

Kertausosa

1. a) $1,6 \cdot 360^\circ = 576^\circ$

b) Peruuttaessa pyörähdysuunta on vastapäivään. Kulma on siis $-2,4 \cdot 360^\circ = -864^\circ$

Vastaus: a) 576° b) -864°

2. a) $\alpha = \frac{b}{r} = \frac{0,88 \text{ m}}{1,3 \text{ m}} = 0,6769... \approx 0,68 \text{ (rad)}$

b) $\beta = \frac{83 \text{ cm}}{43 \text{ cm}} = 1,930... \approx 1,9 \text{ (rad)}$

Vastaus: a) $\alpha \approx 0,68 \text{ (rad)}$ b) $\beta \approx 1,9 \text{ (rad)}$

3. a) $51,0^\circ = 51,0^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = 0,89011... \text{ rad} \approx 0,890 \text{ rad}$

b) $127^\circ = 127^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = 2,216... \text{ rad} \approx 2,22 \text{ rad}$

c) $445^\circ = 445^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = 7,766... \text{ rad} \approx 7,77 \text{ rad}$

Vastaus: a) $0,890 \text{ rad}$ b) $2,22 \text{ rad}$ c) $7,77 \text{ rad}$

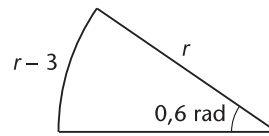
4. a) $6,12 \text{ rad} = 6,12 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 350,6...^\circ \approx 351^\circ$

b) $0,24 \text{ rad} = 0,24 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 13,7...^\circ \approx 14^\circ$

c) $11,0 \text{ rad} = 11,0 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 630,25...^\circ \approx 630^\circ$

Vastaus: a) 351° b) 14° c) 630°

5. Merkitään sädettä kirjaimella r . Kaaren pituus on tällöin $r - 3$.



$$\alpha = \frac{b}{r}$$

$$0,6 = \frac{r-3}{r} \quad | \cdot r \neq 0$$

$$0,6r = r - 3$$

$$-0,4r = -3 \quad | :(-0,4)$$

$$r = 7,5$$

Vastaus: $7,5 \text{ cm}$

6. a) $\sin \frac{\pi}{8} = 0,3826... \approx 0,383$

b) $\cos \frac{2\pi}{5} = 0,30901... \approx 0,309$

c) $\tan \frac{\pi}{11} = 0,29362... \approx 0,294$

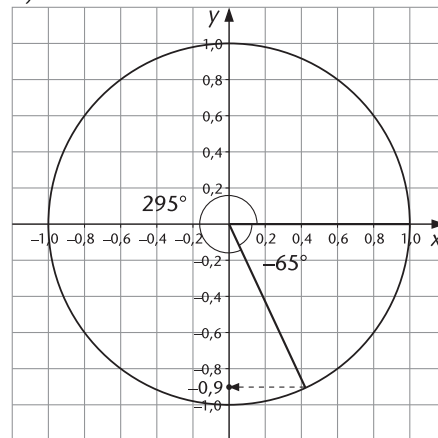
7.

a) Sinin arvo on sama kuin kehäpisteen y -koordinaatti.

Kuvan perusteella $\sin 65^\circ \approx 0,9$.

Laskimella $\sin 65^\circ = 0,9063...$

b) $360^\circ - 65^\circ = 295^\circ$



Kuvan perusteella $\sin 295^\circ \approx -0,9$.

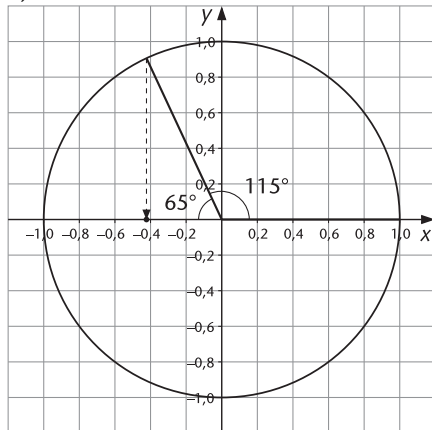
Laskimella $\sin 295^\circ = -0,9063...$

c) Kosinin arvo sama kuin kehäpisteen x -koordinaatti.

Kuvan perusteella $\cos 65^\circ \approx 0,4$

Laskimella $\cos 65^\circ = 0,4226\dots$

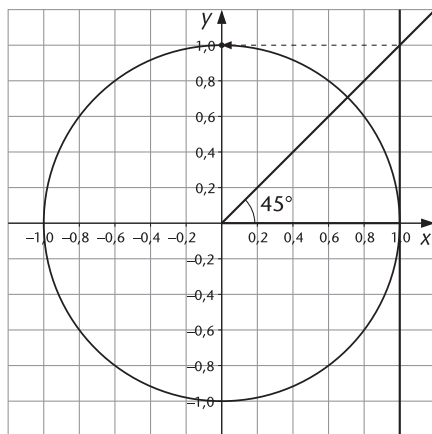
d) $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$



Kuvan perusteella $\cos 115^\circ \approx -0,4$

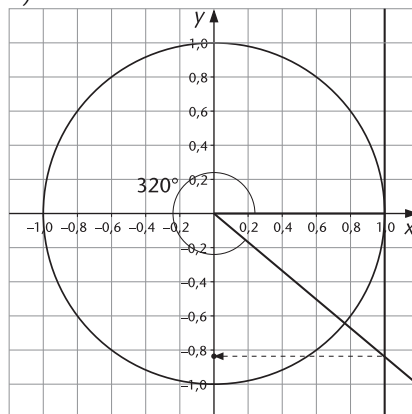
Laskimella $\cos 115^\circ = -0,4226\dots$

8. a) Tangentti on sama kuin tangenttisuoran ja kulman vasemman kyljen leikkauspisteen y -koordinaatti.



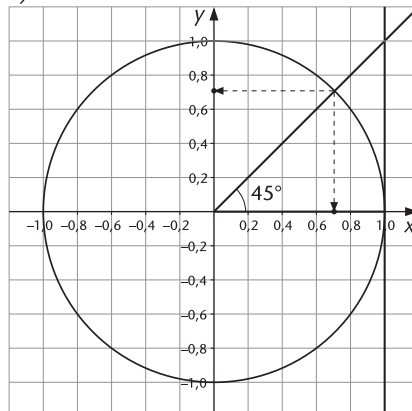
$\tan 45^\circ \approx 1$

b)



$\tan 320^\circ \approx -0,8$

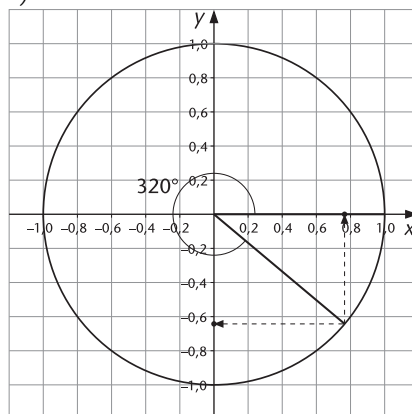
c)



$\sin 45^\circ \approx 0,7$

d) $\cos 45^\circ \approx 0,7$

e)



$\sin 320^\circ \approx -0,6$

f) $\cos 320^\circ \approx 0,8$

9. a) Ratkaistaan ensin $\cos \beta$ yhtälöstä

$$(\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (\cos \beta)^2 = 1$$

$$\frac{1}{16} + (\cos \beta)^2 = 1$$

$$(\cos \beta)^2 = \frac{15}{16}$$

$$\cos \beta = \pm \sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$\cos \beta = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Koska kulma β sijaitsee ensimmäisessä neljänneksessä, on kosinin arvo positiivinen.

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Lasketaan $\tan \beta$ tarkka arvo sinin ja kosinin avulla.

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

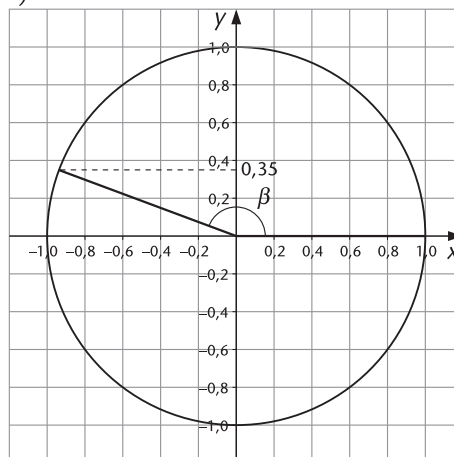
$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}$$

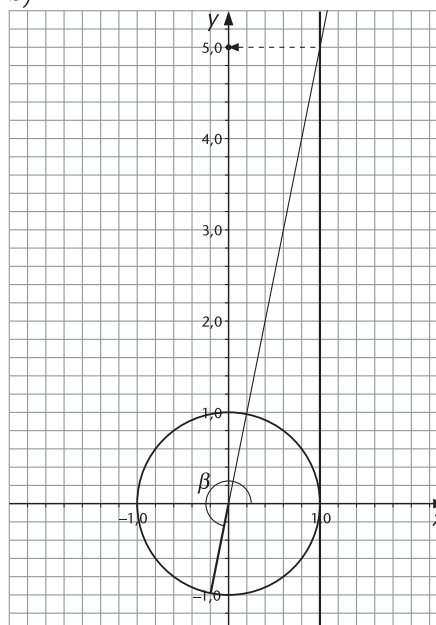
$$\text{Vastaus: } \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

10. a)



$$\beta \approx 160^\circ$$

b)



$$\beta \approx 260^\circ$$

$$11. \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

Kerrotaan ristiin.

$$\sin x \cdot \sin x = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$$

$$(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$$

$$\underbrace{(\sin x)^2 + (\cos x)^2}_1 = 1$$

Yhtälö on tosi. $\square$

12. $\tan 150^\circ = \tan(120^\circ + 30^\circ)$

Kaavan mukaan

$$\begin{aligned}\tan(120^\circ + 30^\circ) &= \frac{\tan 120^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 120^\circ \cdot \tan 30^\circ} \\ &= \frac{-\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - (\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

Sievennetään nimittäjä

$$\begin{aligned}&\frac{-\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - (\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{-\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{-\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2}\end{aligned}$$

Lavennetaan osoittajan termit samannimiksi

$$\begin{aligned}&\stackrel{(\sqrt{3})}{=} \frac{-\sqrt{3}}{1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{-\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Vastaus: $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

13. a)

$$\sin x = 0,54$$

$$x = 32,6\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x \approx 33^\circ + n \cdot 360^\circ$$

TAI

$$x = 180^\circ - 32,6\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x = 147,3\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x \approx 147^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

b)

$$\sin x = -0,26$$

$$x = -15,07\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x \approx -15^\circ + n \cdot 360^\circ$$

TAI

$$x = 180^\circ - (-15,07\dots^\circ) + n \cdot 360^\circ$$

$$x = 195,07\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x \approx 195^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

14.

$$\sin 2\beta = 0,40$$

$$2\beta = 23,57\dots^\circ + n \cdot 360^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 11,78\dots^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\beta \approx 11,8^\circ + n \cdot 180^\circ$$

TAI

$$2\beta = 180^\circ - 23,57\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$2\beta = 156,42\dots^\circ + n \cdot 360^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 78,21\dots^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\beta \approx 78,2^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Vastaus:

$$\beta \approx 11,8^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\beta \approx 78,2^\circ + n \cdot 180^\circ$$

15. Sijoitetaan $s = 24$ cm yhtälöön.

$$48 \sin(75t^\circ) = 24 \quad | :48$$

$$\sin(75t^\circ) = 0,5$$

$$75t^\circ = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \quad | :75^\circ$$

$$t = 0,4 + n \cdot 4,8$$

TAI

$$75t^\circ = 180^\circ - 30^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$75t^\circ = 150^\circ + n \cdot 360^\circ \quad | :75^\circ$$

$$t = 2 + n \cdot 4,8$$

Ensimmäisen kerran hypyn korkeus on 24 cm kun $t = 0,4$ s.

16.

$$5 \sin 3x - 4 = 0$$

$$5 \sin 3x = 4 \quad | :5$$

$$\sin 3x = \frac{4}{5}$$

$$3x = 0,927... + n2\pi \quad | :3$$

$$x = 0,309... + n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$x \approx 0,31 + n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

TAI

$$3x = \pi - 0,927... + n2\pi$$

$$x = 2,214... + n2\pi \quad | :3$$

$$x = 0,738... + n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$x \approx 0,74 + n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

Vastaus:

$$x \approx 0,31 + n \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ tai } x \approx 0,74 + n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

17. a) Asteina:

$$\cos \alpha = 0,15$$

$$\alpha = \pm 81,37...^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\alpha \approx \pm 81^\circ + n \cdot 360^\circ$$

Radiaaneina:

$$\cos \alpha = 0,15$$

$$\alpha = \pm 1,420... + n2\pi$$

$$\alpha \approx \pm 1,4 + n2\pi$$

b) Asteina:

$$\tan \alpha = 18$$

$$\alpha = 86,8...^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\alpha \approx 87^\circ + n \cdot 180^\circ$$

Radiaaneina:

$$\tan \alpha = 18$$

$$\alpha = 1,515... + n\pi$$

$$\alpha \approx 1,5 + n\pi$$

Vastaus: a) $\alpha \approx \pm 81^\circ + n \cdot 360^\circ$

$$\alpha \approx \pm 1,4 + n2\pi$$

b) $\alpha \approx 87^\circ + n \cdot 180^\circ$

$$\alpha \approx 1,5 + n\pi$$

$$18. a) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + n2\pi$$

$$b) \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

19. a)

$$3 \cos 4x = 1 \quad | :3$$

$$\cos 4x = \frac{1}{3}$$

$$4x = \pm 70,52...^\circ + n \cdot 360^\circ \quad | :4$$

$$x = \pm 17,63...^\circ + n \cdot 90^\circ$$

$$x \approx \pm 17,6^\circ + n \cdot 90^\circ$$

b)

$$\tan 2x - 5 = 2$$

$$\tan 2x = 7$$

$$2x = 81,86...^\circ + n \cdot 180^\circ \quad | :2$$

$$x = 40,93...^\circ + n \cdot 90^\circ$$

$$x \approx 40,9^\circ + n \cdot 90^\circ$$

Vastaus:

a) $x \approx \pm 17,6^\circ + n \cdot 90^\circ$

b) $x \approx 40,9^\circ + n \cdot 90^\circ$

20. $v_0 = 47 \text{ m/s} \quad l = 120 \text{ m}$

$\beta = 18^\circ \quad Q = 0,144 \text{ s}^2/\text{m}$

Sijoitetaan arvot yhtälöön.

$$120 = 0,144 \cdot 47^2 (\tan \gamma - \tan 18^\circ)$$

$$120 = 318,096 \cdot \tan \gamma - 318,096 \cdot \tan 18^\circ$$

$$318,096 \cdot \tan \gamma = 120 + 318,096 \cdot \tan 18^\circ \quad | :318,096$$

$$\tan \gamma = \frac{120 + 318,096 \cdot \tan 18^\circ}{318,096}$$

$$\tan \gamma = 0,7021...$$

$$\gamma = 35,07...^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\gamma \approx 35^\circ + n \cdot 180^\circ$$

Vastaus: 35 asteen kulmassa

21. Sijoitetaan yhtälöön $b = 30,0 \text{ m}$.

$$30,0 = 4,0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 32,0$$

$$4,0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -2,0 \quad | :4,0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -0,5$$

$$\frac{\pi}{12}t = \pm 2,094... + n2\pi \quad | \cdot 12$$

$$\pi t = \pm 25,132... + n24\pi \quad | : \pi$$

$$t = \pm 8 + n24$$

Kun $n = 0$, $t = 8 \text{ h}$ eli kello on 9.00.

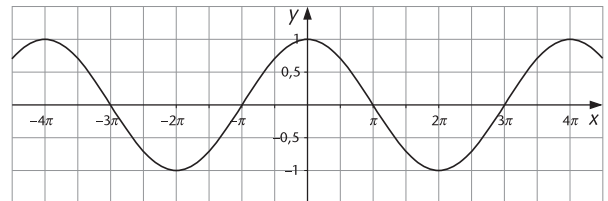
Vastaus: Kello on 9.00

22.

x	$\cos \frac{1}{2}x$
-4π	$\cos\left(\frac{1}{2} \cdot (-4\pi)\right) = \cos(-2\pi) = 1$
-3π	$\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 0$
$-2,5\pi$	$\cos\left(\frac{-2,5\pi}{2}\right) = -0,707...$
-2π	$\cos\left(\frac{-2\pi}{2}\right) = -1$
$-1,5\pi$	$\cos\left(\frac{-1,5\pi}{2}\right) = -0,707...$
$-\pi$	$\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$
$-0,5\pi$	$\cos\left(\frac{-0,5\pi}{2}\right) = -0,707...$
0	$\cos\left(\frac{0}{2}\right) = 1$

Piiirretään näiden perusteella funktion

$$f(x) = \cos \frac{1}{2}x \text{ kuvaaja.}$$



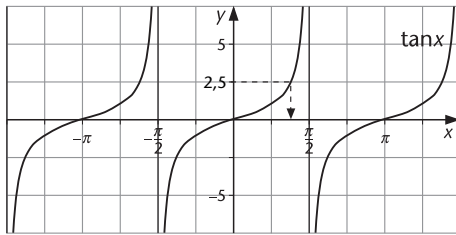
23. Funktio $\sin x$ saa suurimmillaan arvon 1

kohdassa $\frac{\pi}{2} \approx 1,6$. Tästä syystätummansinisellä piirretty on $\sin x$:n kuvaaja. Tällöin $A = 1$.Funktio $2\sin x$ saa suurimmillaan arvon $2 \cdot 1 = 2$, joten tummanpunaisella piirretty on sen kuvaaja. Tällöin $A = 2$.Funktio $3\sin x$ kuvaaja on tällöin piirretty tummanvihreällä eli $A = 3$.

Funktio $-\sin x$ saa pienimmän arvonsa -1 kohdassa $\frac{\pi}{2} \approx 1,6$. Vaaleansininen kuvaaja on funktion $-\sin x$ kuvaaja eli $A = -1$.

Oranssi kuvaaja kuvaa funktiota $-2\sin x$ eli $A = -2$

24.



Kuvaajan perusteella yhtälö $\tan x = 2,5$ toteutuu esimerkiksi kohdassa, joka on $\frac{\pi}{4} : n$

ja $\frac{\pi}{2} : n$ puolella välissä.

$$x = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

Yhtälön $\tan x = 3$ ratkaisu

$$x \approx \frac{3\pi}{8} + n\pi$$

$$\text{Vastaus: } x \approx \frac{3\pi}{8} + n\pi$$

25. a)

$$-2\cos 2x + 0,2 = 0$$

$$-2\cos 2x = -0,2 \quad | :(-2)$$

$$\cos 2x = 0,1$$

$$2x = \pm 84,26...^\circ + n \cdot 360^\circ \quad | :2$$

$$x = \pm 42,13...^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$x \approx \pm 42^\circ + n \cdot 180^\circ$$

b)

$$\tan 2x - 6 = 0$$

$$\tan 2x = 6$$

$$2x = 80,53...^\circ + n \cdot 180^\circ \quad | :2$$

$$x = 40,26...^\circ + n \cdot 90^\circ$$

$$x \approx 40^\circ + n \cdot 90^\circ$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Vastaus:

$$\text{a) } x \approx 42^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\text{b) } x \approx 40^\circ + n \cdot 90^\circ$$

26. a) Vaunu sijaitsee kauimpana, kun $\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$

saa suurimman arvonsa.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right) = 1$$

$$\frac{3\pi}{4}t = 1,5707... + n2\pi$$

TAI

$$\frac{3\pi}{4}t = \pi - 1,57... + n2\pi$$

$$= 1,57... + n2\pi \text{ (samat kulmat)}$$

$$\frac{3\pi}{4}t = 1,57... + n2\pi \quad | \cdot 4$$

$$3\pi t = 6,28... + n8\pi \quad | :3\pi$$

$$t = 0,666... + n \cdot 2,66...$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ensimmäisen kerran kauimpana, kun

$$t = 0,666...s \approx 0,67s$$

b) Kun $\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right) = 1$, niin funktio saa arvon

$$5,0 \cdot 1 = 5,0 \text{ (cm)}.$$

Vastaus: a) 0,67 s b) 5,0 cm

27. a)

$$\begin{aligned}
 f(5,4) &= 130 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 5,4\right) \\
 &= 170,45... \\
 &\approx 170 \text{ (cm)}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 155 \\
 130 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) &= 155 \\
 50 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) &= 25 \quad | :50 \\
 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) &= 0,5 \\
 \frac{\pi}{2} t &= 0,523... + n2\pi \quad | \cdot 2 \\
 \pi t &= 1,047... + n4\pi \quad | : \pi \\
 t &= 0,33... + 4n \\
 \text{TAI} \\
 \frac{\pi}{2} t &= \pi - 0,523... + n2\pi \\
 \frac{\pi}{2} t &= 2,617... + n2\pi \quad | \cdot 2 \\
 \pi t &= 5,23... + n4\pi \quad | : \pi \\
 t &= 1,66... + 4n \\
 n &= 0, \pm 1, \pm 2, ...
 \end{aligned}$$

Ensimmäisen kerran sormenpäiden etäisyys on 155 cm, kun aikaa on kulunut $0,333...s \approx 0,33s$.

Toisen kerran etäisyys on 155 cm, kun aikaa on kulunut $1,66...s \approx 1,7s$.

Kun $n = 1$, saadut ajat ovat toisella kierroksella.

c) Yhteen pyöräytykseen kuluu jakson verran aikaa eli 4 s.

Vastaus:

- a) 170 cm
b) 0,33 s ja 1,7 s
c) 4 s

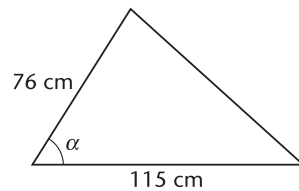
28. a)

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \cdot 3,4 \cdot 3,6 \cdot \sin 118^\circ \\
 &= 5,403... \\
 &\approx 5,4 \text{ (m}^2\text{)}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 A &= 13 \cdot 22 \cdot \sin 42^\circ \\
 &= 191,37... \\
 &\approx 190 \text{ (cm}^2\text{)}
 \end{aligned}$$

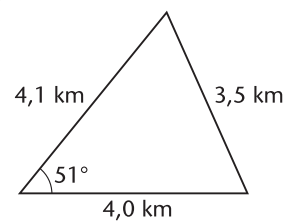
Vastaus: a) $5,4 \text{ cm}^2$ b) 190 cm^2

29. $37,1 \text{ dm}^2 = 3710 \text{ cm}^2$ 

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \cdot 76 \cdot 115 \cdot \sin \alpha &= 3710 \\
 4370 \cdot \sin \alpha &= 3710 \quad | :4370 \\
 \sin \alpha &= \frac{3710}{4370} \\
 \alpha &= 58,09...^\circ \\
 \alpha &\approx 58^\circ
 \end{aligned}$$

Vastaus: 58°

30.



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \cdot 4,0 \text{ km} \cdot 4,1 \text{ km} \cdot \sin 51^\circ \\
 &= 6,372... \text{ km}^2 \approx 6,4 \text{ km}^2
 \end{aligned}$$

Vastaus: $6,4 \text{ km}^2$

31. Särmiön tilavuus

$$V = A_p \cdot h$$

$$\text{Korkeus } h = 7,5 \text{ cm}$$

$$A_p = \frac{1}{2} \cdot 18 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm} \cdot \sin 30^\circ = 81 \text{ cm}^2$$

Tilavuus

$$V = 81 \text{ cm}^2 \cdot 7,5 \text{ cm}$$

$$= 607,5 \text{ cm}^3$$

$$\approx 610 \text{ cm}^3$$

$$\text{Vastaus: } 610 \text{ cm}^3$$

32. a)

$$\frac{84}{\sin 88^\circ} = \frac{x}{\sin 28^\circ}$$

$$x \cdot \sin 88^\circ = 84 \cdot \sin 28^\circ \quad | : \sin 88^\circ$$

$$x = \frac{84 \cdot \sin 28^\circ}{\sin 88^\circ}$$

$$x = 39,45\dots$$

$$x \approx 39 \text{ (cm)}$$

b)

$$\frac{6,2}{\sin 21^\circ} = \frac{x}{\sin 142^\circ}$$

$$x \cdot \sin 21^\circ = 6,2 \cdot \sin 142^\circ \quad | : \sin 21^\circ$$

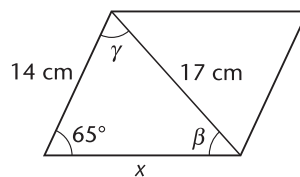
$$x = \frac{6,2 \cdot \sin 142^\circ}{\sin 21^\circ}$$

$$x = 10,65\dots$$

$$x \approx 11 \text{ (dm)}$$

$$\text{Vastaus: a) } 39 \text{ cm} \quad \text{b) } 11 \text{ dm}$$

33.

Ratkaistaan ensin kulma β .

$$\frac{14}{\sin \beta} = \frac{17}{\sin 65^\circ}$$

$$17 \sin \beta = 14 \sin 65^\circ \quad | : 17$$

$$\sin \beta = \frac{14 \sin 65^\circ}{17}$$

$$\beta = 48,27\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

TAI

$$\beta = 180^\circ - 48,27\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$= 131,72\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

Ei käy, koska β osana kolmiota,
jonka toinen kulma on 65° .

$$\beta = 48,27\dots^\circ$$

Kulma γ saadaan kolmion kulmien
summasta.

$$65^\circ + 48,27\dots^\circ + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 66,72\dots^\circ$$

Ratkaistaan sivun x pituus

$$\frac{x}{\sin 66,72\dots^\circ} = \frac{17}{\sin 65^\circ}$$

$$x \cdot \sin 65^\circ = 17 \cdot \sin 66,72\dots^\circ \quad | : \sin 65^\circ$$

$$x = \frac{17 \cdot \sin 66,72\dots^\circ}{\sin 65^\circ}$$

$$x = 17,230\dots \text{ (cm)}$$

Suunnikkaan ala

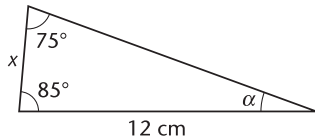
$$A = 14 \text{ cm} \cdot 17,230\dots \text{ cm} \cdot \sin 65^\circ$$

$$= 218,62\dots \text{ cm}^2$$

$$\approx 220 \text{ cm}^2$$

$$\text{Vastaus: } 220 \text{ cm}^2$$

34.



$$\alpha = 180^\circ - 85^\circ - 75^\circ = 20^\circ$$

Ratkaistaan sivun x pituus.

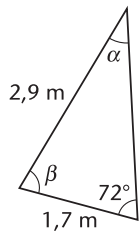
$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin 20^\circ} &= \frac{12}{\sin 75^\circ} \\ x \cdot \sin 75^\circ &= 12 \cdot \sin 20^\circ \quad | : \sin 75^\circ \\ x &= \frac{12 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 75^\circ} \\ x &= 4,249... \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Kolmion ala

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ cm} \cdot 4,249... \text{ cm} \cdot \sin 85^\circ \\ &= 25,397... \text{ cm}^2 \approx 25 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Vastaus: 25 cm^2

35.



$$\begin{aligned}\frac{1,7}{\sin \alpha} &= \frac{2,9}{\sin 72^\circ} \\ 2,9 \cdot \sin \alpha &= 1,7 \cdot \sin 72^\circ \quad | : 2,9 \\ \sin \alpha &= \frac{1,7 \cdot \sin 72^\circ}{2,9} \\ \alpha &= 33,88...^\circ (+n \cdot 360^\circ) \approx 34^\circ \\ &\text{TAI} \\ \alpha &= 180^\circ - 33,88...^\circ (+n \cdot 360^\circ) \\ \alpha &= 146,11...^\circ \quad \text{Ei käy}\end{aligned}$$

Kolmas kulma

$$\beta = 180^\circ - 72^\circ - 34^\circ = 74^\circ$$

Vastaus: Muut kulmat 34° ja 74°

36. a)

$$x^2 = 14^2 + 19^2 - 2 \cdot 14 \cdot 19 \cdot \cos 32^\circ$$

$$x^2 = 557 - 532 \cdot \cos 32^\circ$$

$$x^2 = 105,83...$$

$$x = \pm \sqrt{105,83...}$$

$$x = \pm 10,28...$$

Sivun pituus positiivinen, joten $x \approx 10 \text{ m}$.

b)

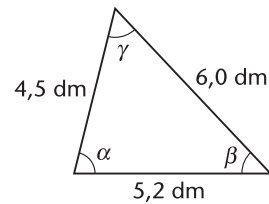
$$x^2 = 2^2 + 2,2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2,2 \cdot \cos 110^\circ$$

$$x^2 = 11,849...$$

$$x = \pm 3,442...$$

Sivun pituus positiivinen, joten $x \approx 3,4 \text{ dm}$.Vastaus: a) 10 m b) $3,4 \text{ dm}$

37.



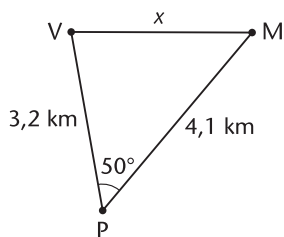
$$\begin{aligned}6^2 &= 4,5^2 + 5,2^2 - 2 \cdot 4,5 \cdot 5,2 \cdot \cos \alpha \\ 36 &= 47,29 - 46,8 \cos \alpha \\ 46,8 \cos \alpha &= 11,29 \quad | : 46,8 \\ \cos \alpha &= \frac{11,29}{46,8} \\ \alpha &= 76,04...^\circ \approx 76^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4,5^2 &= 5,2^2 + 6,0^2 - 2 \cdot 5,2 \cdot 6,0 \cdot \cos \beta \\ 20,25 &= 63,04 - 62,4 \cdot \cos \beta \\ 62,4 \cdot \cos \beta &= 42,79 \quad | : 62,4 \\ \cos \beta &= \frac{42,79}{62,4} \\ \beta &= 46,70...^\circ \approx 47^\circ\end{aligned}$$

$$\gamma = 180^\circ - 47^\circ - 76^\circ = 57^\circ$$

Vastaus: 47° , 57° ja 76°

38.



$$x^2 = 3,2^2 + 4,1^2 - 2 \cdot 3,2 \cdot 4,1 \cdot \cos 50^\circ$$

$$x^2 = 10,183...$$

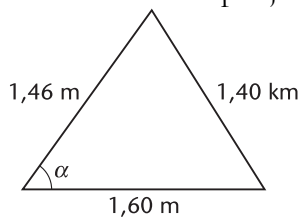
$$x = \pm 3,191...$$

Pituus positiivinen, joten $x \approx 3,2$ km

Vastaus: 3,2 km

39. Särmiön tilavuus $V = A_p \cdot b$

Selvitetään ensin pohjan ala.



$$1,40^2 = 1,46^2 + 1,60^2 - 2 \cdot 1,46 \cdot 1,60 \cdot \cos \alpha$$

$$1,96 = 4,6916 - 4,672 \cdot \cos \alpha$$

$$4,672 \cdot \cos \alpha = 2,7316 \quad | :4,672$$

$$\cos \alpha = \frac{2,7316}{4,672}$$

$$\alpha = 54,21...^\circ$$

Kolmion ala

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{1}{2} \cdot 1,46 \text{ m} \cdot 1,60 \text{ m} \cdot \sin 54,21...^\circ \\ &= 0,947... \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Tilavuudesta saadaan yhtälö

$$0,947... \cdot b = 1,04 \quad | :0,947...$$

$$b = 1,097...$$

$$b \approx 1,10 \text{ (m)}$$

Vastaus: 1,10 m

40. a) $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ b) $\vec{e}$ c) $\vec{b}$, $\vec{c}$ ja $\vec{e}$ d) $\vec{b}$ e) $\vec{d}$ ja $\vec{f}$

41. a) Vastavektori on samanpituinen, mutta vastakkaissuuntainen.



b)



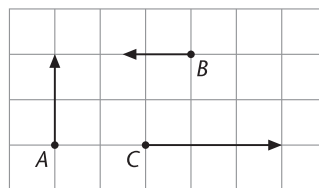
c)



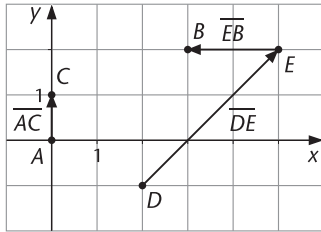
d) Yksikkövektorin pituus on 1. Alkuperäisen vektorin pituus on kolme, joten yksikkövektori on:



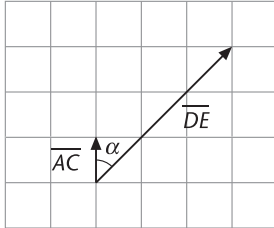
42.



43.

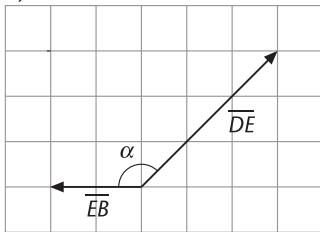


a) Siirretään vektorit alkamaan samasta pisteestä.



Vektorien välinen kulma α on neliön sivun ja lävistäjän välinen kulma.
 $\alpha = 45^\circ$

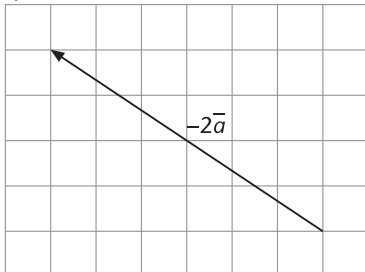
b)



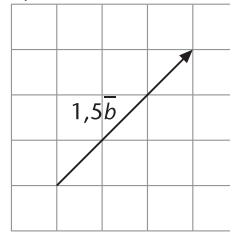
Kulma
 $\alpha = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

Vastaus: a) 45° b) 90°

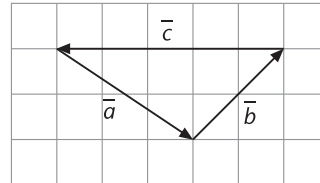
44. a)



b)

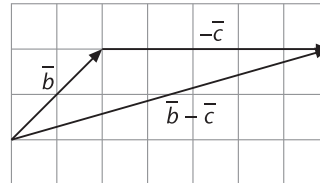


c)

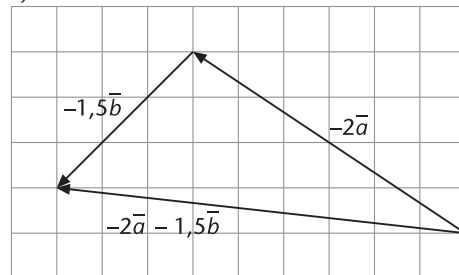


$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

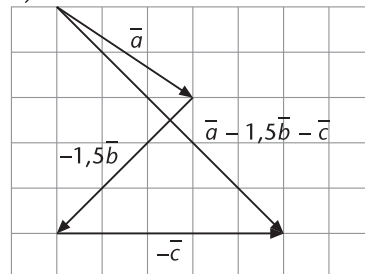
d)



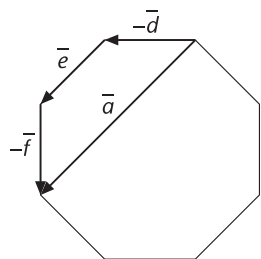
45. a)



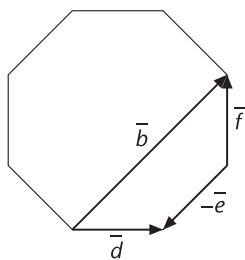
b)



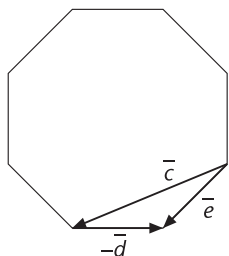
46.



$$\vec{a} = \vec{e} - \vec{d} - \vec{f}$$



$$\vec{b} = \vec{d} - \vec{e} + \vec{f}$$



$$\vec{c} = \vec{e} - \vec{d}$$

47. a) $\vec{a} = 1 \cdot \vec{b}$ ja $1 > 0$, niin $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$.

b) $\frac{1}{2} \vec{a} = \vec{b}$ ja $\frac{1}{2} > 0$, niin $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$.

c) $\vec{a} = -3\vec{b}$

Koska $-3 < 0$, niin $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

d) $4\vec{a} - 5\vec{b} = \vec{0}$

$$4\vec{a} = 5\vec{b} \quad | :4$$

$$\vec{a} = \frac{5}{4}\vec{b}$$

Koska $\frac{5}{4} > 0$, niin $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$.

Vastaus: a) on b) on c) ei d) on

48. Tapion siirtymävektori

$$5\vec{a} + 10\vec{b} + \vec{t} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{t} = -\vec{a} - 7\vec{b}$$

Pekan siirtymävektori

$$\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{p} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$$

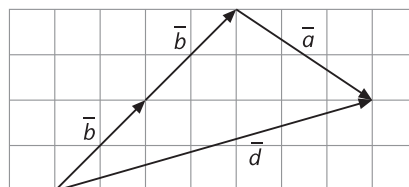
$$\vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b}$$

Vastaus:

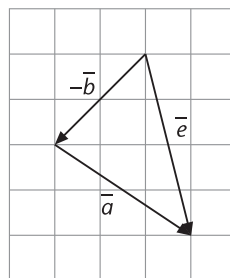
$$\vec{t} = -\vec{a} - 7\vec{b}$$

$$\vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b}$$

49.



$$\vec{d} = 2\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + 2\vec{b}$$



$$\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$$

Vastaus:

$$\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$$

50.

$$-7\vec{i} - \vec{j} = r(2\vec{i} - \vec{j}) + t(\vec{i} + 4\vec{j})$$

$$-7\vec{i} - \vec{j} = 2r\vec{i} - r\vec{j} + t\vec{i} + 4t\vec{j}$$

$$-7\vec{i} - \vec{j} = (2r + t)\vec{i} + (-r + 4t)\vec{j}$$

Komponenttien oltava samat.

$$\begin{cases} 2r + t = -7 \\ -r + 4t = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r + t = -7 \\ -r + 4t = -1 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} 2r + t = -7 \\ -2r + 8t = -2 \end{cases}$$

$$9t = -9 \quad |:9$$

$$t = -1$$

Sijoitetaan $t = -1$ yhtälöön $-r + 4t = -1$.

$$-r + 4 \cdot (-1) = -1$$

$$-r - 4 = -1$$

$$-r = 3 \quad | \cdot (-1)$$

$$r = -3$$

Vastaus: $-3(2\bar{i} - \bar{j}) - 1(\bar{i} + 4\bar{j})$

51.

$$5\bar{i} + 6\bar{j} - \bar{k} = r(\bar{i} + \bar{k}) + s(\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k})$$

$$5\bar{i} + 6\bar{j} - \bar{k} = r\bar{i} + r\bar{k} + s\bar{i} + 2s\bar{j} - s\bar{k}$$

$$5\bar{i} + 6\bar{j} - \bar{k} = (r + s)\bar{i} + 2s\bar{j} + (r - s)\bar{k}$$

Komponenttien tulee olla samat.

$$\begin{cases} r + s = 5 \\ 2s = 6 \\ r - s = -1 \end{cases}$$

$$2s = 6 \quad |:2$$

$$s = 3$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan:

$$r + 3 = 5$$

$$r = 2$$

Tutkitaan toteutuuko viimeinen yhtälö, kun

$$r = 2 \text{ ja } s = 3.$$

$$r - s = -1$$

$$2 - 3 = -1$$

$$-1 = -1 \text{ Tosi}$$

Vastaus: $2(\bar{i} + \bar{k}) + 3(\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k})$

52.

$$-2k(\bar{a} - 5\bar{b}) - s(-\bar{a} + 3\bar{b})$$

$$= -2k\bar{a} - 10k\bar{b} + s\bar{a} - 3s\bar{b}$$

$$= (-2k + s)\bar{a} + (10k - 3s)\bar{b}$$

Jotta vektorit olisivat samat, on oltava voimassa ehdot:

$$\begin{cases} -2k + s = -3 \\ 10k - 3s = 23 \end{cases} \quad | \cdot 5$$

$$\begin{cases} -2k + s = -3 \\ -10k + 5s = -15 \\ 10k - 3s = 23 \end{cases}$$

$$2s = 8 \quad |:2$$

$$s = 4$$

Sijoitetaan $s = 4$ ensimmäiseen yhtälöön.

$$-2k + 4 = -3$$

$$-2k = -7 \quad | :(-2)$$

$$k = \frac{7}{2}$$

$$k = 3\frac{1}{2}$$

Vastaus: $k = 3\frac{1}{2}, s = 4$

53. Vektorit yhdensuuntaiset, kun löytyy luku $t \neq 0$, jolla on voimassa ehto

$$\bar{v} = t\bar{u}$$

$$6\bar{i} - 14\bar{j} + 4\bar{k} = t(2x\bar{i} + 7\bar{j} - 2\bar{k})$$

$$6\bar{i} - 14\bar{j} + 4\bar{k} = 2xt\bar{i} + 7t\bar{j} - 2t\bar{k}$$

$$\begin{cases} 2xt = 6 \\ 7t = -14 \\ -2t = 4 \end{cases}$$

Jos $7t = -14$, niin $t = -2$.

Jos $-2t = 4$, niin $t = -2$.

Sijoitetaan $t = -2$ ensimmäiseen yhtälöön.

$$2x \cdot (-2) = 6$$

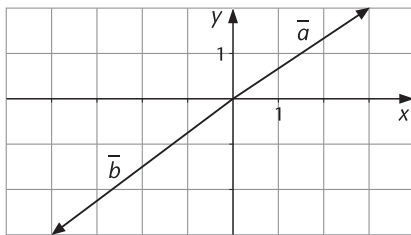
$$-4x = 6 \quad | :(-4)$$

$$x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Koska $t = -2 < 0$, vektorit ovat erisuuntaisia.

Vastaus: $x = -\frac{3}{2}$, vektorit ovat erisuuntaisia

54.



$$a) |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b) \vec{b} = \frac{-4\vec{i} - 3\vec{j}}{5} = -\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$$

$$c) \vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + (-4\vec{i} - 3\vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j}$$

$$\begin{aligned} d) \vec{a} - \vec{b} &= 3\vec{i} + 2\vec{j} - (-4\vec{i} - 3\vec{j}) \\ &= 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{i} + 3\vec{j} \\ &= 7\vec{i} + 5\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) -2\vec{a} - 5,5\vec{b} &= -2(3\vec{i} + 2\vec{j}) - 5,5(-4\vec{i} - 3\vec{j}) \\ &= -6\vec{i} - 4\vec{j} + 22\vec{i} + 16,5\vec{j} \\ &= 16\vec{i} + 12,5\vec{j} \end{aligned}$$

Vastaus:

$$a) |\vec{a}| = \sqrt{13}$$

$$b) |\vec{b}| = 5$$

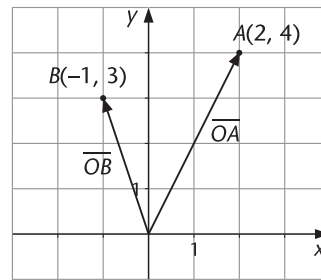
$$c) \vec{a} + \vec{b} = -\vec{i} - \vec{j}$$

$$d) \vec{a} - \vec{b} = 7\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$e) -2\vec{a} - 5,5\vec{b} = 16\vec{i} + 12,5\vec{j}$$

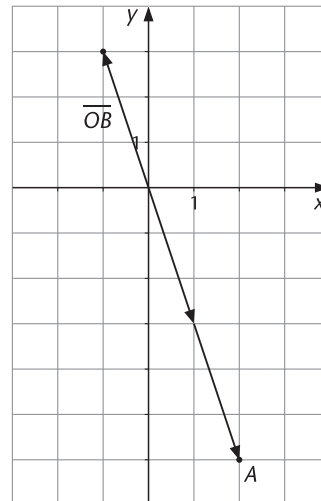
$$55. \vec{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{OB} = -\vec{i} + 3\vec{j}$$



Vektorin $\vec{OA}$ x -akselin suuntainen komponentti on 2 kertaa niin pitkä kuin vektorin $\vec{OB}$.

Piirretään peräkkäin kaksi $\vec{OB}$:n vastavektoria.



$$\vec{OA} = -2\vec{OB}$$

$$= -2(-\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$= 2\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$A = (2, -6)$$

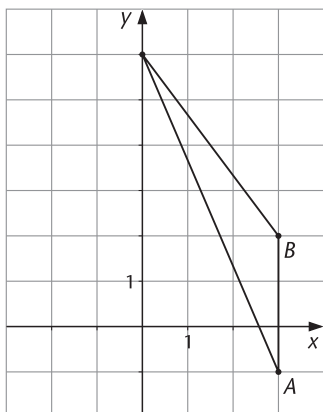
Vastaus:

$$\vec{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{OB} = -\vec{i} + 3\vec{j}$$

Pisteen y -koordinaatti olisi -6 .

56.



$$\overrightarrow{AB} = (3-3)\vec{i} + (2-(-1))\vec{j} = 3\vec{j}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2} = 3$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-3)\vec{i} + (6-(-1))\vec{j} = -3\vec{i} + 7\vec{j}$$

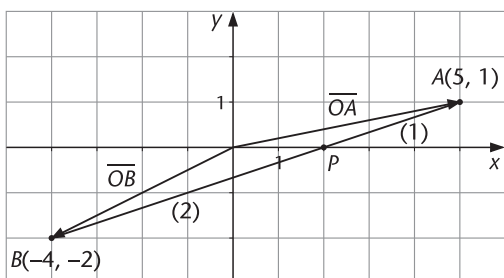
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}$$

$$\overrightarrow{BC} = (0-3)\vec{i} + (6-2)\vec{j} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Vastaus: $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{58}$, $|\overrightarrow{BC}| = 5$

57.



$$\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$$

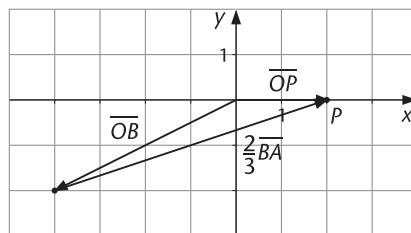
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -5\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$= -9\vec{i} - 3\vec{j}$$

Määritetään pisteen P paikkavektori.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}) \\ &= \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}(-\overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \\ &= -4\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{i} + 2\vec{j}\end{aligned}$$

Pisteen P koordinaatit ovat $(2, 0)$

58. a)

$$\begin{aligned}\vec{b} - \vec{a} &= -2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k} - (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \\ &= -2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k} - \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \\ &= -3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} - (-2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}) \\ &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k} \\ &= 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\vec{a} + 2\vec{b} &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} + 2(-2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}) \\ &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} - 4\vec{i} + 6\vec{j} - 10\vec{k} \\ &= -3\vec{i} + 7\vec{j} - 9\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{a} + 2\vec{b}| &= \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + (-9)^2} \\ &= \sqrt{139}\end{aligned}$$

Vastaus:

a) $-3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$

b) $3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$

c) $\sqrt{139}$

59. a) $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$

$$\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} - 12\vec{j} + \vec{k}$$

b) $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7$

$$\overrightarrow{OA^\circ} = \frac{-2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}}{7} = -\frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$$

c) $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} - 12\vec{j} + \vec{k}$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2 + 1^2} = \sqrt{170}$$

Vastaus:

a) $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} - 12\vec{j} + \vec{k}$

b) $\overrightarrow{OA^\circ} = -\frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$

c) $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{170}$

60. $|\vec{a}| = \sqrt{t^2 + 6^2}$

Jos $|\vec{a}| = 10$, saadaan yhtälö

$$t^2 + 6^2 = 10^2$$

$$t^2 + 36 = 100$$

$$t^2 = 64$$

$$t = \pm 8$$

Vastaus: $t = \pm 8$

61. $\vec{a} = (0-1)\vec{i} + (-3-2)\vec{j} + (5-1)\vec{k} = -\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{b} = (-5-1)\vec{i} + (7-2)\vec{j} + (11-1)\vec{k} = -6\vec{i} + 5\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{c} = (2-1)\vec{i} + (-1-2)\vec{j} + (9-1)\vec{k} = \vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{k}$$

Muodostetaan vektori $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$$= -\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k} - 6\vec{i} + 5\vec{j} + 10\vec{k} + \vec{i} - 3\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$= -6\vec{i} - 3\vec{j} + 22\vec{k}$$

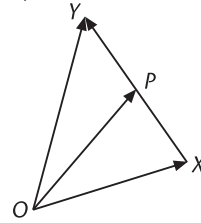
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0} \text{ eli}$$

$$-6\vec{i} - 3\vec{j} + 22\vec{k} + \vec{d} = \vec{0}$$

$$\vec{d} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 22\vec{k}$$

Vastaus: $\vec{d} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 22\vec{k}$

62. a)



$$\overrightarrow{OX} = -5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OY} = -\vec{i} + 3\vec{j}$$

Olkoon piste P janan XY keskipiste.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{XY}$$

Muodostetaan ensin vektori $\overrightarrow{XY}$.

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OY}$$

$$= -\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$$

$$= 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} - \vec{i} + 3\vec{j}$$

$$= 4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{XY}$$

$$= -5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} + \frac{1}{2}(4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= -5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} + 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$= -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$P(-3, 2, -1)$$

b) Keskipisteen koordinaatit saadaan päätepisteiden koordinaattien keskiarvona.

$$P\left(\frac{-5+(-1)}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = P(-3, 2, -1)$$

Vastaus: a) $P(-3, 2, -1)$

63. a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 7 + 2 \cdot (-9) = -39$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$|\vec{b}| = \sqrt{7^2 + (-9)^2} = \sqrt{130}$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-39}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{130}}$$

$$\alpha = 161,56...^\circ \approx 162^\circ$$

Vastaus: a) -39 b) 162°

64. Koska kolmio on tasakylkinen, on vektorien pituuksien oltava samat.

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + x^2} = \sqrt{16 + x^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

$$16 + x^2 = 25$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

b) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$

Kun $x = 3$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-5) = 0$$

Kun $x = -3$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot (-5) = 0$$

Vektorien välinen kulma on 90° .

Vastaus: a) $x = \pm 3$ b) 90°

65.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$-3x \cdot (-x) + x \cdot 2 = 0$$

$$3x^2 + 2x = 0$$

$$x(3x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x + 2 = 0$$

$$3x = -2 \quad |:3$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Kun $x = 0$,

$$\vec{a} = -3 \cdot 0\vec{i} + 0\vec{j} = \vec{0}$$

Kateetti ei voi olla nollavektori, joten $x = 0$ ei käy.

Kun $x = -\frac{2}{3}$,

$$\vec{a} = -3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} = 2\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j}$$

$$\vec{b} = -\left(-\frac{2}{3}\right)\vec{i} + 2\vec{j} = \frac{2}{3}\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{9}}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{40}{9}}$$

Hypotenuusan $\vec{c}$ pituus Pythagoraan lauseen mukaan.

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{c}|^2 = \frac{40}{9} + \frac{40}{9}$$

$$|\vec{c}|^2 = \frac{80}{9}$$

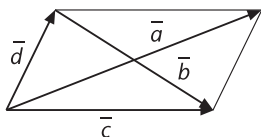
$$|\vec{c}| = \pm \sqrt{\frac{80}{9}}$$

Pituus positiivinen, joten

$$|\vec{c}| = \sqrt{\frac{80}{9}} = 2,9814... \approx 3,0$$

Vastaus: $x = -\frac{2}{3}$, hypotenuusan pituus 3,0

66.



Lävistäjät:

$$\vec{a} = \vec{c} + \vec{d}$$

$$= -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} - 4\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$$

$$= -6\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{b} = -\vec{d} + \vec{c}$$

$$= 4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k} - 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$= 2\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}$$

Lävistäjien pituudet

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{88}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{72}$$

Pistetulo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot (-8) = -52$$

Vektorien välinen kulma

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{-52}{\sqrt{88} \sqrt{72}}$$

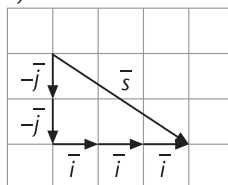
$$\alpha = 130,78\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 131^\circ$$

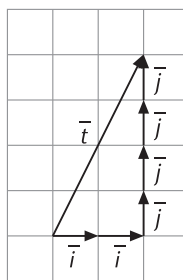
Vastaus: lävistäjät $-6\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ ja $2\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}$, kulma 131° .

Harjoituskoe 1

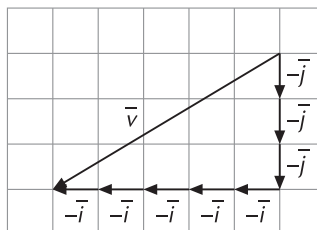
1. a)



$$\vec{s} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$



$$\vec{t} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

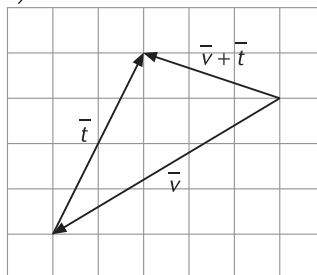


$$\vec{v} = -5\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\text{b) } |\vec{s}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

c)



2. a)

$$\sin x = 0,54$$

$$x = 0,5704... + n2\pi$$

$$x \approx 0,57 + n2\pi$$

TAI

$$x = \pi - 0,5704... + n2\pi$$

$$x = 2,5711... + n2\pi$$

$$x \approx 2,6 + n2\pi$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

b)

$$\cos 2x - 3,1 = 2,8$$

$$\cos 2x = 0,3$$

$$2x = \pm 1,266... + n2\pi \quad | :2$$

$$x = \pm 0,633... + n\pi$$

$$x \approx \pm 0,63 + n\pi$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

c)

$$2 \tan 2x = 12 \quad | :2$$

$$\tan 2x = 6$$

$$2x = 1,405... + n\pi \quad | :2$$

$$x = 0,702... + n\frac{\pi}{2}$$

$$x \approx 0,70 + n\frac{\pi}{2}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Vastaus:

$$a) x \approx 0,57 + n2\pi \text{ tai } x \approx 2,6 + n2\pi$$

$$b) x \approx \pm 0,63 + n\pi$$

$$c) x \approx 0,70 + n\frac{\pi}{2}$$

$$3. a) \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -14$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

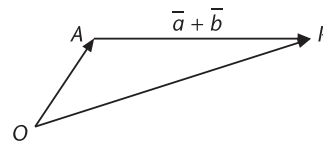
Vektorien välinen kulma

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{-14}{\sqrt{10} \sqrt{20}}$$

$$\alpha = 171,86...^\circ \approx 172^\circ$$

$$b) \vec{a} + \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{i} + 4\vec{j} = -\vec{i} + \vec{j}$$



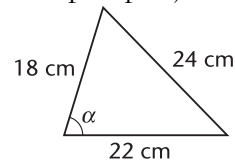
$$A(0,2)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= 2\vec{j} - \vec{i} + \vec{j} \\ &= -\vec{i} + 3\vec{j} \end{aligned}$$

$$\text{Piste } P = (-1,3)$$

$$\text{Vastaus: a) } 172^\circ \quad b) (-1, 3)$$

4. Lampun pohja

Lasketaan kulma α kosinilauseella.

$$24^2 = 18^2 + 22^2 - 2 \cdot 18 \cdot 22 \cdot \cos \alpha$$

$$576 = 808 - 792 \cdot \cos \alpha$$

$$792 \cos \alpha = 232 \quad | :792$$

$$\cos \alpha = 0,2929...$$

$$\alpha = \pm 72,96... + n \cdot 360^\circ$$

Koska α on kolmion kulma, $\alpha = 72,96...^\circ$

Kolmion ala

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 18 \cdot \sin 72,96...^\circ \\ &= 189,314... \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Lampun tilavuus

$$\begin{aligned} V &= \mathcal{A} \cdot h \\ &= 189,314... \cdot 7,2 \\ &= 1363,06... \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

$$1363,06... \text{ cm}^3 = 1,363 \text{ dm}^3$$

$$\text{Vastaus: } 1,4 \text{ dm}^3 = 1,4 \text{ l}$$

5. a) $x = 10 \text{ s}$

$$f(10) = 25 \sin\left(\frac{\pi}{60} \cdot 10\right) = 12,5 \text{ (m)}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= 23 \\ 25 \sin\left(\frac{\pi}{60} x\right) &= 23 \quad | :25 \\ \sin\left(\frac{\pi}{60} x\right) &= 0,92 \\ \frac{\pi}{60} x &= 1,168... + n2\pi \quad | : \frac{\pi}{60} \\ x &= 22,308... + n \cdot 120 \\ &\text{TAI} \\ \frac{\pi}{60} x &= \pi - 1,168... + n2\pi \\ \frac{\pi}{60} x &= 1,973... + n2\pi \quad | : \frac{\pi}{60} \\ x &= 37,69... + n \cdot 120 \end{aligned}$$

Ratkaisuista välille $[0,6]$ kuuluvat

$$x = 22,308... \text{ s} \approx 22 \text{ s} \text{ ja } x = 37,69... \text{ s} \approx 38 \text{ s}$$

Vastaus: a) 12,5 m b) 22 s ja 38 s

6.

$$\begin{aligned} 4\vec{i} + 2\vec{j} &= r(\vec{i} - \vec{j}) + s(2\vec{i} - 3\vec{j}) \\ 4\vec{i} + 2\vec{j} &= r\vec{i} - r\vec{j} + 2s\vec{i} - 3s\vec{j} \\ 4\vec{i} + 2\vec{j} &= (r + 2s)\vec{i} + (-r - 3s)\vec{j} \end{aligned}$$

Komponenttien tulee olla samat.

$$\begin{aligned} \begin{cases} r + 2s = 4 \\ -r - 3s = 2 \end{cases} \\ \hline -s = 6 \quad | \cdot (-1) \\ s = -6 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $s = -6$ yhtälöön $r + 2s = 4$.

$$r + 2 \cdot (-6) = 4$$

$$r = 16$$

$$\text{Vastaus: } 16(\vec{i} - \vec{j}) - 6(2\vec{i} - 3\vec{j})$$

Harjoituskoe 2

1. a) Kulman suuruus radiaaneina

$$\alpha = \frac{b}{r} = \frac{2,3 \text{ dm}}{15 \text{ cm}} = \frac{23 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = 1,533...$$

Kulman suuruus asteina

$$1,533... \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 87,85...^\circ \approx 88^\circ$$

Sektorin ala

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \\ &= \frac{87,85...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 15^2 \\ &= 172,5 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$\text{b) } 75^\circ = 75 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{c) } \frac{4}{5}\pi = \frac{4}{5}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 144^\circ$$

$$\text{Vastaus: a) } 88^\circ, 170 \text{ cm}^2 \text{ b) } \frac{5\pi}{12} \text{ c) } 144^\circ$$

2. a)

$$\sin x = 0,66$$

$$x = 41,29\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x \approx 41^\circ + n \cdot 360^\circ$$

TAI

$$x = 180^\circ - 41,29\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x = 138,7\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x \approx 139^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

b)

$$\cos \alpha = -0,765$$

$$\alpha = \pm 139,90\dots^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\alpha \approx \pm 140^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

c)

$$\sin 2x = -0,87$$

$$2x = -60,45\dots^\circ + n \cdot 360^\circ \quad |:2$$

$$x = -30,22\dots^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$x \approx -30^\circ + n \cdot 180^\circ$$

TAI

$$2x = 180^\circ - (-60,45\dots^\circ) + n \cdot 360^\circ \quad |:2$$

$$x = 120,2\dots^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$x \approx 120^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Vastaus:

$$a) x \approx 41^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ tai } 139^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$b) \pm 140^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$c) x \approx -30^\circ + n \cdot 180^\circ \text{ tai } x \approx 120^\circ + n \cdot 180^\circ$$

3. a)

$$\tan x = -\frac{4}{3}$$

$$x = -53,13\dots^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$x \approx -53^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$n = 0 \quad x \approx -53^\circ \text{ ei käy}$$

$$n = 1 \quad x \approx -53^\circ + 180^\circ = 127^\circ \text{ käy}$$

$$n = 2 \quad x \approx -53^\circ + 2 \cdot 180^\circ = 307^\circ \text{ käy}$$

$$n = 3 \quad x \approx -53^\circ + 3 \cdot 180^\circ = 487^\circ \text{ ei käy}$$

b)

$$4 \tan 4\alpha - 7 = 0$$

$$4 \tan 4\alpha = 7 \quad |:4$$

$$\tan 4\alpha = \frac{7}{4}$$

$$4\alpha = 60,2\dots^\circ + n \cdot 180^\circ \quad |:4$$

$$\alpha = 15,06\dots^\circ + n \cdot 45^\circ$$

$$\alpha \approx 15^\circ + n \cdot 45^\circ$$

$$n = 0 \quad \alpha \approx 15^\circ \text{ käy}$$

$$n = 1 \quad \alpha \approx 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ \text{ käy}$$

$$n = 2 \quad \alpha \approx 15^\circ + 2 \cdot 45^\circ = 105^\circ \text{ käy}$$

$$n = 3 \quad \alpha \approx 15^\circ + 3 \cdot 45^\circ = 150^\circ \text{ käy}$$

$$n = 4 \quad \alpha \approx 15^\circ + 4 \cdot 45^\circ = 195^\circ \text{ käy}$$

$$n = 5 \quad \alpha \approx 15^\circ + 5 \cdot 45^\circ = 240^\circ \text{ käy}$$

$$n = 6 \quad \alpha \approx 15^\circ + 6 \cdot 45^\circ = 285^\circ \text{ käy}$$

$$n = 7 \quad \alpha \approx 15^\circ + 7 \cdot 45^\circ = 330^\circ \text{ käy}$$

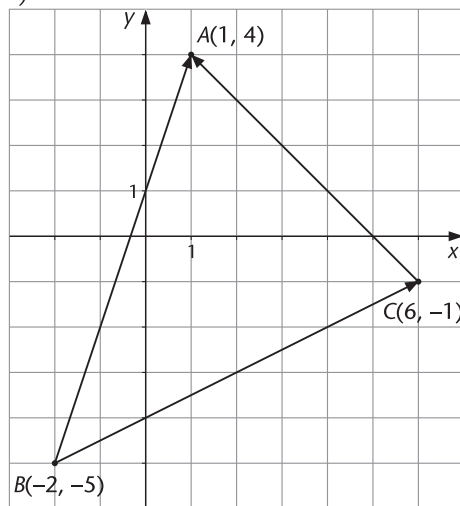
$$n = 8 \quad \alpha \approx 15^\circ + 8 \cdot 45^\circ = 375^\circ \text{ ei käy}$$

Vastaus:

$$a) 127^\circ, 307^\circ$$

$$b) 15^\circ, 60^\circ, 105^\circ, 150^\circ, 195^\circ, \\ 240^\circ, 285^\circ, 330^\circ$$

4. a)



$$\overrightarrow{BA} = (1 - (-2))\vec{i} + (4 - (-5))\vec{j} = 3\vec{i} + 9\vec{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = (6 - (-2))\vec{i} + (-1 - (-5))\vec{j} = 8\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\overrightarrow{CA} = (1 - 6)\vec{i} + (4 - (-1))\vec{j} = -5\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot 8 + 9 \cdot 4 = 60 \neq 0$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 8 \cdot (-5) + 4 \cdot 5 = -20 \neq 0$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 3 \cdot (-5) + 9 \cdot 5 = 30 \neq 0$$

Kolmiossa ei ole yhtään 90° kulmaa, joten se ei ole suorakulmainen.

$$b) \quad |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{60}{\sqrt{90} \sqrt{80}}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Kolmion ala

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{90} \sqrt{80} \cdot \sin 45^\circ$$

$$= 30 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus: a) ei ole b) 30 m^2

$$5. \quad \vec{a} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$$

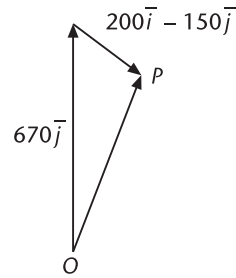
Yksikkövektori

$$\vec{a}^\circ = \frac{1}{10} (8\vec{i} - 6\vec{j})$$

$$= \frac{4}{5} \vec{i} - \frac{3}{5} \vec{j}$$

Tämän suuntaan kuljetaan 250 m eli pitkin vektoria

$$250 \left(\frac{4}{5} \vec{i} - \frac{3}{5} \vec{j} \right) = 200\vec{i} - 150\vec{j}$$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= 670\vec{j} + 200\vec{i} - 150\vec{j} \\ &= 200\vec{i} + 520\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &= \sqrt{200^2 + 520^2} \\ &= \sqrt{310400} \\ &= 557,13... \\ &\approx 560 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Vastaus: 560 m

6. a)

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= -\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k} + 2\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k} \\ &= \vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= -\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k} - (2\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}) \\ &= -3\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \vec{a} - 3\vec{b} &= -\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k} - 3(2\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}) \\ &= -\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k} - 6\vec{i} + 15\vec{j} + 6\vec{k} \\ &= -7\vec{i} + 19\vec{j} + 3\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$-7\vec{i} + 19\vec{j} + 3\vec{k} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{c} = 7\vec{i} - 19\vec{j} - 3\vec{k}$$

Vastaus:

$$a) \quad \vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}$$

$$b) \quad -3\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k}$$

$$c) \quad 7\vec{i} - 19\vec{j} - 3\vec{k}$$

7.

$$\overline{AB} = (-2-1)\overline{i} + (1-(-2))\overline{j} + (5-(-1))\overline{k}$$

$$= -3\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k}$$

$$-3\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k} = r(\overline{i} - \overline{k}) + s(\overline{j} + \overline{k})$$

$$-3\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k} = r\overline{i} - r\overline{k} + s\overline{j} + s\overline{k}$$

$$-3\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k} = r\overline{i} + s\overline{j} + (s-r)\overline{k}$$

$$\begin{cases} r = -3 \\ s = 3 \\ s - r = 6 \end{cases}$$

Sijoitetaan $r = -3$ ja $s = 3$ viimeiseen yhtälöön.

$$s - r = 6$$

$$3 - (-3) = 6$$

$$6 = 6 \text{ tosi}$$

$$\text{Vastaus: } -3(\overline{i} - \overline{k}) + 3(\overline{j} + \overline{k})$$

Harjoituskoe 3

1. a) $\sin 0,37 = 0,3616... \approx 0,36$

b)

$$\sin x = 0,37$$

$$x = 21,71...^\circ + n \cdot 360^\circ$$

TAI

$$x = 180^\circ - 21,71...^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x = 158,28...^\circ + n \cdot 360^\circ$$

c)

$$\cos 2\beta = -0,67$$

$$2\beta = \pm 2,30... + n2\pi \quad |:2$$

$$\beta = \pm 1,152... + n\pi$$

$$n = 0 \quad \beta = 1,152... \approx 1,2$$

$$n = 1 \quad \beta = 1,152... + \pi = 4,294... \approx 4,3$$

$$n = 2 \quad \beta = 1,152... + 2\pi \geq 2\pi \text{ ei käy}$$

Vastaus: a) 0,36 b) $x \approx 22^\circ + n \cdot 360^\circ$ tai $x \approx 158^\circ + n \cdot 360^\circ$ c) 1,2 ; 4,3

2. a) $A = (-3, -4)$

$$B = (-8, 4)$$

$$C = (5, 2)$$

b) $|\overline{a}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \text{ (m)}$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 8,944... \text{ (m)}$$

$$|\overline{c}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5,385... \text{ (m)}$$

c) $\overline{AC} = (5 - (-3))\overline{i} + (2 - (-4))\overline{j} = 8\overline{i} + 6\overline{j}$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\overline{AC}^\circ = \frac{8\overline{i} + 6\overline{j}}{10} = \frac{4}{5}\overline{i} + \frac{3}{5}\overline{j}$$

Vastaus:

a) $A(-3, -4)$, $B(-8, 4)$, $C(5, 2)$

b) 5,00 m; 8,94 m; 5,39 m

c) $\frac{4}{5}\overline{i} + \frac{3}{5}\overline{j}$

3. a) $\cos \alpha = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| |\overline{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3}$

$$\alpha = 45^\circ$$

b) $|\overline{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$

$$|\overline{b}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{45}$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = -1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 0$$

Kulma $\alpha = 90^\circ$ Vastaus: a) 45° b) 90°

4. a)

$$\tan \beta = \frac{a_t}{a_n}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a_t}{1,5} \quad | \cdot 1,5$$

$$a_t = 1,5 \cdot \tan 45^\circ$$

$$a_t = 1,5$$

b)

$$\tan \beta = \frac{0,9 \text{ m/s}^2}{1,0 \text{ m/s}^2}$$

$$\beta = 41,98...^\circ + n \cdot 180^\circ$$

Ratkaisuista kelpaa $\beta = 41,98...^\circ \approx 42^\circ$

Vastaus: a) $a_t = 1,5 \text{ m/s}^2$ b) $\beta \approx 42^\circ$

5.

$$\begin{aligned} 6\vec{i} + 9\vec{j} - 15\vec{k} &= t(4\vec{i} + 6\vec{j} - 10\vec{k}) \\ &= 4t\vec{i} + 6t\vec{j} - 10t\vec{k} \end{aligned}$$

Tutkitaan, ovatko komponentit samat.

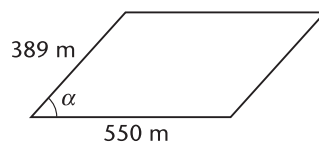
$$\begin{cases} 4t = 6 & | :4 \\ 6t = 9 & | :9 \\ -10t = -15 & | :(-10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ t = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \\ t = \frac{-15}{-10} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

t :n arvo aina sama, joten vektorit ovat samansuuntaiset. Koneet nousevat samaan suuntaan.

Vastaus: Nousevat samaan suuntaan.

6.



$$A = 389 \text{ m} \cdot 550 \text{ m} \cdot \sin 48^\circ$$

$$= 158\,995,83... \text{ m}^2$$

$$= 15,89... \text{ ha}$$

$$\approx 16 \text{ ha}$$

Vastaus: 16 ha