K1

a)

$$(u \circ s)(-2) = u(s(-2)) \qquad s(x) = x^3 + 7$$

$$= u((-2)^3 + 7)$$

$$= u(-1) \qquad u(x) = 2x^3$$

$$= 2(-1)^3$$

$$= -2$$

b)

$$(u \circ s)(-2) = u(s(-2)) \qquad s(x) = \frac{4}{x+3}$$

$$= u\left(\frac{4}{(-2)+3}\right)$$

$$= u(4) \qquad u(x) = |1-x|$$

$$= |1-4| = 3$$

Vastaus a) –2
b) 3

K2

a) On määritettävä $(u \circ s)(x) = u(s(x))$, kun $s(x) = 3x + 1$ ja $u(x) = 4x^2 - x$.

$$(u \circ s)(x) = u(s(x)) \qquad s(x) = 3x + 1$$

$$= u(3x + 1) \qquad u(x) = 4x^2 - x$$

$$= 4(3x + 1)^2 - (3x + 1) \qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= 4((3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2) - 3x - 1$$

$$= 36x^2 + 24x + 4 - 3x - 1$$

$$= 36x^2 + 21x + 3$$

b) On määritettävä $(u \circ s)(x) = u(s(x))$, kun $s(x) = \dfrac{4}{x-5}$ ja

$u(x) = \dfrac{2}{x}$.

$$(u \circ s)(x) = u(s(x))$$

$$s(x) = \frac{4}{x-5}$$

$$= u\left(\frac{4}{x-5}\right)$$

$$u(x) = \frac{2}{x}$$

$$= \frac{2}{\frac{4}{x-5}}$$

$$= \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{x-5}{\underset{2}{\cancel{4}}}$$

$$= \frac{x-5}{2}$$

Vastaus a) $36x^2 + 21x + 3$

b) $\dfrac{x-5}{2}$

K3

a) Kun lasketaan funktion $h(x) = (-3x^2 + 1)^2$ arvo, voidaan ensin laskea funktion $s(x) = -3x^2 + 1$ arvo, minkä jälkeen lasketaan $(s(x))^2$. Tällöin $u(x) = x^2$.

Siis sisäfunktio on $s(x) = -3x^2 + 1$ ja ulkofunktio $u(x) = x^2$.

b) Kun lasketaan funktion $h(x) = \sqrt{|x^2 - 9|}$ arvo, voidaan ensin laskea funktion $s(x) = |x^2 - 9|$ arvo, minkä jälkeen lasketaan $\sqrt{s(x)}$. Tällöin $u(x) = \sqrt{x}$.

Siis sisäfunktio on $s(x) = |x^2 - 9|$ ja ulkofunktio $u(x) = \sqrt{x}$.

Vastaus a) $u(x) = x^2$ ja $s(x) = -3x^2 + 1$
b) $u(x) = \sqrt{x}$ ja $s(x) = |x^2 - 9|$

K4

a) Sisäfunktio $s(x) = x^2 - 7$ on määritelty kaikilla x.

Ulkofunktio $u(x) = \dfrac{x}{x-2}$ on määritelty, kun nimittäjä $x - 2 \neq 0$ eli kun $x \neq 2$.

Yhdistetty funktio $(u \circ s)(x) = u(s(x))$ on siis määritelty niillä muuttujan x arvoilla, joilla sisäfunktion arvo $s(x)$ on eri suuri kuin 2.

$$s(x) \neq 2$$

$$x^2 - 7 \neq 2$$

$$x^2 \neq 9$$

$$x \neq \pm 3$$

Funktion $u \circ s$ määrittelyehto on $x \neq \pm 3$.

b) Sisäfunktio $s(x) = 4x + 5$ on määritelty kaikilla x.

Ulkofunktio $u(x) = \sqrt{x+1}$ on määritelty, kun juurrettava $x + 1 \geq 0$ eli kun $x \geq -1$.

Yhdistetty funktio $(u \circ s)(x) = u(s(x))$ on siis määritelty niillä muuttujan x arvoilla, joilla sisäfunktion arvo $s(x)$ on suurempi tai yhtä suuri kuin -1.

$$s(x) \geq -1$$

$$4x + 5 \geq -1$$

$$4x \geq -6 \quad |:4$$

$$x \geq -\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}$$

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

Funktion $u \circ s$ määrittelyehto on siten $x \geq -\frac{3}{2}$.

Vastaus a) $x \neq \pm 3$

b) $x \geq -\frac{3}{2}$

K5

Muodostetaan yhdistettyjen funktioiden $g \circ f$ ja $f \circ g$ lausekkeet, kun $f(x) = 2 - x$ ja $g(x) = x^2 - 9$.

$$\boxed{\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2-x) \\ &= (2-x)^2 - 9 \\ &= 4 - 4x + x^2 - 9 \\ &= x^2 - 4x - 5\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 9) \\ &= 2 - (x^2 - 9) \\ &= -x^2 + 11\end{aligned}}$$

Yhdistettyjen funktioiden lausekkeet voidaan muodostaa myös laskimella.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$$

$$x^2 - 4x - 5 = -x^2 + 11$$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$x = -2 \text{ tai } x = 4$$

Vastaus $x = -2$ tai $x = 4$

K6

a) Funktio $f(x) = (-3x^2 + x)^4$ voidaan tulkita yhdistetyksi funktioksi $f(x) = u(s(x))$, missä $u(x) = x^4$ ja $s(x) = -3x^2 + x$.

Derivoidaan ketjusäännöllä.

$$f'(x) = \underbrace{4(-3x^2 + x)^3}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{\mathrm{D}(-3x^2 + x)}_{s'(x)}$$

Ketjusääntö $\mathrm{D}u(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$

$$= 4(-3x^2 + x)^3 \cdot (-6x + 1)$$

$$= 4(-6x + 1)(-3x^2 + x)^3$$

b) Funktio $g(x)=\left(\dfrac{1}{3x-7}\right)^5$ voidaan tulkita yhdistetyksi

funktioksi $g(x)=u(s(x))$, missä $u(x)=x^5$ ja

$s(x)=\dfrac{1}{3x-7}$ määrittelyehto: $3x-7\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{7}{3}$.

Derivoidaan ketjusäännöllä.

$$g'(x)=\underbrace{5\left(\frac{1}{3x-7}\right)^4}_{u'(s(x))}\cdot \underbrace{\mathrm{D}\left(\frac{1}{3x-7}\right)}_{s'(x)}$$

Ketjusääntö $\mathrm{D}u(s(x))=u'(s(x))\cdot s'(x)$

$$=5\left(\frac{1}{3x-7}\right)^4\cdot \mathrm{D}((3x-7)^{-1})$$

$$=5\left(\frac{1}{3x-7}\right)^4\cdot(-1)\cdot(3x-7)^{-2}\cdot \mathrm{D}(3x-7)$$

$$=-15\cdot\frac{1}{(3x-7)^4}\cdot\frac{1}{(3x-7)^2}$$

$$=-\frac{15}{(3x-7)^6}$$

Vastaus a) $4(-6x+1)(-3x^2+x)^3$

b) $-\dfrac{15}{(3x-7)^6}$, kun $x\neq\dfrac{7}{3}$

K7

a) Derivoidaan funktio $f(x)=2x^4(x^2+2)^3$ käyttämällä tulon derivointisääntöä ja ketjusääntöä.

$$f'(x)=\mathrm{D}\left(2x^4(x^2+2)^3\right) \qquad \mathrm{D}(f\cdot g)=f'\cdot g+f\cdot g'$$

$$=\mathrm{D}(2x^4)\cdot(x^2+2)^3+2x^4\cdot\mathrm{D}((x^2+2)^3) \qquad \mathrm{D}u(s(x))=u'(s(x))\cdot s'(x)$$

$$=8x^3(x^2+2)^3+2x^4\cdot\underbrace{3(x^2+2)^2}_{u'(s(x))}\cdot\underbrace{\mathrm{D}(x^2+2)}_{s'(x)}$$

$$=8x^3(x^2+2)^3+2x^4\cdot 3(x^2+2)^2\cdot 2x$$

$$=8x^3(x^2+2)^3+12x^5(x^2+2)^2 \qquad \text{Erotetaan yhteinen tekijä.}$$

$$=4x^3(x^2+2)^2\cdot 2\cdot(x^2+2)+4x^3(x^2+2)^2\cdot 3x^2$$

$$=4x^3(x^2+2)^2(2(x^2+2)+3x^2)$$

$$=4x^3(x^2+2)^2(2x^2+4+3x^2)$$

$$=4x^3(x^2+2)^2(5x^2+4)$$

$$=4x^3(5x^2+4)(x^2+2)^2$$

b) Selvitetään funktion $g(x)=\dfrac{(2x+1)^6}{x^2+1}$ määrittelyehto ratkaisemalla nimittäjän nollakohdat.

$$x^2+1=0$$

$$x^2=-1$$

Ei ratkaisua.

Funktio on määritelty kaikilla x.

Derivoidaan funktio g käyttäen ketjusääntöä ja osamäärän derivointisääntöä.

$$g'(x)=\mathrm{D}\frac{(2x+1)^6}{x^2+1} \qquad \mathrm{D}\frac{f}{g}=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

$$=\frac{\mathrm{D}((2x+1)^6)\cdot(x^2+1)-(2x+1)^6\cdot\mathrm{D}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \qquad \mathrm{D}u(s(x))=u'(s(x))\cdot s'(x)$$

$$=\frac{6(2x+1)^5\cdot 2\cdot(x^2+1)-2x(2x+1)^6}{(x^2+1)^2}$$

Erotetaan yhteinen tekijä.

$$=\frac{2(2x+1)^5\cdot(6x^2+6)-2(2x+1)^5\cdot(2x^2+x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2(2x+1)^5(6x^2+6-2x^2-x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2(4x^2-x+6)(2x+1)^5}{(x^2+1)^2}$$

Vastaus a) $4x^3(5x^2+4)(x^2+2)^2$

b) $\dfrac{2(4x^2-x+6)(2x+1)^5}{(x^2+1)^2}$

K8

Derivoidaan funktio $f(x) = (x^3 - 6x^2)^4$. Derivointi voidaan suorittaa myös laskimella.

$$f'(x) = \mathrm{D}((x^3 - 6x^2)^4) \qquad \mathrm{D}u(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$= \underbrace{4(x^3 - 6x^2)^3}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{\mathrm{D}(x^3 - 6x^2)}_{s'(x)}$$

$$= 4(x^3 - 6x^2)^3(3x^2 - 12x)$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat laskimella..

$$4(x^3 - 6x^2)^3(3x^2 - 12x) = 0$$

$x = 0$ tai $x = 4$ tai $x = 6$

Laaditaan funktion f kulkukaavio.

		0		4		6	
f'	–		+		–		+
f	↘		↗		↘		↗
		min		max		min	

x	$f'(x)$	merkki
–1	–20580	–
1	4500	+
5	–937500	–
7	29647548	+

Kulkukaavion perusteella funktiolla f on maksimiarvo $f(4) = 1048576$ sekä minimiarvot $f(0) = 0$ ja $f(6) = 0$.

Vastaus minimiarvot $f(0) = 0$ ja $f(6) = 0$, maksimiarvo $f(4) = 1048576$

K9

a) $456° = 360° + 96°$

Kulman loppukylki on II neljänneksessä.

b) Kulman loppukylki on II neljänneksessä.

c) $-6\frac{7}{15}\pi = -3\cdot(2\pi) - \frac{7\pi}{15}$

Kulman loppukylki on IV neljänneksessä.

Vastaus
a) II neljänneksessä
b) II neljänneksessä
c) IV neljänneksessä

K10

$180° = \pi$ rad, joten $1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad

a) $15° = 15 \cdot 1° = \cancel{15}^{1} \cdot \dfrac{\pi}{\cancel{180}_{12}}$ rad $= \dfrac{\pi}{12}$ rad

b) $-75° = -75 \cdot 1° = \cancel{-75}^{-5} \cdot \dfrac{\pi}{\cancel{180}_{12}}$ rad $= -\dfrac{5\pi}{12}$ rad

c) $21{,}7° = 21{,}7 \cdot 1° = 21{,}7 \cdot \dfrac{\pi}{180}$ rad $= 0{,}3787...$ rad $\approx 0{,}379$ rad

Vastaus

a) $\dfrac{\pi}{12}$

b) $-\dfrac{5\pi}{12}$

c) $0{,}379$

K11

$\pi \text{ rad} = 180°$ ja $1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi}$

a) $\dfrac{12\pi}{9} \text{ rad} = \dfrac{12}{9} \cdot \pi \text{ rad} = \dfrac{12}{9} \cdot 180° = 240°$

b) $-3\pi \text{ rad} = -3 \cdot \pi \text{ rad} = -3 \cdot 180° = -540°$

c) $5{,}290 \text{ rad} = 5{,}290 \cdot 1 \text{ rad} = 5{,}290 \cdot \dfrac{180°}{\pi} = 303{,}09...° \approx 303{,}1°$

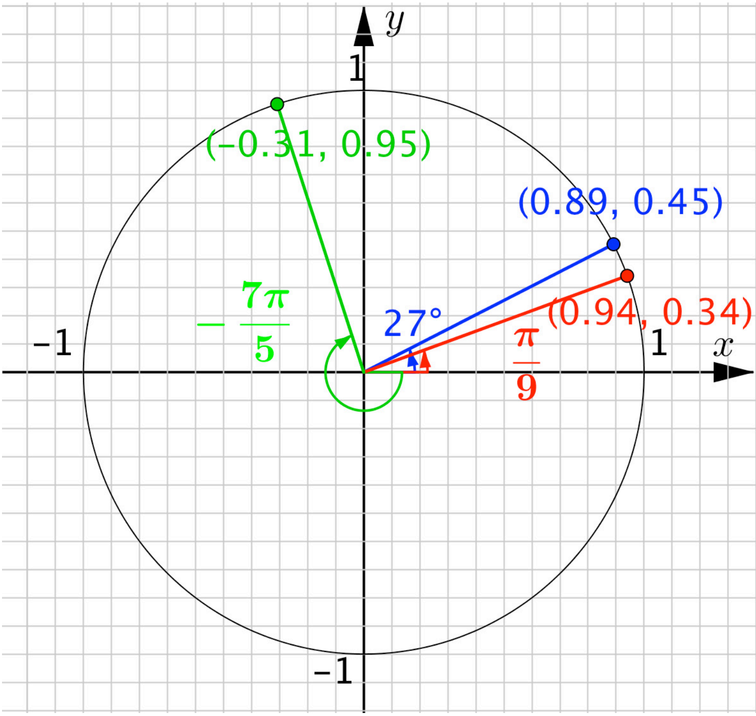
Vastaus a) $240°$

b) $-540°$

c) $303{,}1°$

K12

Piirretään yksikköympyrä geometriaohjelmalla ja määritetään annettujen kulmien kehäpisteiden koordinaatit 2 desimaalin tarkkuudella.



a) Kulman $27°$ kehäpiste on $(0{,}89;\ 0{,}45)$

b) Kulman $\dfrac{\pi}{9}$ kehäpiste on $(0{,}94;\ 0{,}34)$

c) Kulman $\dfrac{-7\pi}{5}$ kehäpiste on $(-0{,}31;\ 0{,}95)$

K13

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$ $\qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$$= -\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c)

$$\cos\frac{19\pi}{6}=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+2\cdot 2\pi\right) \quad \cos(\alpha+n\cdot 2\pi)=\cos\alpha$$

$$=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) \quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vastaus

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

K14

a) Muokataan lauseke muotoon, jossa esiintyy vain siniä tai kosinia.

$$\frac{\sin 20^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - 70^\circ)}{\cos 70^\circ} \qquad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$= \frac{\cos 70^\circ}{\cos 70^\circ} = 1$$

b) Muokataan lauseke muotoon, jossa esiintyy vain siniä tai kosinia.

$$\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{13\pi}{10}} = \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right)} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)} \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{4\pi}{5}} \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{-\cos\frac{\pi}{5}} = -1$$

Vastaus a) 1 b) -1

K15

a) Valitaan kaksinkertaisen kosinin kaavasta muoto, jossa esiintyy ainoastaan kosini.

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1\\ &= 2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}\\ &= 2\cdot\frac{16}{25} - 1\\ &= \frac{32}{25} - 1\\ &= \frac{7}{25}\end{aligned}$$

b) Ratkaistaan $\sin\alpha$ trigonometrian peruskaavan avulla.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = 1 - (\cos\alpha)^2 \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{9}{25}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \quad \text{tai} \quad \sin\alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

Koska ei tiedetä, missä neljänneksessä kulma sijaitsee, saadaan kaksi mahdollista arvoa $\sin 2\alpha$:lle.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}$$

$$= \frac{24}{25}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4}{5}$$

$$= -\frac{24}{25}$$

Vastaus a) $\cos 2\alpha = \frac{7}{18}$ b) $\sin 2\alpha = \pm\frac{24}{25}$

K16

Ratkaistaan kaksinkertaisen kosinin kaavasta sini.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

Koska $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$, niin $\sin\alpha < 0$.

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \qquad \cos 2\alpha = -\frac{5}{9}$$

$$= -\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{5}{9}\right)}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{14}{18}}$$

$$= -\sqrt{\frac{7}{9}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Vastaus $\qquad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

K17

a) Selvitetään, kuinka monta $360°$:n jaksoa kulma sisältää.

$$1455° = 15° + 1440° = 15° + 4 \cdot 360°$$

Kulmien $1455°$ ja $15°$ kehäpisteet ovat samat.

b) Selvitetään, kuinka monta 2π :n jaksoa kulma sisältää.

$$2017\pi = \pi + 2016\pi = \pi + 1008 \cdot 2\pi$$

Kulmien 2017π ja π kehäpisteet ovat samat.

c) Selvitetään, kuinka monta 2π :n jaksoa kulma sisältää.

$$-\frac{58\pi}{13} = -4\frac{6}{13}\pi = -(6\pi - 1\frac{7}{13}\pi) = \frac{20}{13}\pi - 3 \cdot 2\pi$$

Kulmien $-\frac{58\pi}{13}$ ja $\frac{20\pi}{13}$ kehäpisteet ovat samat.

Vastaus
a) $15°$
b) π
c) $\frac{20\pi}{13}$

K18

Lausekkeen sieventämisessä hyödynnetään taulukkokirjassa olevia trigonometristen funktioiden tarkkoja arvoja sekä kosinin ominaisuuksia.

$$\frac{\sin\frac{5\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\cos(-\frac{5}{3})}=\frac{\sin\frac{5\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\cos\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}+2=\frac{2\sqrt{3}}{3}+2$$

Vastaus $\quad \frac{2}{\sqrt{3}}+2=\frac{2\sqrt{3}}{3}+2$

K19

a)

$\sin x = 0,34$ Laskimella saadaan $x_0 = \sin^{-1} 0,34 = 0,346...$.

$x = 0,346... + n \cdot 2\pi$ Kulmaan x_0 lisätään täyden kulman monikerta.

$x \approx 0,35 + n \cdot 2\pi$

tai

$x = \pi - 0,346... + n \cdot 2\pi$ Suplementtikulmaan $\pi - x_0$ lisätään täyden kulman monikerta.

$x = 2,794... + n \cdot 2\pi$

$x \approx 2,79 + n \cdot 2\pi,$ missä n on kokonaisluku.

b)

$\cos x = -0,12$ Laskimella saadaan $x_0 = \cos^{-1}(-0,12) = 1,691...$.

$x = 1,691... + n \cdot 2\pi$ Kulmaan x_0 lisätään täyden kulman monikerta.

$x \approx 1,69 + n \cdot 2\pi$

tai

$x = -1,691... + n \cdot 2\pi$ Vastakulmaan $-x_0$ lisätään täyden kulman monikerta.

$x \approx -1,69 + n \cdot 2\pi,$ missä n on kokonaisluku.

c) Yhtälön määrittelyehto on $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$.

$\tan x = 7$ Laskimella saadaan $x_0 = \tan^{-1} 7 = 1,428...$.

$x = 1,428... + n \cdot \pi$ Kulmaan x_0 lisätään kulman π monikerta.

$x \approx 1,43 + n \cdot \pi$,

missä n on kokonaisluku.

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.

Vastaus
a) $x \approx 0,35 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 2,79 + n \cdot 2\pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$
b) $x \approx 1,69 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx -1,69 + n \cdot 2\pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$
c) $x \approx 1,43 + n \cdot \pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$

K20

a)

$\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$

$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ Taulukkokirjasta nähdään, että $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$x = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ Kulmaan $\dfrac{\pi}{4}$ lisätään täyden kulman monikerta.

tai

$x = -\dfrac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi,$

Vastakulmaan $-\dfrac{\pi}{4}$ lisätään täyden kulman monikerta.

missä n on kokonaisluku.

b)
$2\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ Taulukkokirjasta nähdään, että $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

$x = \frac{7\pi}{6} + n\cdot 2\pi$ Kulmaan $\frac{7\pi}{6}$ lisätään täyden kulman monikerta.

tai

$x = \pi - \frac{7\pi}{6} + n\cdot 2\pi$

Suplementtikulmaan $\pi - \frac{7\pi}{6}$ lisätään täyden kulman monikerta.

$x = -\frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi,$ missä n on kokonaisluku.

c)
$\tan x + 1 = 0$

$\tan x = -1$ Taulukkokirjasta nähdään, että $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$.

$x = \frac{3\pi}{4} + n\cdot\pi,$ Kulmaan $\frac{3\pi}{4}$ lisätään π:n monikerta.

missä n on kokonaisluku.

Vastaus a) $x = \frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{7\pi}{6} + n\cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{3\pi}{4} + n\cdot\pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$

K21

a)

$$\sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \big|: 2$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi, \qquad \text{missä } n \text{ on kokonaisluku.}$$

b)

$$\cos 6x - 1 = 0$$

$$\cos 6x = 1$$

$$6x = n \cdot 2\pi \quad \big|: 6$$

$$6 = n \cdot \frac{\pi}{3},$$

missä n on kokonaisluku.

Vastaus a) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$

b) $x = n \cdot \frac{\pi}{3}$, missä $n \in \mathbf{Z}$

K22

Muokataan yhtälöä.

$$\sin x - 5\cos x = 0$$

$$\sin x = 5\cos x \quad \left|: \cos x \ (\neq 0)\right.$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 5 \qquad \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\tan x = 5$$

Yhtälön määrittelyehto on $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\tan x = 5$$

$$x = 1,373.. + n \cdot \pi$$

$$x \approx 1,37 + n \cdot \pi,$$

missä n on kokonaisluku.

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.

Vastaus $\quad x \approx 1,37 + n \cdot \pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$.

K23

$$2\cos(3x+\frac{\pi}{3})=\sqrt{3} \quad |:2$$

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Taulukkokirjasta nähdään, että $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$3x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi$$

Kulmaan $\frac{\pi}{6}$ lisätään täyden kulman monikerta.

$$3x=\frac{\pi}{6}-{}^{2)}\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi$$

$$3x=-\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi \quad |:3$$

$$x=-\frac{\pi}{18}+n\cdot\frac{2\pi}{3}$$

tai

$$3x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi$$

Vastakulmaan $-\frac{\pi}{6}$ lisätään täyden kulman monikerta.

$$3x=-\frac{\pi}{6}-{}^{2)}\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi$$

$$3x=-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi \quad |:3$$

$$x=-\frac{\pi}{6}+n\cdot\frac{2\pi}{3},$$ missä n on kokonaisluku.

Vastaus $x=-\frac{\pi}{18}+n\cdot\frac{2\pi}{3}$ tai $x=-\frac{\pi}{6}+n\cdot\frac{2\pi}{3}$, missä $n\in\mathbf{Z}$.

K24

Kulmalla $2x-\frac{\pi}{2}$ ja kulmalla x on yhtä suuri sini täsmälleen silloin, kun kulman $2x-\frac{\pi}{2}$ kehäpiste on sama kuin kulman x kehäpiste tai sen suplementtikulman $\pi - x$ kehäpiste.

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$$

$$2x-\frac{\pi}{2}=x+n\cdot 2\pi \qquad \text{tai} \qquad 2x-\frac{\pi}{2}=\pi-x+n\cdot 2\pi$$

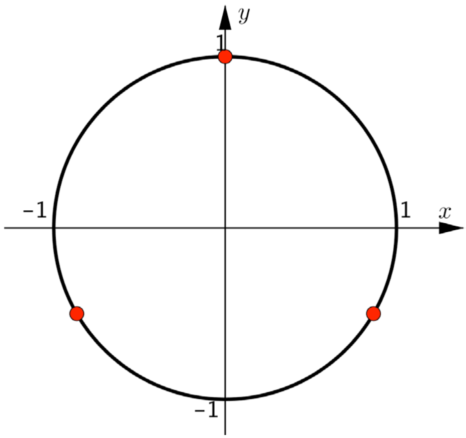
$$2x-x=\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi \qquad\qquad 2x+x=\pi+\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi \qquad\qquad 3x=\frac{3\pi}{2}+n\cdot 2\pi \quad |:3$$

$$x=\frac{\pi}{2}+n\cdot\frac{2\pi}{3},$$

missä n on kokonaisluku.

Vastaukset voidaan yhdistää yhdeksi lausekkeeksi $x=\frac{\pi}{2}+n\cdot\frac{2\pi}{3}$, missä n on kokonaisluku.



Vastaus $x=\frac{\pi}{2}+n\cdot\frac{2\pi}{3}$, missä $n\in\mathbf{Z}$.

K25

Kulmalla $2x$ ja kulmalla $4x$ on yhtä suuri kosini täsmälleen silloin, kun kulman $2x$ kehäpiste on sama kuin kulman $4x$ kehäpiste tai sen vastakulman $-4x$ kehäpiste.

$$\cos 2x = \cos 4x$$

$$2x = 4x + n \cdot 2\pi \qquad \text{tai} \qquad 2x = -4x + n \cdot 2\pi$$

$$2x - 4x = n \cdot 2\pi \qquad\qquad 2x + 4x = n \cdot 2\pi$$

$$-2x = n \cdot 2\pi \quad |:(-2) \qquad\qquad 6x = n \cdot 2\pi \quad |:6$$

$$x = -n \cdot \pi \qquad\qquad x = n \cdot \frac{\pi}{3},$$

$$x = n \cdot \pi$$

missä n on kokonaisluku.

Ratkaisut voidaan yhdistää lausekkeeksi $x = n \cdot \frac{\pi}{3}$, missä n on kokonaisluku.

Etsitään juuret, jotka ovat välillä $[-\pi, 0]$.

n	$x = n \cdot \dfrac{\pi}{3}$
-4	$x = -4 \cdot \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{4\pi}{3} < \pi$
-3	$x = -3 \cdot \dfrac{\pi}{3} = -\pi$
-2	$x = -2 \cdot \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$
-1	$x = -\dfrac{\pi}{3}$
0	$x = 0$
1	$x = \dfrac{\pi}{3} > 0$

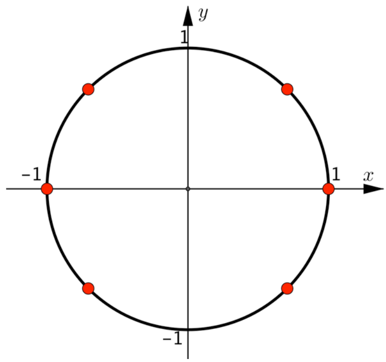
Vastaus $\quad -\pi,\ -\dfrac{2\pi}{3},\ -\dfrac{\pi}{3}$ ja 0

K26

Ratkaistaan yhtälön määrittelyehto.

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \qquad \text{ja} \qquad \frac{\pi}{2} - x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \qquad\qquad x \neq n \cdot \pi$$



Ratkaistaan yhtälö.

$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

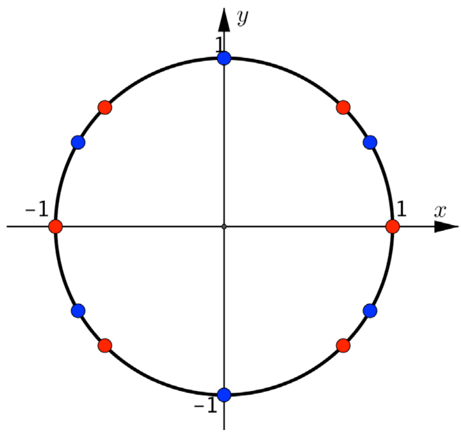
$$2x = \frac{\pi}{2} - x + n \cdot \pi$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad |: 3$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3},$$

missä n on kokonaisluku.

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.



Vastaus $\quad x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}$, missä $n \in \mathbf{Z}$.

K27

a)

$$\cos x \sin x + \cos x = 0$$ Erotetaan yhteinen tekijä.

$$\cos x(\sin x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

tai

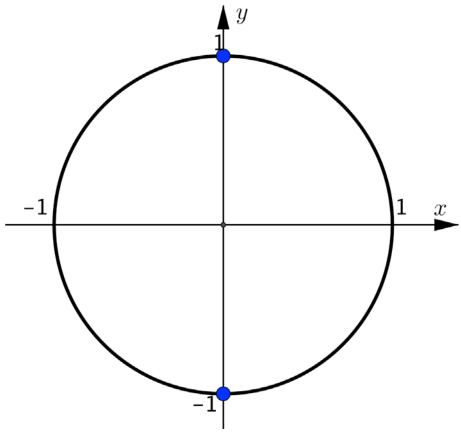
$$\sin x + 1 = 0$$

$$\sin x = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi, \qquad \text{missä } n \in \mathbf{Z}.$$

Kulmien kehäpisteet sijaitsevat π:n välein. Siten ratkaisuparvet voidaan yhdistää yhdeksi lausekkeeksi

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, missä n on kokonaisluku.



b)

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

$$2(\cos x)^2 + 3\cos x + 1 = 0$$ Sijoitetaan $\cos x = t$.

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$ Ratkaistaan muuttuja t.

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = -\frac{3 \pm 1}{4}$$

$$t = -\frac{3+1}{4} = -1 \quad \text{tai} \quad t = -\frac{3-1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Koska $\cos x = t$, saadaan kaksi yhtälöä. Ratkaistaan x.

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + n \cdot 2\pi, \quad \text{missä } n \in \mathbf{Z}$$

tai

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

tai

$$x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \quad \text{missä } n \in \mathbf{Z}.$$

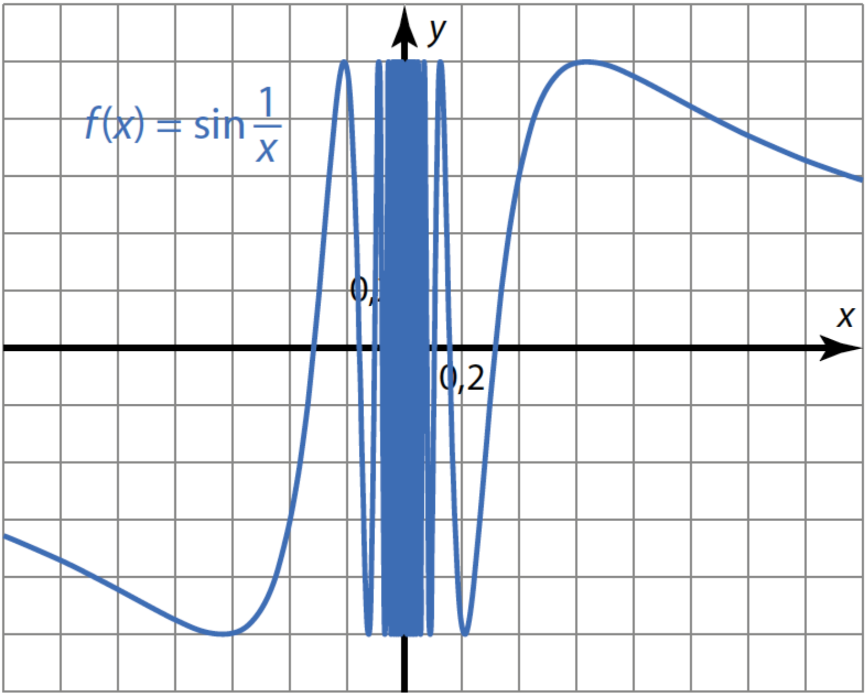
Vastaus a) $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$.

b) $x = \pi + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

tai $x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$.

K28

a)



b)

$$\sin\frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x} = n \cdot \pi \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$x \cdot n \cdot \pi = 1 \qquad |:(n \cdot \pi) \ \ (n \neq 0)$$

$$x = \frac{1}{n \cdot \pi}, \ \text{ missä } \ n \in \mathbf{Z}, \ n \neq 0$$

c) Ratkaistaan kaksoisepäyhtälö.

$$0,001 \le \frac{1}{n \cdot \pi} \le 0,01$$

$$31,830... \le n \le 318,30...$$

Välillä olevat nollakohdat ovat n:n kokonaislukuarvojen 32 ja 318 välissä.

Nollakohtia on siten 318 – 32 + 1 = 287 kappaletta.

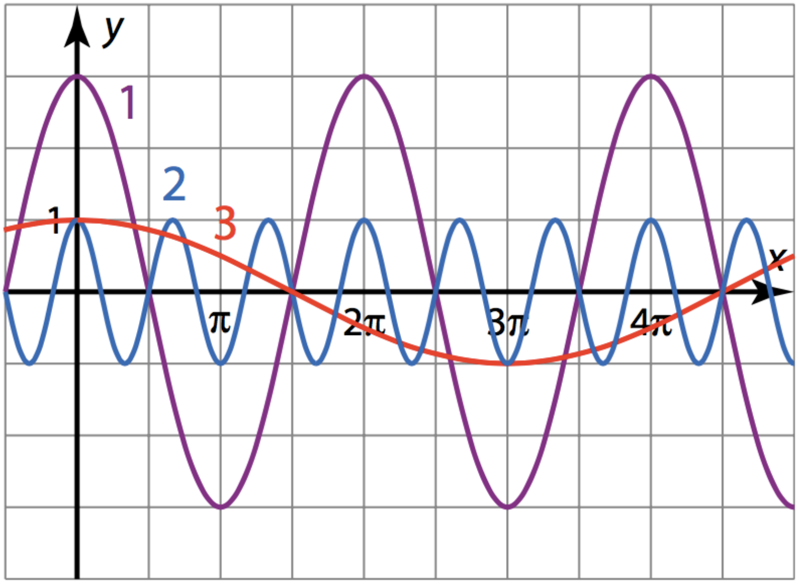
Vastaus b) $x = \frac{1}{n \cdot \pi}$, missä $n \in \mathbf{Z}$, $n \ne 0$.

c) 287 nollakohtaa

K29

Huomaa, että tehtävässä ei vaadittu perusteluja.

a)

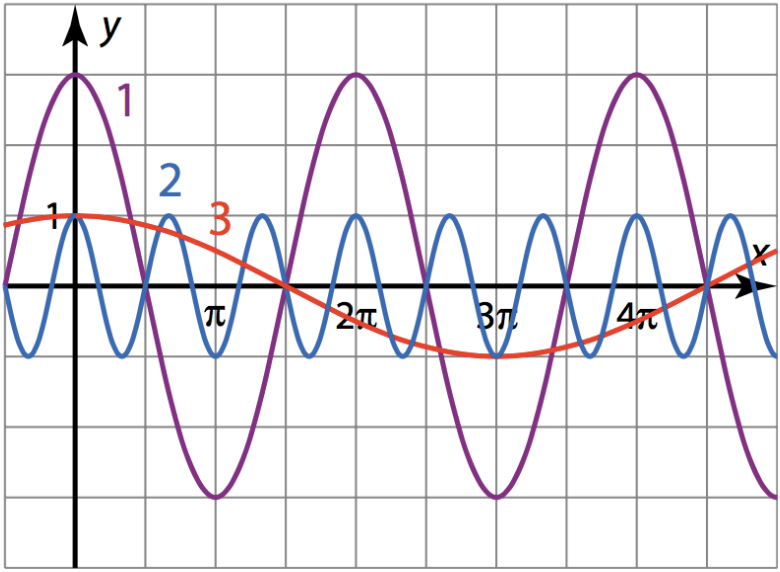


Funktion $\cos 3x$ arvojoukko on [–1, 1].

Funktion $\cos 3x$ perusjakso on kolmasosa $\cos x$ perusjaksoon verrattuna eli $\dfrac{2\pi}{3}$.

Funktion $\cos 3x$ kuvaaja on 2.

b)



Funktion $3\cos x$ arvojoukko on

$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad |\cdot 3$

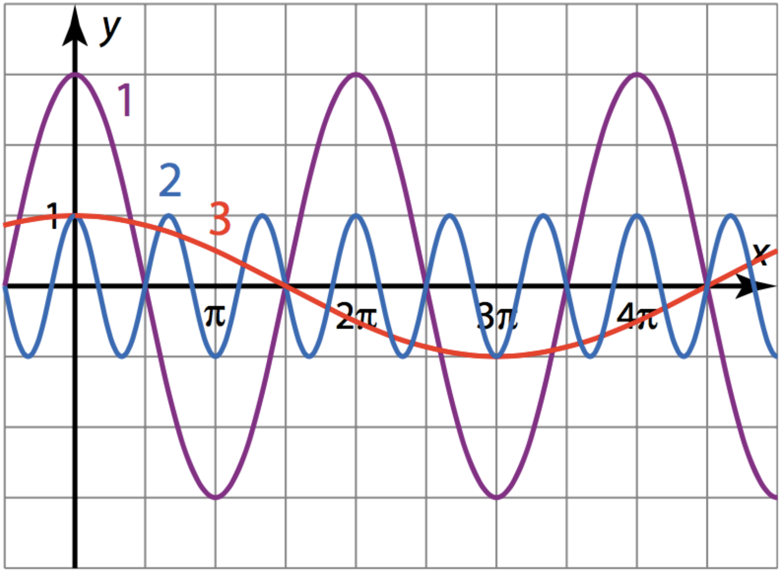
$-3 \leq 2\cos x \leq 3.$

Eli funktion arvot ovat välillä $[-3, 3]$.

Funktion $3\cos x$ perusjakso on sama kuin funktiolla $\cos x$ eli 2π.

Funktion $3\cos x$ kuvaaja on 1.

c)



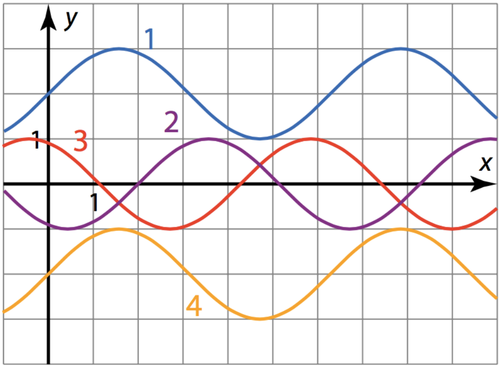
Funktion $\cos\frac{1}{3}x$ arvojoukko on $[-1, 1]$.

Funktion $\cos\frac{1}{3}x$ perusjakso on kolminkertainen funktioon $\cos x$ verrattuna eli 6π.

Funktion $\cos\frac{1}{3}x$ kuvaaja on 3.

Vastaus a) 2 b) 1 c) 3

K30



a) Funktion $\sin(x-2)$ vaakasuuntainen siirto on 2 yksikköä oikealle.

Funktion $\sin(x-2)$ kuvaaja on 2.

b) Funktion $\sin(x+2)$ vaakasuuntainen siirto on 2 yksikköä vasemmalle.

Funktion $\sin(x+2)$ kuvaaja on 3.

c) Funktion $\sin x+2$ pystysuuntainen siirto on 2 yksikköä ylöspäin.

Funktion $\sin x+2$ kuvaaja on 1

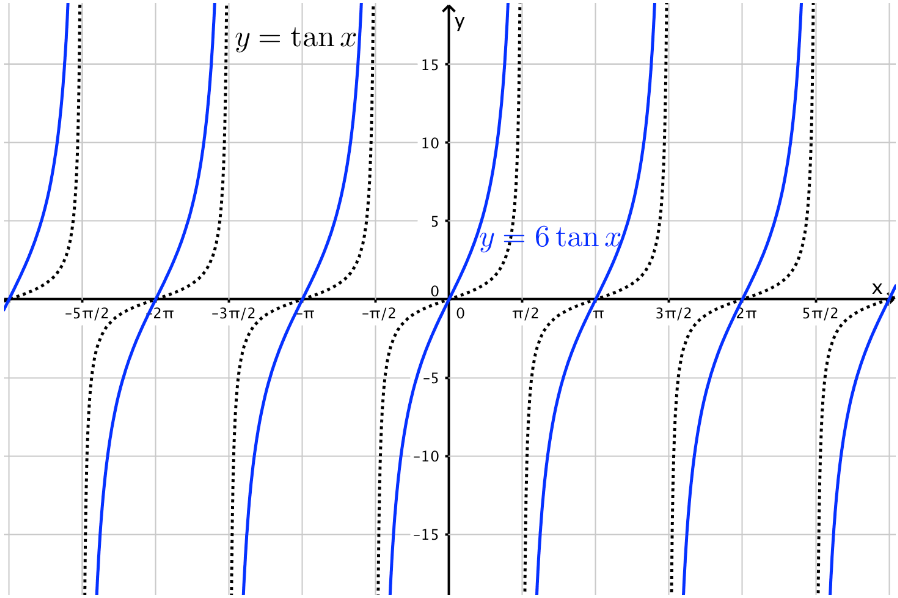
d) Funktion $\sin x-2$ pystysuuntainen siirto on 2 yksikköä alaspäin.

Funktion $\sin x-2$ kuvaaja on 4

Vastaus a) 2 b) 3 c) 1 d) 4

K31

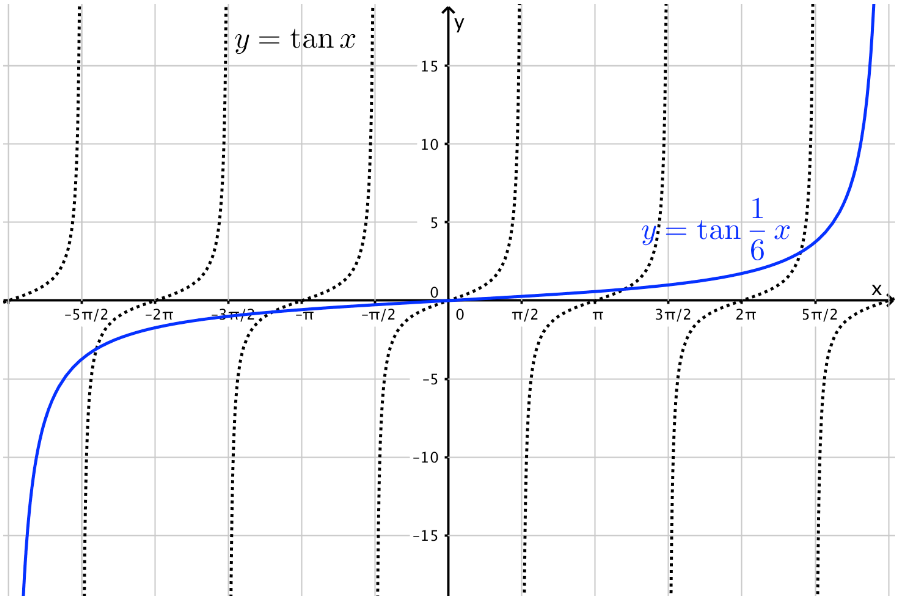
a)



Funktion $6\tan x$ arvojoukko on **R**.

Funktion $6\tan x$ arvot käyvät läpi yhden jakson välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, joten sen perusjakso on sama kuin funktion $\tan x$ perusjakso eli π.

b)



Funktion $\tan \frac{1}{6}x$ arvojoukko on **R**.

Funktion $\tan \frac{1}{6}x$ arvot käyvät läpi yhden jakson välillä $]-3\pi,\ 3\pi[$, joten sen perusjakso on 6π.

Vastaus a) arvojoukko **R**, perusjakso π
b) arvojoukko **R**, perusjakso 6π

K32

Funktion $\sin 6x$ arvojoukko on sama kuin funktion $\sin x$ eli $[-1, 1]$.

Määritetään funktion f arvojoukko.

$$-1 \le \sin 6x \le 1 \quad |\cdot 8$$

$$-8 \le 8\sin 6x \le 8 \quad |-5$$

$$-13 \le -5 + 8\sin 6x \le 3$$

Funktion f arvojoukko on $[-13, 3]$.

Selvitetään funktion $\sin 6x$ perusjakso, eli pienin mahdollinen positiivinen jakso, joka muuttujaan x tulee lisätä, jotta funktio $\sin 6x$ saa uudestaan saman arvon.

$$\sin 6x = \sin(6x + 2\pi) \qquad \text{Erotetaan } 6 \text{ yhteiseksi tekijäksi.}$$

$$= \sin\left(6\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Siis

$$f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -5 + 8\sin\left(6\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= -5 + 8\sin(6x + 2\pi)$$

$$= -5 + 8\sin 6x = f(x)$$

kaikilla x.

Funktion f perusjakso on $\frac{\pi}{3}$.

Vastaus arvojoukko $[-13, 3]$, perusjakso $\frac{\pi}{3}$

K33

Funktion $\cos\frac{1}{2}x$ arvojoukko on sama kuin funktion $\cos x$ eli $[-1, 1]$.

Määritetään funktion f arvojoukko.

$$-1 \le \cos\frac{1}{2}x \le 1 \qquad |\cdot(-5)$$

$$5 \ge -5\cos\frac{1}{2}x \ge -5 \qquad |+1$$

$$6 \ge 1-5\cos\frac{1}{2}x \ge -4$$

$$-4 \le 1-5\cos\frac{1}{2}x \le 6$$

Funktio f saa kaikki arvot väliltä $[-4, 6]$. Funktion suurin arvo on 6 ja pienin arvo on -4.

Vastaus suurin arvo 6, pienin arvo -4

K34

Kirjoitetaan funktion f lauseke muotoon $a\sin\left(b\left(x-c\right)\right)+d$.

$$f(x)=4\sin\left(2x-\pi\right)-1=4\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)+(-1)$$

a) Amplitudia muuttaa kerroin 4. Funktiolla f on sama amplitudi kuin funktiolla $4\sin x$. Koska funktion $\sin x$ amplitudi on 1, niin funktion $4\sin x$ amplitudi on 4.

Funktion f amplitudi on 4.

Perusjaksoa muuttaa kerroin 2. Funktiolla f on sama perusjakso kuin funktiolla $\sin 2x$. Koska

$$\sin 2x=\sin\,(2x+2\pi)=\sin\left(2\left(x+\pi\right)\right),$$

niin muuttujaan x pitää lisätä π, jotta funktio $\sin 2x$ saa uudelleen saman arvon.

Funktion f perusjakso on π.

b) Tarkastellaan ensin vaakasuuntaista siirtoa. Siirtoon vaikuttaa vakio $\frac{\pi}{2}$.

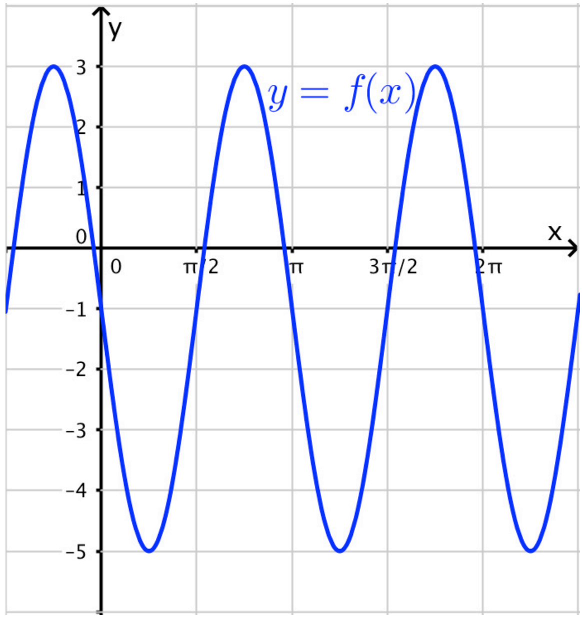
Funktion f kuvaajan vaakasuuntainen siirto on $\frac{\pi}{2}$ yksikköä oikealle.

Tarkastellaan seuraavaksi pystysuuntaista siirtoa. Siirtoon vaikuttaa vakio -1.

Funktion f kuvaajan pystysuuntainen siirto on 1 yksikköä alaspäin.

Funktion f kuvaaja saadaan siirtämällä funktion $2\sin 4x$ kuvaajaa $\frac{\pi}{2}$ yksikköä oikealle ja 1 yksikköä alaspäin.

c)



Vastaus a) amplitudi 4, perusjakso π

b) $\dfrac{\pi}{2}$ yksikköä oikealle, 1 yksikköä alaspäin

K35

a) Määritetään funktion $f(t) = a\sin\left(b\left(t-c\right)\right)+d$ vakioiden a, b, c ja d arvot.

Vakio *a* muuttaa sinifunktion amplitudia. Sinifunktion amplitudi on puolet suurimman ja pienimmän arvon erotuksesta.

$$\frac{1}{2}\cdot(37{,}6-36{,}5)=0{,}55$$

Koska funktion amplitudi on 0,55, niin $a=0{,}55$.

Vakio *b* muuttaa sinifunktion perusjaksoa. Koska $\sin bx = \sin\,(bx+2\pi) = \sin\left(b\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)\right)$, niin funktion $\sin bx$ perusjakso on $\frac{2\pi}{b}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio b.

$$\frac{2\pi}{b}=24$$ Funktion $f(t)$ perusjakso on 24.

$$b=\frac{2\pi}{24}=0{,}2617\ldots\approx 0{,}262$$

Vakio d siirtää funktion kuvaajaa ylöspäin.

Funktion $a \sin bx = 0,55 \sin(0,262x)$ suurin arvo 0,55.
Funktion $0,55 \sin(0,262x) + d$ suurimman arvon tulee olla 37,6.

Funktion $0,55 \sin(0,262x)$ kuvaajaa on siirrettävä $37,6 - 0,55 = 37,05$ yksikköä ylöspäin, joten $d = 37,05$.

On määritetty vakioiden a, b ja d arvot. Funktion f lauseke on $f(t) = 0,55 \sin\big(0,262(t - c)\big) + 37,05$.

Vakio c siirtää kuvaajaa vaakasuunnassa.

Vakio c voidaan määrittää, kun tiedetään yksi muuttujan t arvo ja sitä vastaava funktion arvo. Kello 4.30 on vuorokauden alusta kulunut 4,5 tuntia ja ruumiinlämpö on $36,5\ ^\circ\mathrm{C}$. Siis $f(4,5) = 36,5$.

Ratkaistaan yhtälö laskimella ja rajataan ratkaisu välille $0 \le c \le 24$.

$$f(4,5) = 36,5$$

$$0,55 \sin\big(0,262(4,5 - c)\big) + 37,05 = 36,5$$

$$c = 10,49... \approx 10,5$$

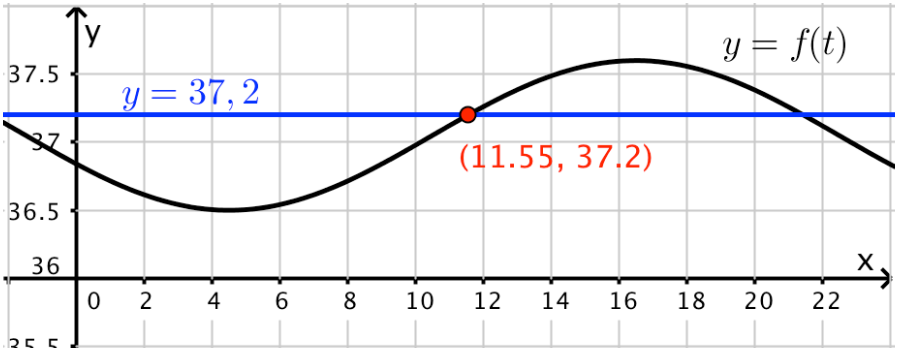
Saadaan $f(t) = 0,55 \sin\big(0,262(t - 10,5)\big) + 37,05$.

b) Pilvin herätessä kello 7.45 on kulunut 7,75 tuntia keskiyöstä.

Ruumiinlämpö on

$$f(7,75) = 0,55\sin\big(0,262(7,75-10,5)\big)+37,05$$
$$= 36,68... = 36,7 \ \ (°C)$$

c) Piirretään funktion f kuvaaja $y = f(t)$ ja suora $y = 37,2$.



Kuvaajan perustella Pilvin ruumiinlämpö nousee yli 37,2 °C, kun keskiyöstä on kulunut aikaa 11,55 tuntia. Muutetaan aika tunneiksi ja minuuteiksi.

$$11,55 \text{ h} = 11 \text{ h} + 0,55 \cdot 60 \text{ min} = 11 \text{ h} + 33 \text{ min}$$

Kellonaika on siis 11.33.

Vastaus a) $f(t) = 0,55\sin\big(0,262(t-10,5)\big)+37,05$

b) $36,7$ °C

c) kello 11.33

K36

a) $D(3\cos x + 2) = -3\sin x$

b)

$$D3\cos 2x = 3\cdot\underbrace{(-\sin 2x)}_{u'(s(x))}\cdot\underbrace{D\,2x}_{s'(x)} \qquad Du(s(x)) = u'(s(x))\cdot s'(x)$$

$$= -6\sin 2x$$

c)

$$D3\cos^2 x = 3\cdot\underbrace{2\cos x}_{u'(s(x))}\cdot\underbrace{D\cos x}_{s'(x)} \qquad Du(s(x)) = u'(s(x))\cdot s'(x)$$

$$= -6\cos x\sin x = -3\sin 2x$$

Vastaus

a) $-3\sin x$

b) $-6\sin 2x$

c) $-6\cos x\sin x = -3\sin 2x$

K37

$$f'(x) = 3\cos x + \underbrace{\cos 3x}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{3}_{s'(x)} + \underbrace{3\sin^2 x}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{\cos x}_{s'(x)} \qquad \mathrm{D}u(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$= 3\cos x + 3\cos 3x + 3\sin^2 x \cos x$$

Vastaus $\quad f'(x) = 3\cos x + 3\cos 3x + 3\sin^2 x \cos x$

K38

a) Määrittelyehto on $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$.

$$\mathrm{D}(\frac{\tan x}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{D}\tan x = \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 x)$$

b) Määrittelyehto on

$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad |\cdot 2$$

$x \neq \pi + n \cdot 2\pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$.

$$\mathrm{D}\tan\frac{x}{2} = \underbrace{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}_{u'(s(x))} \cdot \mathrm{D}\underbrace{\frac{x}{2}}_{s'(x)} \qquad \mathrm{D}u(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

tai

$$\mathrm{D}\tan\frac{x}{2} = \underbrace{(1 + \tan^2\frac{x}{2})}_{u'(s(x))} \cdot \mathrm{D}\underbrace{\frac{x}{2}}_{s'(x)} \qquad \mathrm{D}u(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \tan^2\frac{x}{2})$$

Vastaus a) $f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 x) = \frac{1}{2\cos^2 x}$,

kun $x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbf{Z}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{x}{2}) = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$,

kun $x \neq \pi + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbf{Z}$

K39

Määritetään kuvaajan $y = f(x)$ piste, johon normaali piirretään.

$$y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Normaali piirretään pisteeseen $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Funktion f kuvaajalle kohtaan x piirretty tangentti ja normaali ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten niiden kulmakertoimien tulo on -1.

Ratkaistaan ensin funktion f kuvaajalle kohtaan $x = \frac{\pi}{4}$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k_{\mathrm{t}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Derivoidaan funktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(\cos 2x) \\ &= (-\sin 2x) \cdot 2 \\ &= -2\sin 2x \end{aligned}$$

Ratkaistaan tangentin kulmakerroin.

$$k_{\mathrm{t}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -2 \cdot 1 = -2$$

Ratkaistaan normaalin kulmakerroin.

$$k_{\mathrm{t}} \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$

$$-2 \cdot k_{\mathrm{n}} = -1$$

$$k_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2}$$

Muodostetaan normaalin yhtälö, kun normaali kulkee pisteen $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ kautta ja sen kulmakerroin on $\frac{1}{2}$.

$$y - 0 = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}$$

Normaalin yhtälö voidaan ilmoittaa myös muodossa $4x - 8y - \pi = 0$.

Vastaus $\quad y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}$ eli $4x - 8y - \pi = 0$

K40

a) Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = -2\sin x - 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$-2\sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi \qquad \text{tai} \qquad x = \pi - \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi,$$

missä $n \in \mathbf{Z}$

b) Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 2\cos 2x + 1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$2\cos 2x + 1 = 0$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \qquad \text{tai} \qquad 2x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi \qquad \qquad x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot \pi,$$

missä $n \in \mathbf{Z}$

Vastaus a) $x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$ tai $x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$

K41

Funktion f kulku päätellään derivaattafunktion merkistä.

Derivoidaan funktio f.

$f'(x) = -\sin x + 1$.

Selvitetään derivaattafunktion arvojoukko.

$$\begin{aligned}
-1 \le \sin x \le 1 \quad & \big| \cdot(-1) \ (<0) \\
1 \ge -\sin x \ge -1 \quad & \big| +1 \\
2 \ge -\sin x + 1 \ge 0 & \\
0 \le -\sin x + 1 \le 2 &
\end{aligned}$$

Derivaattafunktion arvojoukko on $[0, 2]$ eli $f'(x) \ge 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Tutkitaan derivaatan nollakohdat.

$$-\sin x + 1 = 0$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi, \quad \text{missä } n \in \mathbf{Z}$$

Derivaattafunktio on 0 vain yksittäisissä kohdissa.

Koska derivaattafunktio $f'(x) \ge 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja $f'(x) = 0$ vain yksittäisissä kohdissa, niin funktio f on kaikkialla aidosti kasvava. □

K42

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ perusjakso on 2π

Derivoidaan funktio f. Derivointi voidaan suorittaa myös laskimella.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 6\sin x\cos x - 4\sin x\cos x \\
&= 2\sin x\cos x \\
&= \sin 2x
\end{aligned}
$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
\sin 2x &= 0 \\
2x &= n\cdot\pi \quad |:2 \\
x &= n\cdot\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Välille $]0, 2\pi[$ kuuluu derivaattafunktion nollakohdat $\frac{\pi}{2}$ $(n = 1)$, π $(n = 2)$ ja $\frac{3\pi}{2}$ $(n = 3)$.

Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(0) = 3\sin^2 0 + 2\cos^2 0 = 2 = f(2\pi) \qquad \text{pienin}$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 3\sin^2 \frac{\pi}{2} + 2\cos^2 \frac{\pi}{2} = 3 \qquad \text{suurin}$$

$$f(\pi) = 3\sin^2 \pi + 2\cos^2 \pi = 2 \qquad \text{pienin}$$

$$f(\frac{3\pi}{2}) = 3\sin^2 \frac{3\pi}{2} + 2\cos^2 \frac{3\pi}{2} = 3 \qquad \text{suurin}$$

Funktion f suurin arvo on 3 ja pienin arvo on 2.

Vastaus suurin arvo 3, pienin arvo 2

K43

Funktion f määrittelyehto on

$$3x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}, \quad \text{missä } n \in \mathbf{Z}.$$

Funktio on siten määritelty tutkittavalla välillä $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$.

Funktion kulku päätellään derivaattafunktion merkkien avulla.
Määritetään derivaattafunktio. (Voidaan derivoida laskimella).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}(\tan 3x - 4x) \\ &= 3(1 + \tan^2 3x) - 4 \\ &= 3\tan^2 3x - 1 \end{aligned}$$

Derivaattafunktio on määrittelyvälillä jatkuva, joten sen arvo voi vaihtua vain nollakohdissa. Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat. (Voidaan ratkaista laskimella).

$$3\tan^2 3x - 1 = 0$$

$$\tan^2 3x = \frac{1}{3}$$

$$\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{tai} \qquad \tan 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$3x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \quad |:3 \qquad 3x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot \pi \quad |:3$$

$$x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{\pi}{3} \qquad x = \frac{5\pi}{18} + n \cdot \frac{\pi}{3}, \quad \text{missä} \ \ n \in \mathbf{Z}$$

Välille $\left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right[$ nollakohdista kuuluvat $\frac{\pi}{18}$ ja $-\frac{\pi}{18}$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

x	$f'(x)$	merkki
$-\frac{1}{2}$	595,5…	+
0	–1	–
$\frac{1}{2}$	595,5…	+

	$-\frac{\pi}{6}$ … $-\frac{\pi}{18}$	$-\frac{\pi}{18}$ … $\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{18}$ … $\frac{\pi}{6}$
f'	+	–	+
f	↗	↘	↗

max min

Funktiolla f on välillä maksimikohta $-\frac{\pi}{18}$ ja minimikohta $\frac{\pi}{18}$.

Vastaus maksimikohta $-\frac{\pi}{18}$, minimikohta $\frac{\pi}{18}$.

K44

a) Funktion f muutosnopeuden ilmaisee sen derivaattafunktio f'.

Derivoidaan funktio f.

$$f'(t) = 9{,}5 \cdot \cos(0{,}262t - 1{,}703) \cdot 0{,}262$$
$$= 2{,}489 \cos(0{,}262t - 1{,}703)$$

Kello 9.30 veden syvyyden muutosnopeus on $f'(9{,}5)$.

$$f'(9{,}5) = 2{,}489 \cos(0{,}262 \cdot 9{,}5 - 1{,}703) = 1{,}758... \approx 1{,}8 \;\; (°\text{C/h})$$

Lämpötila muuttui 1,8 °C/h.

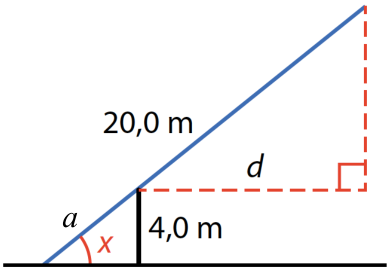
b) Derivaattafunktio saa suurimman arvonsa, kun kosinin arvo on 1.

$$f'(t) = 2{,}489 \cdot 1 = 2{,}489... \approx 2{,}5 \;\; (°\text{C/h})$$

Suurin muutosnopeus on 2,5 °C/h.

Vastaus
a) 1,8 °C/h
b) 2,5 °C/h

K45



$$\sin x = \frac{4}{a}$$

$$a = \frac{4}{\sin x}$$

$$\cos x = \frac{d}{20 - a}$$

$$d = (20 - a) \cdot \cos x$$

Etäisyyden d ilmaisee siis funktio

$$f(x) = (20 - a)\cos x = 20\cos x - \frac{4\cos x}{\sin x}, \text{ missä } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Tehtävänä on etsiä funktion f suurin arvo.

Derivoidaan. (Voidaan derivoida laskimella).

$$f'(x) = -20\sin x - \frac{-4\sin x \cdot \sin x - 4\cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-20\sin^3 x + 4(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-20\sin^3 x + 4}{\sin^2 x}$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat välillä $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(Voidaan ratkaista laskimella).

$$-20\sin^3 x + 4 = 0$$

$$\sin^3 x = \frac{4}{20}$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{5}$$

$$\sin x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

$$x = 0{,}6246...$$

Laaditaan kulkukaavio.

$f'(0{,}5) = 7{,}81... > 0$

$f'(0{,}7) = -3{,}24... < 0$

	0 – $0{,}6246...$	$0{,}6246...$ – $\frac{\pi}{2}$
f'	$-$	$+$
f	↗	↘

max

Lasketaan funktion suurin arvo

$$f(0{,}6246...) = 10{,}675... \approx 10{,}68$$

Tikkaat jäävät $12 - 10{,}675... = 1{,}324... \approx 1{,}3$ metrin päähän seinästä.

Kulma on tällöin asteina $0{,}6246... \cdot \frac{180°}{\pi} = 35{,}78...° \approx 36°$.

Vastaus 36°, jäävät 1,3 m päähän

M1

$$
\begin{aligned}
(u \circ s)(1) &= u(s(1)) && s(x) = 3x - 5 \\
&= u(3 \cdot 1 - 5) \\
&= u(-2) && u(x) = 2x^2 \\
&= 2(-2)^2 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Vastaus a

M2

Kun lasketaan funktion $f(x)=(4x^3+1)^7$ arvo, voidaan ensin laskea funktion $s(x)=x^3$ arvo, minkä jälkeen lasketaan $(4\cdot s(x)+1)^7$. Tällöin $u(x)=(4x+1)^7$.

Siis sisäfunktio on $s(x)=x^3$ ja ulkofunktio $u(x)=(4x+1)^7$.

Tai voidaan ensin laskea funktion $s(x)=4x^3+1$ arvo, minkä jälkeen lasketaan $(s(x))^7$. Tällöin $u(x)=x^7$.

Siis sisäfunktio on $s(x)=4x^3+1$ ja ulkofunktio $u(x)=x^7$.

(Vaihtoehto b tuottaa väärän lausekkeen $4(x^7)^3+1=4x^{21}+1$.)

Vastaus a ja c

M3

Muodostetaan yhdistettyjen funktioiden $g \circ f$ ja $f \circ g$ lausekkeet, kun $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x + 1$.

$$\boxed{\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= x^2 + 1\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x+1) \\ &= (x+1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1\end{aligned}}$$

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$$

$$x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$x = 0$$

Funktiot saavat saman arvon kohdassa $x = 0$.

Vastaus b

M4

Funktio $f(x) = (2x^2 - 3)^4$. Derivoidaan funktio f.

$$f'(x) = \underbrace{4(2x^2-3)^3}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{\mathrm{D}(2x^2-3)}_{s'(x)} \qquad \text{Ketjusääntö } \mathrm{D}u(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$= 4(2x^2-3)^3 \cdot 4x$$

$$= 16x(2x^2-3)^3$$

Vastaus b

M5

Derivoidaan funktio $g(x) = (x^3 - 12x)^3$.

$$g'(x) = \underbrace{3(x^3 - 12x)^2}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{\mathrm{D}(x^3 - 12x)}_{s'(x)} \quad \text{Ketjusääntö } \mathrm{D}u(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$= 3(x^3 - 12x)^3 \cdot (3x^2 - 12)$$

$$= 9(x^2 - 4)(x^3 - 12x)$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$9(x^2 - 4)(x^3 - 12x) = 0$$

$x^2 - 4 = 0$ tai $x^3 - 12x = 0$

$x^2 = 4$ $\quad$ $x(x^2 - 12) = 0$

$x = -2$ tai $x = 2$ $\quad$ $x = 0$ tai $x^2 = 12$

$x = -2\sqrt{3}$ tai $x = 2\sqrt{3}$

Nollakohtia on 5 kappaletta.

Vastaus c

M6

Derivoidaan funktio $f(x) = (x^2 + 4)^5$.

$$f'(x) = \underbrace{5(x^2+4)^4}_{u'(s(x))} \cdot \underbrace{\mathrm{D}(x^2+4)}_{s'(x)} \quad \text{Ketjusääntö } \mathrm{D}u(s(x)) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$$

$$= 5(x^2+4)^4 \cdot 2x$$

$$= 10x(x^2+4)^4$$

Tutkitaan derivaattafunktiota.

Koska $10x > 0$, kun $x > 0$ ja $(x^2+4)^4 > 0$ kaikilla x, derivaattafunktio on positiivinen välillä $x > 0$.

Kun $x = 0$, niin myös $f'(x) = 0$.

Kun $x < 0$, niin $10x < 0$. Koska $(x^2 + 4)^4 > 0$ myös, kun $x < 0$, niin tällöin $f'(x) < 0$.

Vastaus b

M7

Kulman $-191°$ kehäpiste on II neljänneksessä.

Vastaus b

M8

Selvitetään kulman suuruus.

$$\alpha = \frac{b}{r} = \frac{12}{3} = 4$$

Vastaus b

M9

Selvitetään kulman suuruus asteina.

$$\pi \text{ rad} = 180°$$

$$\frac{\pi}{10} \text{ rad} = \frac{180°}{10} = 18°$$

Vastaus a

M10

Selvitetään kulman suuruus radiaaneina.

$$180° = \pi \text{ rad, joten } 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$270° = 270 \cdot 1° = \overset{3}{\cancel{270}} \cdot \frac{\pi}{\underset{2}{\cancel{180}}} \text{ rad} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Vastaus c

M11

Koska kulma α on terävä, sen sini, kosini ja tangentti ovat positiivisia.

Siis

$\tan\alpha > 0$,

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha < 0$ ja

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha > 0$.

Vastaus b ja c

M12

Koska kulma α on tylppä, sen kehäpiste sijaitsee II neljänneksessä eli kulman kosini on negatiivinen.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = (\pm)\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \big| \sin\alpha = 0{,}1$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{0{,}99}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}\sin(\pi+\alpha) &= \sin(\pi-(-\alpha))\\ &= \sin(-\alpha)\\ &= -\sin\alpha\\ &= -0{,}1.\end{aligned}$$

Oikea vaihtoehto on siten c.

Vastaus c

M13

Kulman α kehäpisteen x-koordinaatti vastaa kulman kosinin arvoa ja y-koordinaatti kulman sinin arvoa.

Koska kosinin arvo on negatiivinen ja sinin positiivinen, kulma sijaitsee II neljänneksessä eli kulma on tylppä.

Koska $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, niin $\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{0,84}}{0,4}$.

Koska $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$, niin $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = -0,4$.

Kaikki vaihtoehdot ovat siten oikeita.

Vastaus a, b ja c

M14

Koska kulma α on terävä sen kehäpiste sijaitsee I neljänneksessä eli kulman sini on positiivinen.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = {}_{(}\pm_{)}\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \Big|\cos\alpha = \frac{1}{6}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{35}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

Lisäksi

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{35}}{18}$$

Oikeat vaihtoehdot ovat siten a ja b.

Vastaus a ja b

M15

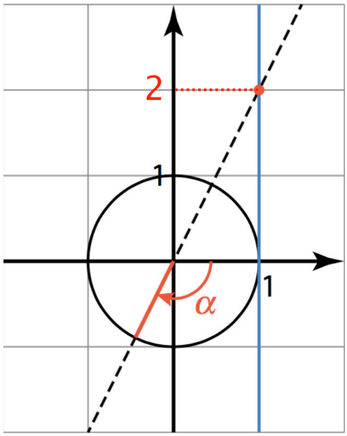
Koska $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, niin $\tan\alpha = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Oikea vaihtoehto on siten a

Vastaus a

M16

Kulman α tangentin arvo on kulma tangenttipisteen y-koordinaatti. Kulman α tangentti on 2.

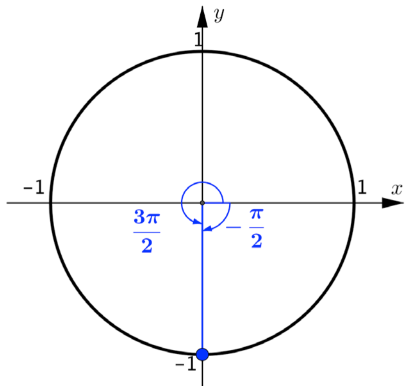


Oikea vaihtoehto on siten b

Vastaus b

M17

Yhtälön $\sin x = -1$ toteuttavat kulmat $\frac{3\pi}{2}$ ja $-\frac{\pi}{2}$.



Oikeat vaihtoehdot ovat siten b ja c.

Vastaus b ja c

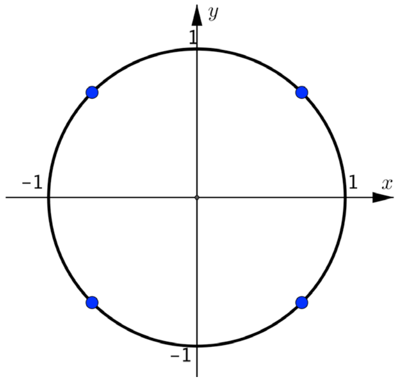
M18

Ratkaistaan yhtälö.

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad \Big|: 2$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$



Yhtälön toteuttaa kulma $\frac{\pi}{4}$.

Oikea vaihtoehto on siten c.

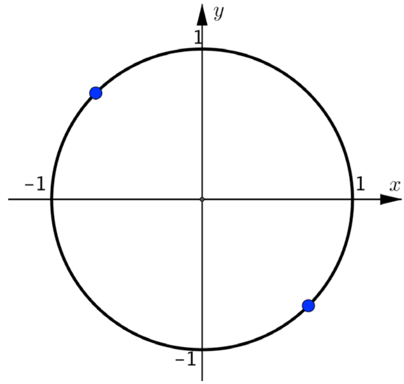
Vastaus c

M19

Ratkaistaan yhtälö.

$\tan x = -1$

$$x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$$



Yhtälön toteuttavat kulmat
$\frac{3\pi}{4}$ ja $-\frac{\pi}{4}$.

Oikeat vaihtoehdot ovat siten a ja c.

Vastaus a ja c

M20

Tutkitaan ratkaisuparven kulmia välillä $[-\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

n	$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$
–3	$x = \frac{\pi}{4} - 3 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{4}$
–2	$x = \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{4}$
–1	$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$
0	$x = \frac{\pi}{4}$
1	$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{2}$

Ratkaisuparveen sisältyvät kulmat $-\frac{5\pi}{4}$ ja $-\frac{\pi}{4}$.

Oikeat vaihtoehdot ovat siten b ja c.

Vastaus b ja c

M21

Ratkaistaan yhtälö.

$\sin x = 0,5$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi,$$

missä $n \in \mathbf{Z}$

Oikea vaihtoehto on siten c.

Vastaus c

M22

Ratkaistaan yhtälö.

$$\tan x = -3$$

$$x = -1{,}249... + n \cdot \pi$$

$$x \approx -1{,}25 + n \cdot \pi,$$

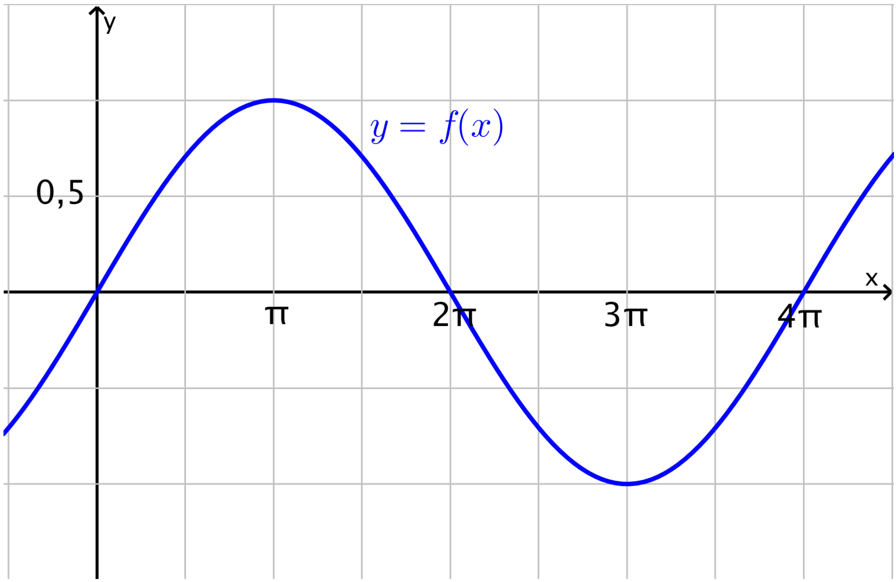
missä $n \in \mathbf{Z}$

Oikea vaihtoehto on siten b.

Vastaus b

M23

Kirjan 1. painoksen kuva on virheellinen. Oikea kuva alla.



Funktion arvojoukko on sama kuin funktion $\sin x$ eli $[-1, 1]$ ja jakso on kaksinkertainen funktioon $\sin x$ verrattuna.

Siten kuvaa vastaava funktio vaihtoehto a.

Vastaus a

M24

Funktion $\sin 2x$ arvojoukko on sama kuin funktion $\sin x$ eli $[-1, 1]$.

Määritetään funktion f arvojoukko.

$$-1 \le \sin 2x \le 1 \quad |\cdot(-4)$$

$$4 \ge -4\sin 2x \ge -4 \quad |+8$$

$$12 \ge 8 - 4\sin 2x \ge 4$$

$$4 \le 8 - 4\sin 2x \le 12$$

Funktio f arvojoukko on $[4, 12]$.

Selvitetään funktion $\sin 2x$ perusjakso, eli pienin mahdollinen positiivinen jakso, joka muuttujaan x tulee lisätä, jotta funktio $\sin 2x$ saa uudestaan saman arvon.

$$\sin 2x = \sin(2x + 2\pi) \qquad \text{Erotetaan } 2 \text{ yhteiseksi tekijäksi.}$$

$$= \sin(2(x + \pi))$$

Funktion f perusjakso on π.

Oikeat vaihtoehdot ovat siten a ja c.

Vastaus a ja c

M25

Funktion f vaakasuuntainen siirto on 2 yksikköä oikealle verrattuna funktioon $\sin x$ ja funktion arvojoukko on sama kuin funktiolla $\sin x$.

Funktio f on siten $\sin(x-2)$. Oikea vaihtoehto on vaihtoehto c.

Vastaus c

M26

Kirjoitetaan funktion f lauseke muotoon $a\sin\left(b\left(x-c\right)\right)+d$.

$$f(x)=4\sin\left(2x-\pi\right)+2=4\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)+2$$

Vaakasuuntaiseen siirtoon vaikuttaa vakio $\frac{\pi}{2}$. Funktion f kuvaajan vaakasuuntainen siirto on $\frac{\pi}{2}$ yksikköä oikealle.

Pystysuuntaiseen siirtoon vaikuttaa vakio 2. Funktion f kuvaajan pystysuuntainen siirto on 2 yksikköä ylöspäin.

Eli funktion f kuvaaja saadaan siirtämällä funktion $4\sin 2x$ kuvaajaa $\frac{\pi}{2}$ yksikköä oikealle ja 2 yksikköä ylöspäin.

Oikeat vastausvaihtoehdot ovat siten a ja b.

Vastaus a ja b

M27

Derivoidaan funktio.

$$\mathrm{D}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot \mathrm{D}x^2 = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

Vastaus c

M28

Derivoidaan funktio.

$$\mathrm{D}(\cos(1-2x)) = -\sin(1-2x)\cdot \mathrm{D}(1-2x)$$

$$= -\sin(1-2x)\cdot(-2) = 2\sin(1-2x)$$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

Vastaus a

M29

Funktio f saa suurimman arvonsa, kun $\sin(6x+99)=1$.

Suurin arvo on siten $7\cdot 1-3=4$.

Oikea vastausvaihtoehto on a.

Vastaus a

M30

Funktio $f(x) = 4 + 3\sin(2x + 1)$ on jatkuva ja derivoituva.

Derivoidaan funktio f.

$f'(x) = 6\cos(2x+1)$

Koska derivaattafunktion arvojoukko on $[-6, 6]$, funktio f ei ole aidosti kasvava.

Funktio f saa pienimmän arvonsa, kun $\sin(2x+1) = -1$. Funktion pienin arvo on siten $4 + 3 \cdot (-1) = 1$. Funktio saa siis vain positiivisia arvoja.

Oikeat vastausvaihtoehdot ovat b ja c.

Vastaus b ja c

M31

Funktiolla $f(x) = 23\cos(\frac{x}{2} + 3) - 7$ on sama perusjakso kuin funktiolla $\cos\frac{x}{2}$. Koska

$$\cos\frac{x}{2} = \cos\,(\frac{x}{2} + 2\pi) = \cos\left(\frac{1}{2}(x + 4\pi)\right),$$

niin muuttujaan x pitää lisätä 4π, jotta funktio $\cos\frac{x}{2}$ saa uudelleen saman arvon.

Funktion f perusjakso on 4π, jolloin funktio saa kaikki arvonsa millä hyvänsä tämän pituisella tai tätä pidemmällä välillä.

Kaikkien annettujen välien pituus on vähintään 4π, joten funktio saa kaikki arvonsa kaikilla väleillä.

Vastaus a, b ja c

M32

Derivoidaan.

$$\mathrm{D}(\tan 4x) = (1 + \tan^2 4x) \cdot 4 = 4 + 4\tan^2 4x$$

tai toisin

$$\mathrm{D}(\tan 4x) = \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot 4 = \frac{4}{\cos^2 4x}$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

Vastaus c

M33

Derivoidaan.

$$\mathrm{D}(\tan^2 x) = 2 \cdot \tan x \cdot (1 + \tan^2 x) = 2 \tan x(1 + \tan^2 x)$$

tai

$$\mathrm{D}(\tan^2 x) = 2 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$$

Oikeat vastausvaihtoehdot ovat b ja c.

Vastaus b ja c

M34

Funktio $\frac{1}{2}\sin 2x$ saa suurimman arvonsa, kun $\sin 2x = 1$.

Suurin arvo on siten $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Oikea vastausvaihtoehto on a.

Vastaus a

M35

Funktio $\frac{1}{2}\sin 2x$ saa suurimman arvonsa, kun $\sin 2x = 1$.

Suurin arvo on siten $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Ratkaistaan yhtälö

$$\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad |: 2$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

Funktio saa suurimman arvonsa kohdassa $\frac{\pi}{4}$.

Vastaus b

A1

a) $f'(x) = \mathrm{D}(2\sin 3x) = 2\cos 3x \cdot 3 = 6\cos 3x$

b) $h'(x) = \mathrm{D}(4x - \cos\frac{\pi}{4}) = 4$ $\cos\frac{\pi}{4}$ on vakio.

c) $g'(x) = \mathrm{D}(6 - \tan(1-2x))$

$$= -(1+\tan^2(1-2x)) \cdot (-2)$$

$$= 2 + 2\tan^2(1-2x)$$

Huomaa: funktion voi derivoida myös toisin:

$$g'(x) = \mathrm{D}(6 - \tan(1-2x))$$

$$= -\frac{1}{\cos^2(1-2x)} \cdot (-2)$$

$$= \frac{2}{\cos^2(1-2x)}$$

Vastaus

a) $f'(x) = 6\cos 3x$
b) $h'(x) = 4$
c) $g'(x) = 2 + 2\tan^2(1-2x)$ $\left(= \frac{2}{\cos^2(1-2x)}\right)$

A2

a) $f'(x) = \mathrm{D}(2(4-3x^2)^3)$

$$= 2\cdot 3(4-3x^2)^2\cdot(-6x)$$

$$= -36x(4-3x^2)^2$$

b) $g'(x) = \mathrm{D}(\frac{1}{2}(\sin 3x - 7)^4)$

$$= \frac{1}{2}\cdot 4(\sin 3x - 7)^3\cdot(\cos 3x\cdot 3)$$

$$= 6\cos 3x(\sin 3x - 7)^3$$

Vastaus

a) $f'(x) = -36x(4-3x^2)^2$

b) $g'(x) = 6\cos 3x(\sin 3x - 7)^3$

A3

a) Ratkaistaan yhtälön $\tan 2x = \tan 5x$ määrittelyehto.

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \qquad \text{ja} \qquad 5x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \qquad\qquad x \neq \frac{\pi}{10} + n \cdot \frac{\pi}{5}$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\tan 2x = \tan 5x$$

$$2x = 5x + n \cdot \pi$$

$$-3x = n \cdot \pi \qquad |:(-3)$$

$$x = -n \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$x = n \cdot \frac{\pi}{3}$$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

b)

$$2\sin(2x+4)=\sqrt{3} \quad \Big|:2$$

$$\sin(2x+4)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x+4=\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi$$

$$2x=\frac{\pi}{3}-4+n\cdot 2\pi \qquad \Big|:2$$

$$x=\frac{\pi}{6}-2+n\cdot\pi$$

tai

$$2x+4=\pi-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi$$

$$2x=\frac{2\pi}{3}-4+n\cdot 2\pi \qquad \Big|:2$$

$$x=\frac{\pi}{3}-2+n\cdot\pi$$

Vastaus

a) $x=n\cdot\frac{\pi}{3}$, missä $n\in\mathbf{Z}$

b) $x=\frac{\pi}{6}-2+n\cdot\pi$ tai $x=\frac{\pi}{3}-2+n\cdot\pi$, missä $n\in\mathbf{Z}$

A4

a) Ratkaistaan yhtälön määrittelyehto.

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\tan 2x = \sin 2x \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \sin 2x \qquad \Big| \cdot \cos 2x \ (\neq 0)$$

$$\sin 2x = \sin 2x \cos 2x$$

$$\sin 2x - \sin 2x \cos 2x = 0$$

$$\sin 2x(1 - \cos 2x) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \qquad \text{tai} \qquad 1 - \cos 2x = 0$$

$$2x = n \cdot \pi \quad \Big| :2 \qquad \cos 2x = 1$$

$$x = n \cdot \frac{\pi}{2} \qquad 2x = n \cdot 2\pi \quad \Big| :2$$

$$x = n \cdot \pi$$

Ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon.

Ratkaisut voidaan yhdistää: $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$, missä $n \in \mathbf{Z}$.

b)

$$4\cos(3x+15°)=2 \qquad \big|:4$$

$$\cos(3x+15°)=\frac{1}{2}$$

$$3x+15°=60°+n\cdot 360°$$

$$3x=45°+n\cdot 360° \qquad \big|:3$$

$$x=15°+n\cdot 120°$$

tai

$$3x+15°=-60°+n\cdot 360°$$

$$3x=-75°+n\cdot 360° \qquad \big|:3$$

$$x=-25°+n\cdot 120°$$

Vastaus

a) $x=n\cdot\frac{\pi}{2}$, missä $n\in\mathbf{Z}$

b) $x=15°+n\cdot 120°$ tai $x=-25°+n\cdot 120°$, missä $n\in\mathbf{Z}$

A5

a) Ratkaistaan yhtälö.

$$\cos^2 x = 1$$

$$\cos x = 1 \qquad \text{tai} \qquad \cos x = -1$$

$$x = n \cdot 2\pi \qquad\qquad x = \pi + n \cdot 2\pi$$

Ratkaisut voidaan yhdistää: $x = n \cdot \pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$.

b)

$$2\cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{tai} \qquad \cos x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

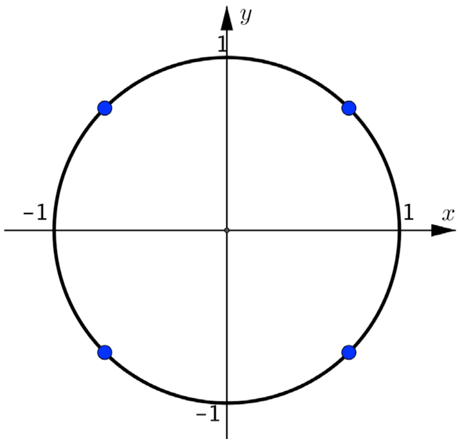
$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \qquad\qquad x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

tai tai

$$x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \qquad\qquad x = -\frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

Ratkaisut voidaan yhdistää:

$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, missä $n \in \mathbf{Z}$.



c)

$$\cos^2 x = \sin^2 x \quad \left|\begin{array}{l} : \cos^2 x \quad (\neq 0) \\ \text{Tapauksessa } \cos^2 x = 0 \text{ yhtälöllä ei ratkaisua.} \end{array}\right.$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

$$\tan^2 x = 1$$

$$\tan x = 1 \qquad \text{tai} \qquad \tan x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \qquad\qquad x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi$$

Ratkaisut voidaan yhdistää: $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, missä $n \in \mathbf{Z}$.

Vastaus

a) $x = n \cdot \pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, missä $n \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, missä $n \in \mathbf{Z}$

A6

Derivoidaan.

$$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2 - 2\cos x \cdot (-\sin x)$$
$$= -2\sin 2x + 2\sin x \cos x \qquad 2\sin x \cos x = \sin 2x$$
$$= -2\sin 2x + \sin 2x$$
$$= -\sin 2x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-\sin 2x = 0$$
$$\sin 2x = 0$$
$$2x = n \cdot \pi \quad |:2$$
$$x = n \cdot \frac{\pi}{2},$$

missä $n \in \mathbf{Z}$.

Vastaus $\qquad x = n \cdot \frac{\pi}{2}$, missä $n \in \mathbf{Z}$

A7

Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ perusjakso on 2π. Koska myös funktion f perusjakso on 2π, se saa kaikki arvonsa esimerkiksi suljetulla välillä $[0, 2\pi]$, joko välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan.

$$f'(x) = 2\sin x\cos x - 2\cdot(-\sin x)$$
$$= 2\sin x + 2\sin x\cos x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2\sin x + 2\sin x\cos x = 0$$
$$2\sin x(1+\cos x) = 0$$
$$2\sin x = 0 \quad \text{tai} \quad 1+\cos x = 0$$
$$\sin x = 0 \qquad\qquad \cos x = -1$$
$$x = n\cdot\pi \qquad\qquad x = \frac{3\pi}{2} + n\cdot 2\pi,$$

missä $n \in \mathbf{Z}$

Välille $]0, 2\pi[$ kuuluvat derivaattafunktion nollakohdat π ja $\frac{3\pi}{2}$.

Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(0) = \sin^2 0 - 2\cos 0 = -2 = f(2\pi) \qquad \text{pienin}$$

$$f(\pi) = \sin^2 \pi - 2\cos \pi = 2 \qquad \text{suurin}$$

$$f(\frac{3\pi}{2}) = \sin^2 \frac{3\pi}{2} - 2\cos\frac{3\pi}{2} = 1$$

Vastaus suurin arvo 2, pienin arvo –2

A8

Ratkaistaan kaksinkertaisen kosinin kaavasta sini.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

Koska $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, niin $\sin\alpha < 0$.

$$\sin \alpha = -\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \qquad \cos 2\alpha = -\frac{13}{19}$$

$$= -\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{13}{19}\right)}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{16}{19}}$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{19}}$$

Koska $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, niin $\cos\alpha < 0$.

Ratkaistaan $\cos\alpha$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = {}^{(}\pm{}^{)}\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$= -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{\sqrt{19}}\right)^2}$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{19}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{4}{\sqrt{19}}}{-\sqrt{\frac{3}{19}}} = -\frac{4}{\sqrt{19}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Vastaus $\quad \sin\alpha = -\dfrac{4}{\sqrt{19}}$, $\tan\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

A9

a) Sievennetään lauseke.

$$3\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2-3\sin 2\alpha \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$=3(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)-3\sin 2\alpha \qquad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$=3(1+\sin 2\alpha)-3\sin 2\alpha \qquad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=3\cdot 1+3\sin 2\alpha-3\sin 2\alpha$$

$$=3$$

b) Sievennetään lauseke taulukkokirjasta löytyvien trigonometristen funktioiden tarkkojen arvojen avulla.

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}+\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}+\tan\frac{11\pi}{4}\cdot\cos^2\frac{\pi}{6}$$

$$=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\tan\left(\frac{3\pi}{4}+2\cdot\pi\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \qquad \tan(\alpha+n\cdot\pi)=\tan\alpha$$

$$=\frac{3}{2}+1+\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}$$

$$=\frac{5}{2}+(-1)\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$$

Vastaus a) 3 b) $\frac{7}{4}$

A10

a) Osoitetaan, että funktion $\sin 4x$ perusjakso on $\frac{\pi}{2}$.

$$\sin 4x = \sin(4x + 2\pi)$$ Erotetaan 4 yhteiseksi tekijäksi.

$$= \sin\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Siis

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + 5$$

$$= 3\sin(4x + 2\pi) + 5$$

$$= 3\sin 4x + 5 = f(x)$$

kaikilla x.

Joten funktion f perusjakso on $\frac{\pi}{2}$. □

b) Funktion $\sin 4x$ arvojoukko on sama kuin funktion $\sin x$ eli $[-1, 1]$.

Määritetään funktion f arvojoukko.

$$-1 \le \sin 4x \le 1 \qquad \left| \cdot 3 \ (> 0) \right.$$

$$-3 \le 3\sin 4x \le 3 \qquad \left| +5 \right.$$

$$2 \le 3\sin 4x + 5 \le 8$$

Funktio f saa kaikki arvot väliltä $[2, 8]$.
Funktion f suurin arvo on 8 ja pienin 2.

Vastaus b) pienin arvo 2, suurin arvo 8

A11

Muokataan yhtälöä.

Tapaus $a = 0$:

$$a\sin^2 x = 1 + 2a \quad \Big| \, a = 0$$

$$0 = 1$$

epätosi, yhtälöllä ei ratkaisua

Tapaus $a \neq 0$:

$$a\sin^2 x = 1 + 2a \quad \Big| : a \quad (\neq 0)$$

$$\sin^2 x = \frac{1+2a}{a}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{a} + 2$$

Funktion $\sin^2 x$ arvojoukko [0, 1]. Tästä saadaan kaksoisepäyhtälö.

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

$$0 \leq \frac{1}{a} + 2 \leq 1$$

$$\frac{1}{a} + 2 \geq 0 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{a} + 2 \leq 1$$

Tapaus $a > 0$:

$$\frac{1}{a} \geq -2 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{a} \leq -1$$

$$-2a \leq 1 \quad \text{ja} \quad -a \geq 1$$

$$a \geq -\frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad a \leq -1$$

Ei ratkaisua, kun $a > 0$.

Tapaus $a < 0$:

$$\frac{1}{a} \geq -2 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{a} \leq -1$$

$$-2a \geq 1 \quad \text{ja} \quad -a \leq 1$$

$$a \leq -\frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad a \geq -1$$

$$-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$$

Yhtälöllä on ratkaisuja, kun $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$.

Vastaus $\quad -1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$

B1

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) \qquad f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$= g(\frac{4}{\sqrt{4}})$$

$$= g(2) \qquad g(x) = \frac{6x-2}{x^3}$$

$$= \frac{6 \cdot 2 - 2}{2^3}$$

$$= \frac{5}{4}$$

Vastaus $\frac{5}{4}$

B2

$$(f \circ g)(-5) = f(g(-5)) \qquad g(x) = |x|\sqrt{4-x}$$

$$= f(|-5|\sqrt{4-(-5)})$$

$$= f(5\sqrt{9})$$

$$= f(15) \qquad f(x) = -2x^2 + 6x$$

$$= -2 \cdot (15)^2 + 6 \cdot 15$$

$$= -360$$

Vastaus –360

B3

Tutkittavat leikkauspisteet ovat funktion f nollakohdissa.

$f(x) = 0$

$\sin x = 0$

$$x = n \cdot \pi, \text{ missä } n \in \mathbf{Z}$$

Peräkkäiset nollakohdat ovat $x_1 = n \cdot \pi$ ja $x_2 = (n+1) \cdot \pi$, missä $n \in \mathbf{Z}$. Lasketaan tangentin kulmakertoimet tutkittavissa kohdissa.

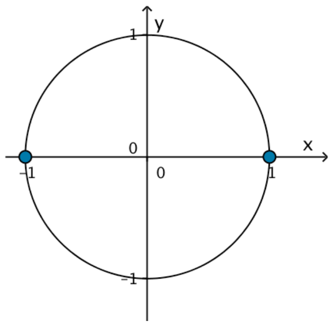
$f'(x) = \cos x$

$k_1 = f'(x_1) = \cos(n \cdot \pi)$ ja $k_2 = f'(x_2) = \cos((n+1) \cdot \pi)$

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$k_1 \cdot k_2 = \cos(n \cdot \pi) \cdot \cos((n+1) \cdot \pi)$

- $\cos n\pi$ on aina joko 1 tai -1.
- Jos $\cos(n \cdot \pi) = 1$, niin
  $\cos((n+1) \cdot \pi) = -1$
- Jos $\cos(n \cdot \pi) = -1$, niin
  $\cos((n+1) \cdot \pi) = 1$



Peräkkäisiin leikkauspisteisiin piirrettyjen tangenttien kulmakertoimien tulo on siis aina $1 \cdot (-1) = -1$, joten tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. $\square$

B4

On määritettävä $(u \circ s)(x) = u(s(x))$, kun $s(x) = \dfrac{4}{x+2}$ ja $u(x) = |x|$.

$$(u \circ s)(x) = u(s(x)) \qquad\qquad s(x) = \frac{4}{x+2}$$

$$= u(\frac{4}{x+2}) \qquad\qquad u(x) = |x|$$

$$= \left|\frac{4}{x+2}\right|$$

$$= \frac{4}{|x+2|}$$

Sisäfunktio $s(x) = \dfrac{4}{x+2}$ on määritelty, kun nimittäjä $x + 2 \neq 0$ eli $x \neq -2$.

Ulkofunktio $u(x) = |x|$ on määritelty kaikilla x.

Yhdistetty funktio $(u \circ s)(x) = u(s(x))$ on siis määritelty, kun $x \neq -2$.

Vastaus $\quad (u \circ s)(x) = \dfrac{4}{|x+2|}$, kun $x \neq -2$

B5

Käyrä leikkaa y-akselin kohdassa $x = 0$.

Selvitetään käyrälle piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin.

Tangenttisuoran kulmakerroin k on funktion f derivaatta kohdassa $x = 0$.

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 5 \cdot (-\sin(7-2x)) \cdot (-2) = 10\sin(7-2x)$$

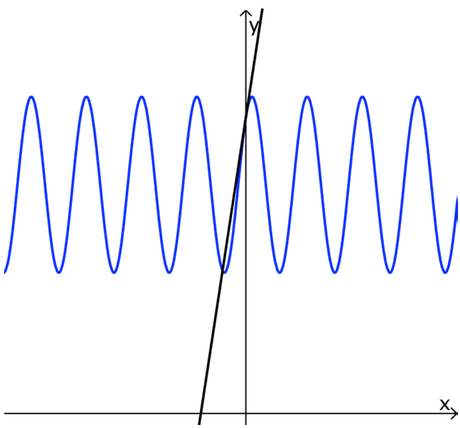
Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa 0.

$$k = f'(0) = 10\sin(7-2\cdot 0) = 10\sin 7 = 6{,}569...$$

Tangenttisuoran kulmakerroin on $k = 6{,}569...$.
Lasketaan tangenttisuoran suuntakulma (eli suoran ja x-akselin välinen kulma).

$$\tan\alpha = 6{,}569...$$

$$\alpha = \tan^{-1} 6{,}569... = 1{,}419...(\text{rad})$$



Kysytty leikkauskulma radiaaneina on

$$\beta = \frac{\pi}{2} - 1{,}419... \approx 0{,}15\,.$$

Kulma on asteina 8,65°.

Vastaus 0,15 rad eli 8,65°

B6

$$f(x) = 2 - 3\cos 3x + 5\cos^2 3x$$

$$= 5\cos^2 3x - 3\cos 3x + 2 \qquad \Big| \text{sijoitetaan } \cos 3x = t$$

$$= 5t^2 - 3t + 2$$

$\cos 3x$ saa kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$, joten myös $-1 \le t \le 1$.

Funktion f pienin arvo on sama kuin funktion $g(t) = 5t^2 - 3t + 2$, missä $-1 \le t \le 1$, pienin arvo.

Funktio g saa pienimmän arvonsa välin $[-1, 1]$ päätepisteessä tai tälle välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.
Määritetään välille $]-1, 1[$ kuuluvat derivaatan nollakohdat.

$$g'(t) = 10t - 3$$

$$g'(t) = 0$$

$$10t - 3 = 0$$

$$t = \frac{3}{10}$$

Saatu nollakohta kuuluu välille $]-1, 1[$.

Lasketaan funktion g arvo välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$g(-1) = 5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 13$$

$$g(1) = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$g\left(\frac{3}{10}\right) = 5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{10} + 2 = \frac{31}{20} = 1{,}55 \quad \text{pienin arvo}$$

Siis myös funktion f pienin arvo on 1,55.

Vastaus
Pienin arvo on 1,55.

(huomaa, että sadasosan tarkkuudella ilmoitettu vastaus 1,55 on itse asiassa tuloksen tarkka arvo)

Tehtävä voidaan ratkaista myös derivoimalla tutkittava funktio f suoraan (katso seuraava sivu.)

Ratkaisu toisin.

Funktion $\cos x$ perusjakso on 2π.

Koska $\cos 3x = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3(x + \frac{2\pi}{3}))$, niin funktion

$\cos 3x$ perusjakso on $\frac{2\pi}{3}$.

Funktion perusjakso on siten $\frac{2\pi}{3}$.

Funktio f saavuttaa välillä $[0, \frac{2\pi}{3}]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille $]0, \frac{2\pi}{3}[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Derivoidaan funktio f.

$$f'(x) = -3 \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 + 5 \cdot 2\cos 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3$$

$$= 9\sin 3x - 30\sin 3x \cos 3x$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat.

$9\sin 3x - 30\sin 3x\cos 3x = 0$ Erotetaan yhteinen tekijä.

$3\sin 3x(3 - 10\cos 3x) = 0$ Käytetään tulon nollasääntöä.

$3\sin 3x = 0$ tai $3 - 10\cos 3x = 0$

$\sin 3x = 0$ $\cos 3x = \frac{3}{10}$

$3x = n \cdot \pi \quad |: 3$ $3x = 1{,}266... + n \cdot 2\pi \quad |: 3$

$x = n \cdot \frac{\pi}{3}$ $x = 0{,}422... + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

tai

$x = -0{,}422... + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

missä $n \in \mathbf{Z}$

Välille $]0, \frac{2\pi}{3}[$ kuuluvat derivaattafunktion nollakohdat $\frac{\pi}{3}$, 0,422... ja 1,672... .

Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(0) = 2 - 3\cos\left(3 \cdot 0\right) + 5\cos^2(3 \cdot 0) = 2 - 3 + 5 = 4 = f(\frac{2\pi}{3})$$

$$f(\frac{\pi}{3}) = 2 - 3\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + 5\cos^2\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 2 + 3 + 5 = 10$$

$$f(0,422...) = 2 - 3\cos\left(3 \cdot 0,422...\right) + 5\cos^2\left(3 \cdot 0,422...\right) = 1,55$$

$$f(1,672...) = 2 - 3\cos\left(3 \cdot 1,672...\right) + 5\cos^2\left(3 \cdot 1,672...\right) = 1,55$$

Funktion pienin arvo on 1,55.

Vastaus pienin arvo 1,55

B7

a) Lauseke on määritelty, kun

$$\tan x \neq 0 \qquad \text{ja} \qquad \sin x \neq 0 \qquad \text{ja} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,$$

$$x \neq n \cdot \pi \qquad\qquad x \neq n \cdot \pi$$

Yhdistetään saadut määrittelyehdot yhdeksi lausekkeeksi.

$x \neq \frac{\pi}{2} \cdot n$, missä $n \in \mathbf{Z}$.

b) Muokataan lauseketta.

$$\frac{\tan x - 1}{\tan x} + 1 + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\tan x}{\tan x} - \frac{1}{\tan x} + 1 + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} + 1 + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= 2 - \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2$$

Koska lausekkeen arvoksi saatiin 2, lausekkeen arvo on vakio. □

Vastaus

a) $x \neq \frac{\pi}{2} \cdot n$, missä $n \in \mathbf{Z}$

b) Lausekkeen arvo on aina 2.

B8

Määritetään kuvaajan $y = f(x)$ piste, johon tangentti piirretään.

$$y = f(0) = 3\tan(2\cdot 0) - 2\sin\frac{0}{2} = 0$$

Tangentti piirretään pisteeseen $(0,0)$.

Funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 0$ piirretyn tangentin kulmakerroin $k = f'(0)$.

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 3\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2 - 2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{6}{\cos^2 2x} - \cos\frac{x}{2}$$

Ratkaistaan tangentin kulmakerroin.

$$k = f'(0) = \frac{6}{\cos^2(2\cdot 0)} - \cos\frac{0}{2} = 6 - 1 = 5$$

Muodostetaan tangentin yhtälö, kun tangentti kulkee pisteen $(0,0)$ kautta ja sen kulmakerroin on 5.

$$y - 0 = 5\cdot(x - 0)$$

$$y = 5x$$

Vastaus $y = 5x$

B9

a) Muodostetaan yhdistettyjen funktioiden $g \circ f$ ja $f \circ g$ lausekkeet.

$$\boxed{\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(ax-4) \\ &= 3(ax-4)+36a \\ &= 3ax+36a-12\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x+36a) \\ &= a(3x+36a)-4 \\ &= 3ax+36a^2-4\end{aligned}}$$

Funktioilla $g \circ f$ ja $f \circ g$ on sama määrittelyjoukko.

Polynomifunktiot $(g \circ f)(x) = 3ax+36a-12$ ja $(f \circ g)(x) = 3ax+36a^2-4$ saavat saman arvon jokaisella x, mikäli polynomien saman asteluvun termien kertoimet ovat samat. Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 3a = 3a \\ 36a-12 = 36a^2-4 \end{cases}$$

$$36a-12 = 36a^2-4$$

$$36a^2-36a+8=0$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$a = \frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad a = \frac{2}{3}$$

b) Muodostetaan yhdistettyjen funktioiden $g \circ f$ ja $f \circ g$ lausekkeet.

$$\boxed{\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(ax+3) \\ &= 5(ax+3)-a \\ &= 5ax-a+15\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(5x-a) \\ &= a(5x-a)+3 \\ &= 5ax-a^2+3\end{aligned}}$$

Funktioilla $g \circ f$ ja $f \circ g$ on sama määrittelyjoukko.

Polynomifunktiot $g \circ f$ ja $f \circ g$ ovat samat, jos ne saavat saman arvon jokaisella x.

$$(g \circ f)(0) = 5a \cdot 0 - a + 15 = 15 - a$$

$$(f \circ g)(0) = 5a \cdot 0 - a^2 + 3 = 3 - a^2$$

$$15 - a = 3 - a^2$$

$$a^2 - a + 12 = 0$$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

Ei ratkaisua

Siis $(g \circ f)(0) \neq (f \circ g)(0)$ kaikilla luvun a arvoilla, joten lukua a ei voi valita siten, funktiot olisivat samat.

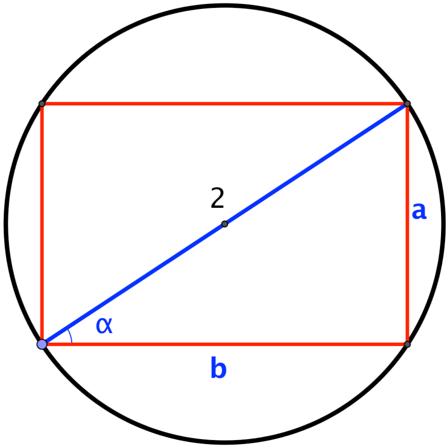
Vastaus a) Voi. $a = \frac{2}{3}$ tai $a = \frac{1}{3}$

b) Ei voi.

B10

$\sin\alpha = \frac{a}{2}$ $\cos\alpha = \frac{b}{2}$

$a = 2\sin\alpha$ $b = 2\cos\alpha$



Suorakulmion piirin ilmaisee funktio

$f(\alpha) = 2\cdot 2\sin\alpha + 2\cdot 2\cos\alpha = 4\sin\alpha + 4\cos\alpha$, missä $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Tehtävänä on etsiä funktion f suurin arvo.

Derivoidaan.

$f'(\alpha) = 4\cos\alpha - 4\sin\alpha$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat välillä $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$4\cos\alpha - 4\sin\alpha = 0$$

$$4\cos\alpha = 4\sin\alpha$$

$$\frac{4\sin\alpha}{4\cos\alpha} = 1$$

$$\tan\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$$

Välillä $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ on nollakohta $\frac{\pi}{4}$.

Laaditaan kulkukaavio.

$$f'(0,5) = 1,592... > 0$$

$$f'(0,8) = -0,082... < 0$$

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		$+$		$-$	
f		↗		↘	
			max		

Lasketaan funktion suurin arvo eli suorakulmion piirin suurin pituus.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}$$

Vastaus $\quad 4\sqrt{2}$

B11

a) Määritetään funktion $f(t) = a\sin\left(b\left(t - c\right)\right) + d$ vakioiden a, b, c ja d arvot.

Vakio a muuttaa sinifunktion amplitudia. Sinifunktion amplitudi on puolet suurimman ja pienimmän arvon erotuksesta.

$$\frac{22,4 - 8,0}{2} = 7,2$$

Siten $a = 7,2$.

Vakio b muuttaa sinifunktion perusjaksoa.
Koska $\sin bx = \sin\,(bx + 2\pi) = \sin\left(b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)\right)$, niin funktion $\sin bx$ perusjakso on $\frac{2\pi}{b}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio b.

$\frac{2\pi}{b} = 24$ Funktion $f(t)$ perusjakso on 24 (tuntia).

$$b = \frac{2\pi}{24} = 0,2617\ldots \approx 0,262$$

Vakio d siirtää funktion kuvaajaa ylöspäin.

Funktion $a\sin bx = 7,2\sin 0,262x$ suurin arvo 7,2. Funktion $7,2\sin 0,262x + d$ suurimman arvon tulee olla 22,4.

Funktion $7,2\sin 0,262x$ kuvaajaa on siirrettävä $22,4 - 7,2 = 15,2$ yksikköä ylöspäin, joten $d = 15,2$.

On määritetty vakioiden a, b ja d arvot. Funktion f lauseke on $f(t)=7,2\sin\left(0,262\left(t-c\right)\right)+15,2$.

Vakio c siirtää kuvaajaa vaakasuunnassa.

Vakio c voidaan määrittää, kun tiedetään yksi muuttujan t arvo ja sitä vastaava funktion arvo.

Kello 12.30 on vuorokauden alusta kulunut 12,5 tuntia ja lämpötila on $22,4°$. Siis $f(12,5)=22,4$.

Ratkaistaan yhtälö laskimella ja rajataan ratkaisu välille $0\le c\le 24$.

$$f(12,5)=22,4$$

$$7,2\sin\left(0,262\left(12,5-c\right)\right)+15,2=22,4$$

$$c=6,504...\approx 6,50$$

Saadaan $f(t)=7,2\sin\left(0,262\left(t-6,50\right)\right)+15,2$.

b) Lämpötilan muutosnopeuden kertoo funktion derivaattafunktion arvo.

Derivoidaan funktio.

$$f'(t) = 7,2\cos\big(0,262(t-6,5)\big)\cdot 0,262$$
$$= 1,8864\cos\big(0,262(t-6,5)\big)$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo, kun $t = 8$ ja $t = 18$.

$$f'(8) = 1,8864\cos\big(0,262(8-6,5)\big) = 1,74...\ (°\text{C/h})$$

$$f'(18) = 1,8864\cos\big(0,262(18-6,5)\big) = -1,87...\ (°\text{C/h})$$

Klo 8.00 lämpötila nousee nopeudella 1,7 °C/h ja
klo 18.00 lämpötila laskee nopeudella 1,9 °C/h.

Vastaus

a) $f(t) = 7,2\sin\big(0,262(t-6,5)\big) + 15,2$

b) klo 8.00 lämpötila nousee nopeudella 1,7 °C/h,
klo 18.00 lämpötila laskee nopeudella 1,9 °C/h