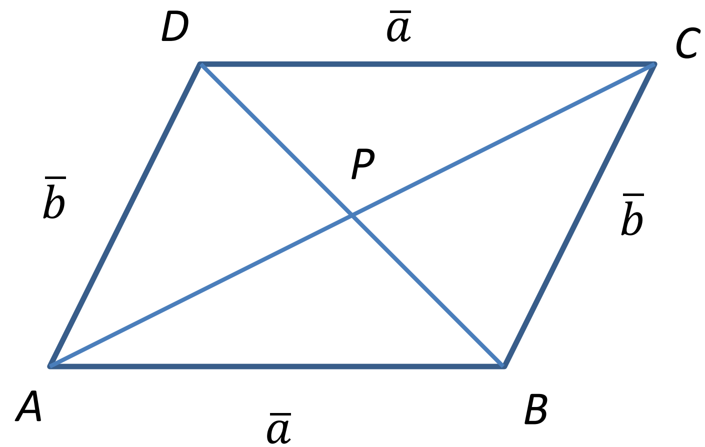
Tehtävä 241, s. 73

(Vastakkaiset sivut yhtä pitkiä ja yhdensuuntaisia.)

Oletus: Nelikulmio on suunnikas, merkitään $ABCD$ eli $\overline{AB} = \overline{DC}$ ja $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Väite: Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa eli $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ja $\overline{PD} = \frac{1}{2}\overline{BD}$, kun *P* on lävistäjien leikkauspiste.



Todistus:

Merkitään $\overline{AB} = \overline{DC} = \bar{a}$ ja $\overline{AD} = \overline{BC} = \bar{b}$.

Lävistäjät voidaan esittää muodossa

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \bar{a} + \bar{b}$ ja

$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = -\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} - \bar{a}$.

Nyt voidaan merkitä $\overline{AP} = s\overline{AC}$ ja $\overline{PD} = r\overline{BD}$, missä $0 < r < 1$ ja $0 < s < 1$.

(Pitää osoittaa, että jakosuhteet $s = r = ½$, jolloin piste *P* puolittaa lävistäjät.)

Esitetään vektori $\bar{b}$ (tai vastaavasti $\bar{a}$) pisteen *P* kautta kulkevien vektorien avulla:

$$\bar{b} = \overline{AP} + \overline{PD} = s\overline{AC} + r\overline{BD}$$

$$\bar{b} = s(\bar{a} + \bar{b}) + r(\bar{b} - \bar{a}) = s\bar{a} + s\bar{b} + r\bar{b} - r\bar{a} = s\bar{a} - r\bar{a} + s\bar{b} + r\bar{b} = (s - r)\bar{a} + (s + r)\bar{b}.$$

Komponenttien yksikäsitteisyyden perusteella $s - r = 0$ ja $s + r = 1$ eli $s = r = ½$.
Tämä todistaa väitteen.