovitaan maksettavaksi takaisin 7.11. Luoton todellisia korkopäiviä asti on

1. 209
2. 210
3. 211
4. 204

8. Hinta nousi ensin 35 % ja laski sitten 24 % ja laski vielä toisen kerran 40 %.

1. Lopullinen hinta oli 61,56 % pienempi kuin alkuperäinen.
2. Hinta laski yhteensä 29 % alkuperäiseen nähden.
3. Lopullinen hinta oli 38,44 % pienempi kuin alkuperäinen.
4. Kauppiaan tappio oli 29 %.

9. Jasmiini tallettaa puolen vuoden välein 3 vuoden ajan 350 € tilille, jonka korko on 1,8 % p.a. Kolmen vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta tilillä on

1. 2 166,89 €
2. 2 112,60 €
3. 2 138,03 €
4. 2 147,82 €

10.

1. Rahastosijoituksen tuotto-osuus on sama kuin joukkovelkakirjalaina.
2. Jos leasingkerroin on 2,925 ja hankintahinta on 17 600 €, sekä vuokra-aika 36 kk, niin leasingvuokratulot ovat yhteensä 18 532,80 €.
3. Diskonttaus tarkoittaa rahan ostovoiman alentumista.
4. Perittävän isovanhemmat joutuvat maksamaan enemmän perintöveroa kuin perittävän sisaret.

11. Laite-investoinnin arvioidaan tuottavan vuoden kuluttua 13 000 €, kahden vuoden kuluttua 17 000 € ja kolmen vuoden kuluttua 23 000 €. Laitteen jäännösarvo arvioidaan olevan kolmen vuoden kuluttua 5 000 €. Korkokanta on 4,6 % p.a.

1. Laitteen ja tuottojen nykyarvo hankintahetkellä on 52 531,96 €.
2. Laitteen ja tuottojen nykyarvo kolmen vuoden kuluttua hankintahetkestä on 60 050,51 €.
3. Jäännösarvon hankintahetkeen diskontattu nykyarvo on 4 568,93 €.
4. Laitteesta kannattaa hankintahetkellä maksaa enintään 52 431,96 €.

12.

1. Varallisuusvero ei ole progressiivinen.
2. Ennakon pidätys tehdään marginaaliveroprosentin mukaan.
3. Valtion vero on aina suurempi kuin kunnallisvero.
4. Lähdevero on tulon lähteellä perittävä vero.