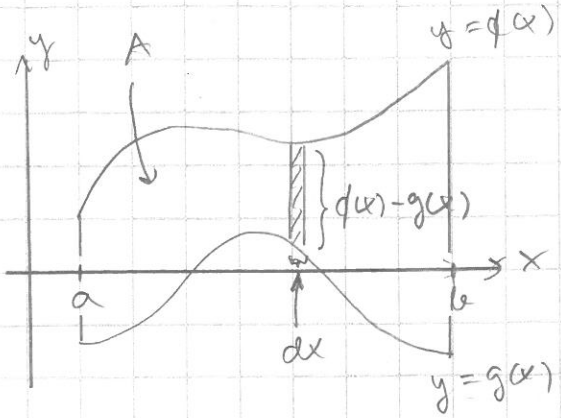
13. Kahden käyrän rajoittama alue

1°



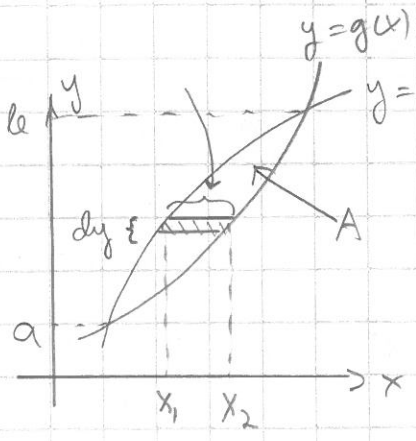
Oletus $f(x) \geq g(x)$

Pyyhkäise:
- leveys: dx
- korkeus: $f(x) - g(x)$
- pinta-ala: $(f(x) - g(x))\,dx$

$$\Rightarrow \boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

ylempi, alempi

2°



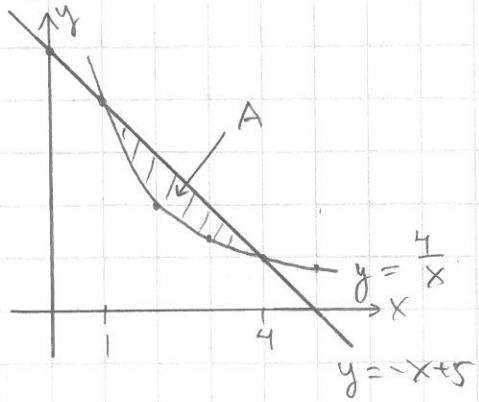
Pyyhkäise:
- kanta: dy
- pituus: $x_2 - x_1 = i(y) - h(y)$
- pinta-ala: $(x_2 - x_1)\,dy = (i(y) - h(y))\,dy$

$$\Rightarrow \boxed{A = \int_a^b (x_2 - x_1)\,dy = \int_a^b (i(y) - h(y))\,dy}$$

oikea, vasen

Esim. Laske käyrien $x + y = 5$ ja $xy = 4$ rajoittama pinta-ala.

Ratk.



$x + y = 5 \Leftrightarrow y = -x + 5$

$xy = 4 \quad | : x \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}$

Leikkauskohdat:

$$\begin{cases} x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x \\ xy = 4 \end{cases} \text{ sij.}$$

$$x(5 - x) = 4 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

$$A = \int_1^4 \underbrace{\left((-x+5)}_{\text{ylempi}} - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\text{alempi}}\right) dx = \Big/_1^4 \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + 5x - 4\ln|x|\right)$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}\cdot 4^2 + 5\cdot 4 - 4\ln 4\right) - \left(-\tfrac{1}{2}\cdot 1^2 + 5\cdot 1 - \underbrace{4\ln 1}_{=0}\right) = \ldots = \underline{\frac{15}{2} - 4\ln 4 \ (\approx 1{,}95)}$$

Testipisteet $x = 2$: $y = -x + 5 = 3$, $y = \frac{4}{x} = 2$ $\Rightarrow$ suora $y = -x + 5$ on ylempänä