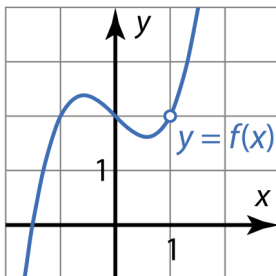


1

a)



Raja-arvot voidaan päätellä kuvaajan avulla.

Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2.$$

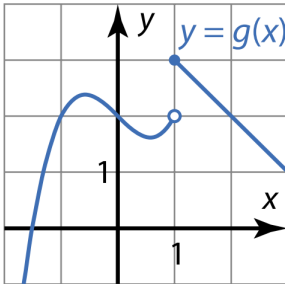
Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2.$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, funktiolla on raja-arvo kohdassa 1. Funktion raja-arvo kohdassa 1 on

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

b)



Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on

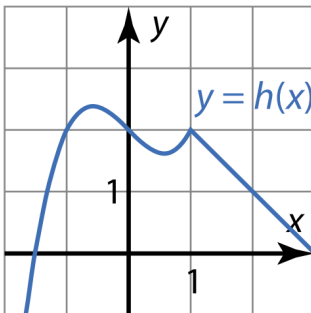
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2.$$

Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 3.$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 1.

c)



Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 2.$$

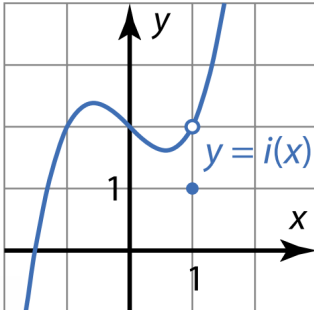
Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = 2.$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, funktiolla on raja-arvo kohdassa 1. Funktion raja-arvo kohdassa 1 on

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2.$$

d)



Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} i(x) = 2.$$

Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} i(x) = 2.$$

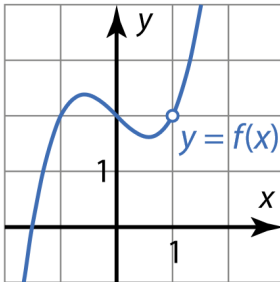
Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, funktiolla on raja-arvo kohdassa 1. Funktion raja-arvo kohdassa 1 on

$$\lim_{x \rightarrow 1} i(x) = 2.$$

- Vastaus
- a) kaikki kolme
 - b) vasemmanpuoleinen ja oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1
 - c) kaikki kolme
 - d) kaikki kolme

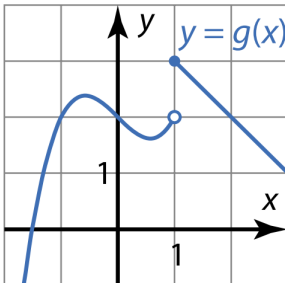
2

a)



Kuvaajasta havaitaan, ettei funktio ole määritelty, kun $x = 1$. Näin ollen funktio ei ole vasemmalta jatkuva, oikealta jatkuva eikä jatkuva kohdassa 1.

b)



Funktion ei ole vasemmalta jatkuva kohdassa 1, sillä

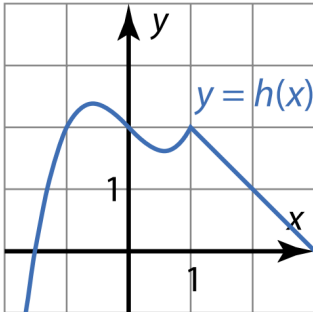
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2 \text{ mutta } g(1) = 3.$$

Funktio on oikealta jatkuva kohdassa 1, sillä

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 3 \text{ ja } g(1) = 3.$$

Funktio ei ole jatkuva kohdassa 1, koska funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 1.

c)

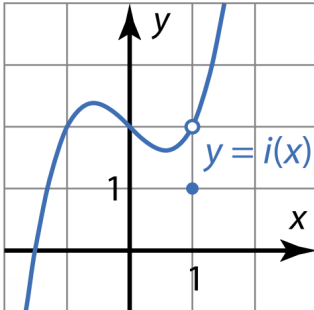


Funktio on vasemmalta jatkuva kohdassa 1, sillä
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 2$ ja $h(1) = 2$.

Funktio on oikealta jatkuva kohdassa 1, sillä
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = 2$ ja $h(1) = 2$.

Funktio on jatkuva kohdassa 1, sillä
 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$ ja $h(1) = 2$.

d)



Funktion ei ole vasemmalta jatkuva kohdassa 1, sillä

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} i(x) = 2 \text{ mutta } i(1) = 1.$$

Funktio ei ole oikealta jatkuva kohdassa 1, sillä

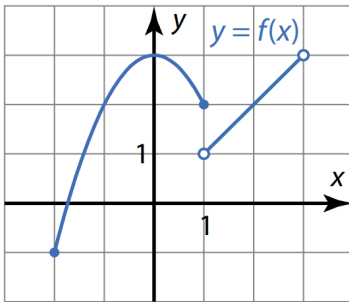
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} i(x) = 2 \text{ ja } i(1) = 1.$$

Funktio ei ole jatkuva kohdassa 1, sillä

$$\lim_{x \rightarrow 1} i(x) = 2 \text{ ja } i(1) = 1.$$

- Vastaus
- a) ei mitään näistä
 - b) oikealta jatkuva
 - c) kaikki kolme
 - d) ei mitään näistä

3

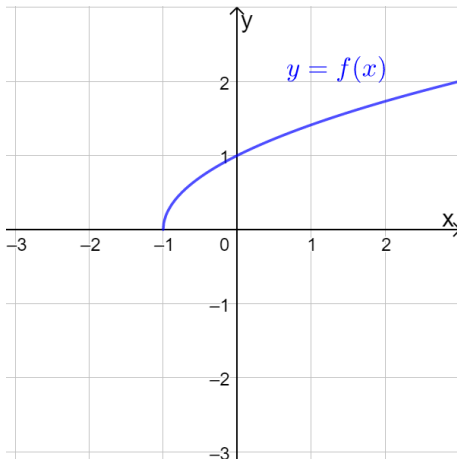


- a) Raja-arvot voidaan päätellä kuvaajan avulla.
 Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.
 Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1 on
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$.
 Koska toispuoliset raja-arvot ovat erisuuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 1.
- b) Funktion on vasemmalta jatkuva kohdassa 1, sillä
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ ja $f(1) = 2$.
 Funktio ei ole oikealta jatkuva kohdassa 1, sillä
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ ja $f(1) = 2$.
 Funktio ei ole jatkuva kohdassa 1, koska funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 1.
- c) Funktio on jatkuva välillä $[-2, 1]$, koska se on jatkuva välin jokaisessa sisäpisteessä ja toispuolisesti jatkuva päätepisteissä -2 ja 1 .
 Funktio on jatkuva välillä $]1, 3[$, koska se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä.
 Funktio ei ole jatkuva välillä $[-2, 1[$, koska se ei ole jatkuva kohdassa 1.

Vastaus a) vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo
 b) vasemmalta jatkuva
 c) jatkuva välillä $[-2, 1]$ ja välillä $]1, 3[$

4

- a) Piirretään funktion $f(x) = \sqrt{x+1}$ kuvaaja laskimella.



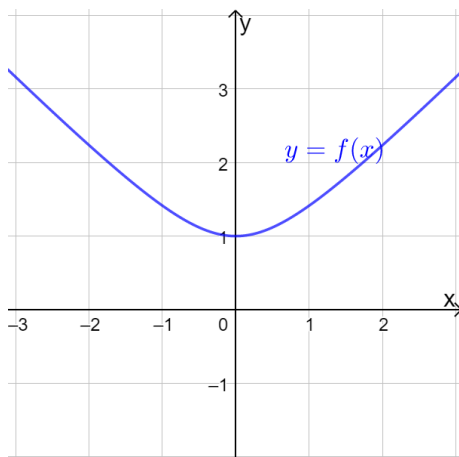
Neliöjuuri on määritelty epänegatiivisille luvuille. Funktio on määritelty, kun

$$x+1 \geq 0$$

$$x \geq -1.$$

Funktio on jatkuva välillä $[-1, \infty[$.

b) Piirretään funktion $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ kuvaaja laskimella.



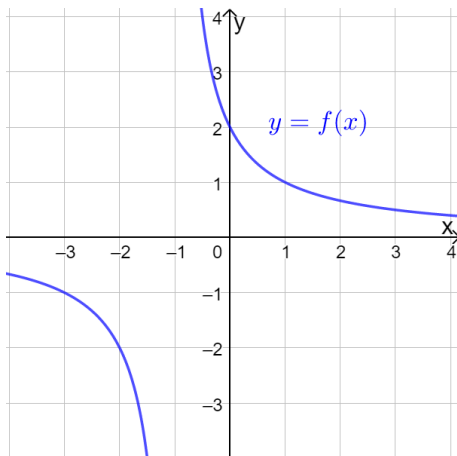
Funktio on määritelty, kun

$$x^2 + 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq -1.$$

Tämä pätee kaikilla reaaliluvuilla, koska reaaliluvun neliö on aina epänegatiivinen. Funktio on siis jatkuva koko reaalilukujen joukossa **R**.

- c) Piirretään funktion $f(x) = \frac{2}{x+1}$ kuvaaja laskimella.



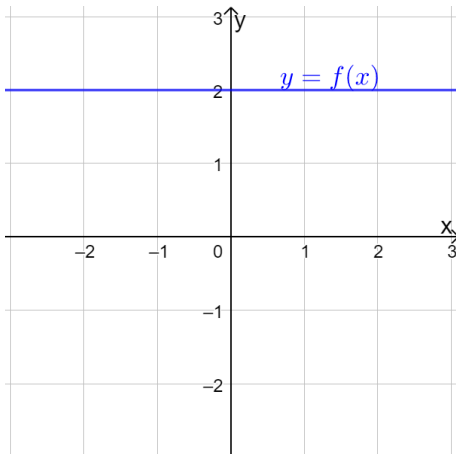
Funktio ei ole määritelty, kun

$$x+1=0$$

$$x=-1.$$

Kaikilla muilla x :n arvoilla funktio on määritelty. Funktio on jatkuva välillä $]-\infty, -1[$ ja välillä $] -1, \infty[$.

- d) Piirretään funktion $f(x) = \frac{2x+2}{x+1}$ kuvaaja laskimella.



Kuvaajassa on aukko kohdassa $x = -1$, vaikka laskimen piirtämässä kuvassa sitä ei näy!

Funktio ei ole määritelty, kun

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1.$$

Kaikilla muilla x :n arvoilla funktio on määritelty. Funktio on jatkuva välillä $] -\infty, -1[$ ja välillä $] -1, \infty[$.

- Vastaus
- a) $[-1, \infty[$
 - b) koko reaalilukujen joukko $\mathbf{R}$
 - c) $] -\infty, -1[$ ja $] -1, \infty[$
 - d) $] -\infty, -1[$ ja $] -1, \infty[$

5

- a) Funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ ei ole määritelty, kun $x = 0$.

Kaikilla muilla x :n arvoilla funktio on määritelty.

Näin ollen määrittelyjoukko on $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Funktio on jatkuva välillä $] -\infty, 0[$ ja välillä $] 0, \infty[$.

Funktio on siis jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

Funktio ei voi olla kaikkialla jatkuva, koska määrittelyjoukko ei ole $\mathbf{R}$.

- b) Funktio $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 3, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$ on määritelty kaikilla

reaaliluvuilla.

Funktio ei ole jatkuva kohdassa 0, koska funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 0.

Funktio ei siis ole jatkuva eikä kaikkialla jatkuva, koska funktio ei ole jatkuva kohdassa 0.

Vastaus a) Määrittelyjoukko on $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Funktio on jatkuva, koska se on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.
Funktio ei voi olla kaikkialla jatkuva, koska määrittelyjoukko ei ole $\mathbf{R}$.

b) Määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$. Funktio ei ole jatkuva eikä kaikkialla jatkuva, koska funktio ei ole jatkuva kohdassa 0.

6

On osoitettava, että kohdassa 0 funktion vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo.

Kohdassa $x = 0$ funktion lauseke on $f(x) = -5x + 3$.

Siten $f(0) = -5 \cdot 0 + 3 = 3$.

Kohdan $x = 0$ vasemmalla puolella $f(x) = x^2 + 3$.

Siten $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 3) = 0^2 + 3 = 3$.

Kohdan $x = 0$ oikealla puolella $f(x) = -5x + 3$.

Siten $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-5x + 3) = -5 \cdot 0 + 3 = 3$.

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo, funktio f on jatkuva kohdassa 0.

Vastaus Koska $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ ja $f(0) = 3$,
niin funktio f on jatkuva kohdassa 0.

7

Jos toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo kohdassa -1 , funktio f on jatkuva kohdassa -1 .

a) Kohdassa $x = -1$ funktion lauseke on $f(x) = -x^2 + 2$.

$$\text{Siten } f(-1) = -(-1)^2 + 2 = 1.$$

Kohdan $x = -1$ vasemmalla puolella $f(x) = 4x + 5$.

$$\text{Siten } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (4x + 5) = 4 \cdot (-1) + 5 = 1.$$

Kohdan $x = -1$ oikealla puolella $f(x) = -x^2 + 2$.

$$\text{Siten } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2 + 2) = -(-1)^2 + 2 = 1.$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo kohdassa -1 , funktio f on jatkuva kohdassa -1 .

b) Funktio f on määritelty vain, kun $x \neq -1$.

Funktiota ei ole määritelty kohdassa -1 .

Näin ollen funktio ei ole jatkuva kohdassa -1 .

Vastaus a) Funktio f on jatkuva kohdassa -1 ,
koska $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ ja $f(-1) = 1$.

b) Funktio f ei ole jatkuva kohdassa -1 ,
koska se ei ole määritelty kohdassa -1 .

8

Jos toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo kohdassa 4, funktio f on jatkuva kohdassa 4.

Kohdan $x = 4$ vasemmalla puolella $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$.

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x + 4) \cancel{(x - 4)}}{\cancel{x - 4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} (x + 4) = 4 + 4 = 8. \end{aligned}$$

Kohdan $x = 4$ oikealla puolella $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$.

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x + 4) \cancel{(x - 4)}}{\cancel{x - 4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + 4) = 4 + 4 = 8. \end{aligned}$$

Jotta funktio olisi kaikkialla jatkuva, täytyy olla $f(4) = 8$.

Vastaus $f(4) = 8$

9

- a) Funktio $f(x) = |x|$ on määritelty ja jatkuva kohdassa $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0$$

- b) Funktio $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ei ole määritelty kohdassa $x = 0$, joten täytyy tutkia toispuoliset raja-arvot.

$$\text{Itseisarvon määritelmä } |x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{|x|}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{|x|}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1 \end{aligned}$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa 0.

- c) Funktio $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ ei ole määritelty kohdassa $x = 0$, joten täytyy tutkia toispuoliset raja-arvot.

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2}{|x|} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{-x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = -0 = 0 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{|x|} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0 \end{aligned}$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, funktion f raja-arvo kohdassa 0 on 0 .

Vastaus a) raja-arvo on 0
 b) raja-arvoa ei ole
 c) raja-arvo on 0

10

$$f(x) = \frac{|x^2 - 6x|}{x - 6}$$

Nimittäjän $x - 6$ nollakohta on $x = 6$.

Funktio f on määritelty ja jatkuva, kun $x \neq 6$.

- a) Funktio f on määritelty ja jatkuva kohdassa $x = 0$.
Täten

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{|0^2 - 6 \cdot 0|}{0 - 6} = \frac{0}{-6} = 0.$$

- b) Funktio f ei ole määritelty kohdassa $x = 6$, joten täytyy tutkia toispuoliset raja-arvot.

$$\text{Kun } x \rightarrow 6-, \text{ niin } x^2 - 6x = \underbrace{x}_{>0} \underbrace{(x-6)}_{<0} < 0.$$

$$\text{Tällöin } |x^2 - 6x| = -x(x-6).$$

Lasketaan funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6-} \frac{|x^2 - 6x|}{x - 6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6-} \frac{-x \cancel{(x-6)}}{\cancel{x-6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6-} (-x) = -6 \end{aligned}$$

$$\text{Kun } x \rightarrow 6+, \text{ niin } x^2 - 6x = \underbrace{x}_{>0} \underbrace{(x-6)}_{>0} > 0.$$

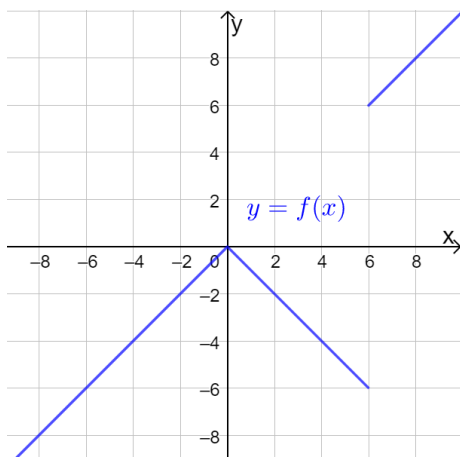
$$\text{Tällöin } |x^2 - 6x| = x(x-6).$$

Lasketaan funktion oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6+} \frac{|x^2 - 6x|}{x - 6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6+} \frac{x \cancel{(x-6)}}{\cancel{x-6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6+} x = 6 \end{aligned}$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 6$.

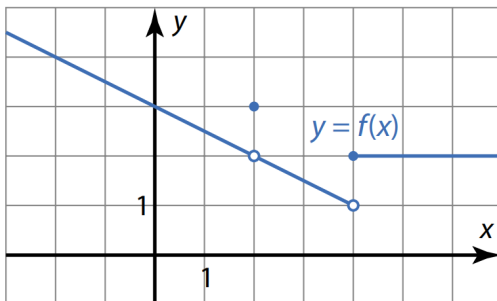
Ratkaisun voi tarkistaa piirtämällä funktion kuvaajan laskimella.



Vastaus a) raja-arvo on 0
 b) raja-arvoa ei ole

11

a)



Raja-arvot voidaan päätellä kuvaajan avulla.

Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 0 on

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3.$$

Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 0 on

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3.$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, funktiolla on raja-arvo kohdassa 0.

Funktion raja-arvo kohdassa 0 on

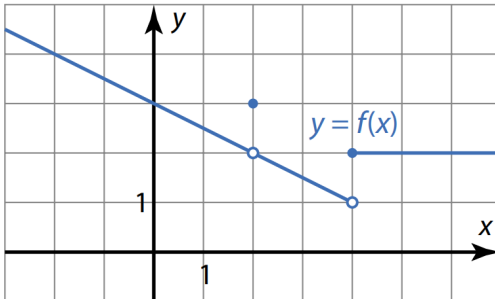
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3.$$

Funktion arvo kohdassa 0 on

$$f(0) = 3.$$

Koska funktion raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo, funktio on jatkuva kohdassa 0.

b)



Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 2 on

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2.$$

Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 2 on

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2.$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret,
funktioilla on raja-arvo kohdassa 2.

Funktion raja-arvo kohdassa 2 on

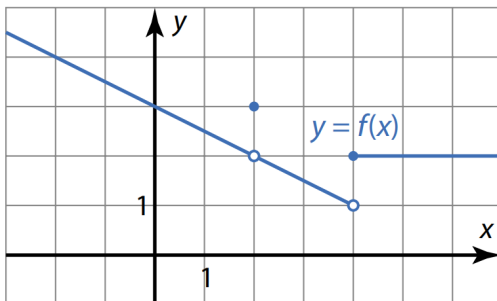
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2.$$

Funktion arvo kohdassa 2 on

$$f(2) = 3.$$

Koska funktion raja-arvo on eri suuri kuin funktion arvo,
funktio ei ole jatkuva kohdassa 2.

c)



Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 4 on

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1.$$

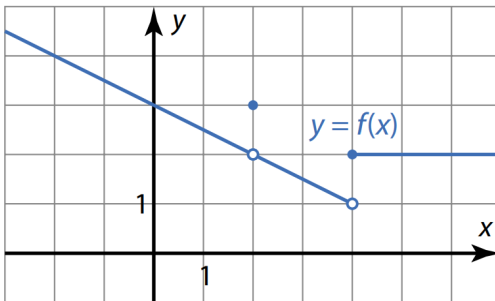
Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 4 on

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2.$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret,
funktioilla ei ole raja-arvoa eikä funktio ole jatkuva kohdassa 4.

- Vastaus
- a) on raja-arvo ja on jatkuva
 - b) on raja-arvo, ei ole jatkuva
 - c) ei ole raja-arvoa eikä ole jatkuva

12



- a) Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 4 on
 $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1.$

Funktion arvo kohdassa 4 on
 $f(4) = 2.$

Funktio ei ole vasemmalta jatkuva kohdassa 4, koska funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo on eri suuri kuin funktion arvo.

- b) Funktion oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 4 on
 $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2.$

Funktion arvo kohdassa 4 on
 $f(4) = 2.$

Funktio on oikealta jatkuva kohdassa 4, koska funktion oikeanpuoleinen raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo.

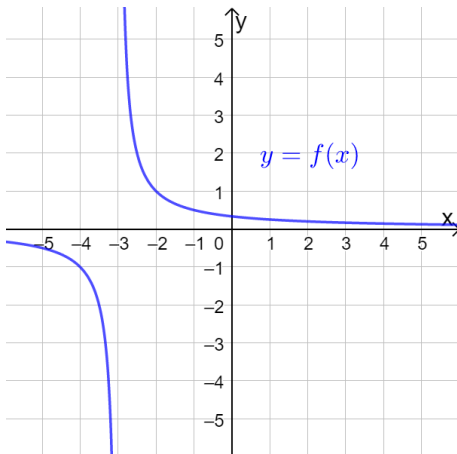
- c) Funktio on jatkuva välillä $]2, 4[$, koska se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä.

- d) Funktio ei ole jatkuva välillä $]2, 4]$, koska se ei ole vasemmalta jatkuva päätepisteessä 4.
- e) Funktio on jatkuva välillä $] -\infty, 2[$, koska se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä.
- f) Funktio on jatkuva välillä $[4, \infty[$, koska se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä ja oikealta jatkuva päätepisteessä 4.

Vastaus a) ei b) on c) on
 d) ei e) on f) on

13

- a) Piirretään funktion $f(x) = \frac{1}{x+3}$ kuvaaja laskimella.



Funktio ei ole määritelty, kun

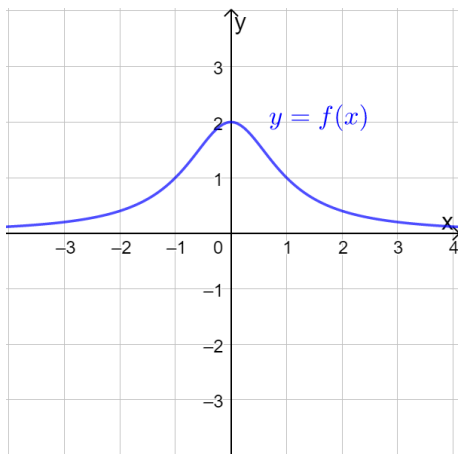
$$x + 3 = 0$$

$$x = -3.$$

Kaikilla muilla x :n arvoilla funktio on määritelty.

Funktio on jatkuva välillä $]-\infty, -3[$ ja välillä $]-3, \infty[$.

b) Piirretään funktion $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$ kuvaaja laskimella.



Funktio ei ole määritelty, kun

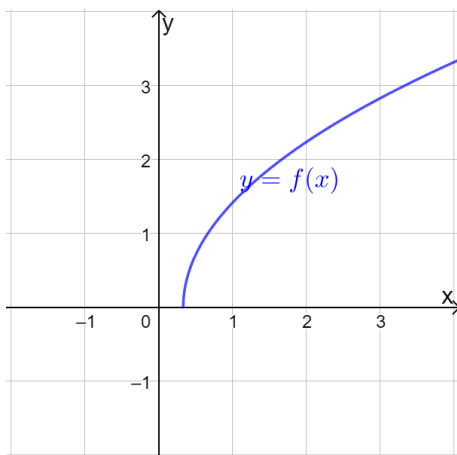
$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1.$$

Mutta reaaliluvun neliö on aina epänegatiivinen.

Funktio on siis jatkuva koko reaalilukujen joukossa **R**.

c) Piirretään funktion $f(x) = \sqrt{3x-1}$ kuvaaja laskimella.



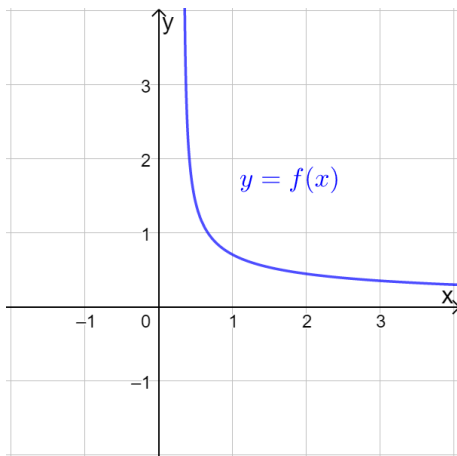
Neliöjuuri on määritelty epänegatiivisille luvuille.
Funktio on määritelty, kun

$$3x - 1 \geq 0$$

$$x \geq \frac{1}{3}.$$

Funktio on jatkuva välillä $[\frac{1}{3}, \infty[$.

d) Piirretään funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$ kuvaaja laskimella.



Funktio on määritelty, kun

$$3x - 1 > 0$$

$$x > \frac{1}{3}.$$

Funktio on jatkuva välillä $]\frac{1}{3}, \infty[$.

- Vastaus
- a) $]-\infty, -3[$ ja $]-3, \infty[$.
 - b) koko reaalilukujen joukko $\mathbf{R}$
 - c) $[\frac{1}{3}, \infty[$
 - d) $]\frac{1}{3}, \infty[$

14

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & \text{kun } x \neq -1 \\ -2, & \text{kun } x = -1 \end{cases}$$

On osoitettava, että kohdassa -1 funktion raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo.

Funktion arvo kohdassa -1 on $f(-1) = -2$.

Lasketaan raja-arvo kohdassa -1 .

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) \\ &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

Koska raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo, funktio f on jatkuva kohdassa -1 .

Vastaus Koska $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$ ja $f(-1) = -2$,
niin funktio f on jatkuva kohdassa -1 .

15

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{kun } x \leq -1 \\ ax^2 + bx, & \text{kun } -1 < x \leq 8 \\ 10, & \text{kun } x > 8 \end{cases}$$

Polynomifunktiot ovat määrittelyjoukoissaan jatkuvia, joten riittää tutkia kohdat -1 ja 8 . Funktio on jatkuva tietyssä kohdassa, jos funktion vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo.

1) Tutkitaan ensiksi kohtaa -1 .

Kohdassa $x = -1$ funktion lauseke on $f(x) = x + 2$.

$$f(-1) = -1 + 2 = 1$$

Kohdan $x = -1$ vasemmalla puolella $f(x) = x + 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 2) = -1 + 2 = 1$$

Kohdan $x = -1$ oikealla puolella $f(x) = ax^2 + bx$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^2 + bx) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) = a - b$$

Jotta funktio f olisi jatkuva kohdassa -1 , tulee olla

$$a - b = 1.$$

2) Tutkitaan seuraavaksi kohtaa 8.

Kohdassa $x = 8$ funktion lauseke on $f(x) = ax^2 + bx$.

$$f(8) = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 = 64a + 8b$$

Kohdan $x = 8$ vasemmalla puolella $f(x) = ax^2 + bx$.

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (ax^2 + bx) = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 = 64a + 8b$$

Kohdan $x = 8$ oikealla puolella $f(x) = 10$.

$$\lim_{x \rightarrow 8+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8+} 10 = 10$$

Jotta funktio f olisi jatkuva kohdassa 8, tulee olla

$$64a + 8b = 10.$$

3) Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ 64a + 8b = 10. \end{cases}$$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä a .

$$\begin{aligned} a - b &= 1 \\ a &= b + 1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu tulos toiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 64(b + 1) + 8b &= 10 \\ 64b + 64 + 8b &= 10 \\ 72b &= 10 - 64 \\ 72b &= -54 \\ b &= -\frac{54}{72} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Ratkaistaan a .

$$\begin{aligned} a &= b + 1 \\ a &= -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vastaus $a = \frac{1}{4}$ ja $b = -\frac{3}{4}$

16

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & \text{kun } x < 3 \\ -x + 2, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

Koska polynomifunktiot ovat määrittelyjoukoissaan jatkuvia, niin funktio f on jatkuva välillä $x < 3$ ja välillä $x > 3$.

Koska funktio f ei ole määritelty kohdassa 3, sillä ei ole epäjatkuvuuskohtia.

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & \text{kun } x < 3 \\ -x + 2, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

Polynomifunktiot ovat määrittelyjoukoissaan jatkuvia, joten riittää tutkia kohtaa 3. Funktio on jatkuva kohdassa 3, jos vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo.

Kohdassa $x = 3$ funktion lauseke on $f(x) = -x + 2$.

$$f(3) = -3 + 2 = -1$$

Kohdan $x = 3$ vasemmalla puolella $f(x) = 2x - 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x - 5) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

Koska vasemmanpuoleinen raja-arvo on eri suuri kuin funktion arvo, funktiolla f on epäjatkuvuuskohta kohdassa 3.

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & \text{kun } x < 3 \\ -x + 4, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

Funktio on jatkuva kohdassa 3, jos vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo on yhtä suuri kuin funktion arvo.

Kohdassa $x = 3$ funktion lauseke on $f(x) = -x + 4$.

$$f(3) = -3 + 4 = 1$$

Kohdan $x = 3$ vasemmalla puolella $f(x) = 2x - 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x - 5) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

Kohdan $x = 3$ oikealla puolella $f(x) = -x + 4$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x + 4) = -3 + 4 = 1$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret kuin funktion arvo kohdassa, funktio on jatkuva kohdassa 3.

Funktiolla ei ole epäjatkuvuuskohtia.

Vastaus a) Ei ole, koska funktio ei ole määritelty kohdassa 3 ja muualla funktio on jatkuva.

b) On, koska funktio on määritelty mutta ei ole jatkuva kohdassa 3.

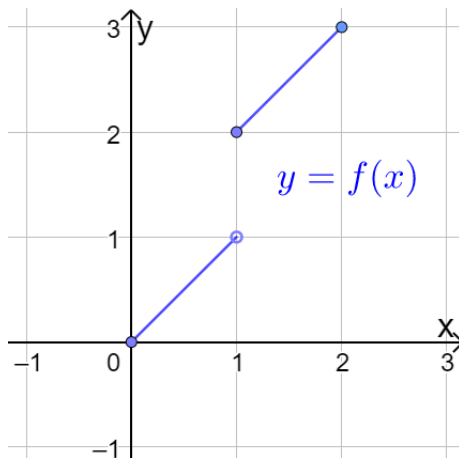
c) Ei ole, koska funktio on jatkuva myös kohdassa 3.

17

Vihje: Piirrä ensin janoista ja pisteistä koostuva kuvaaja, joka toteuttaa ehdot. Muodosta sitten funktion lauseke.

- a) Funktio $f(x)$ on aidosti kasvava,
jos $f(a) > f(b)$ aina, kun $a > b$.

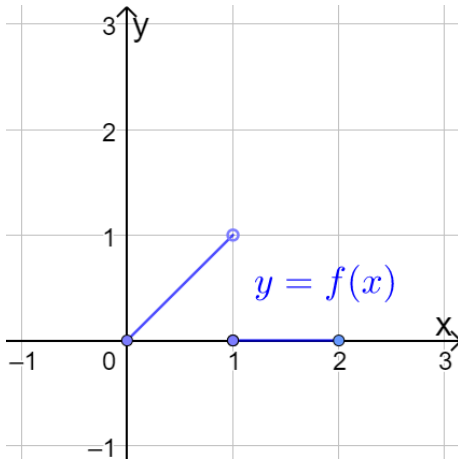
Esimerkiksi alla oleva kuvaaja täyttää annetut ehdot.



Funktion lauseke on

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leq x < 1 \\ x+1, & \text{kun } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

b) Esimerkiksi alla oleva kuvaaja täyttää annetut ehdot.



Funktion lauseke on

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{kun } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Vastaus a) esimerkiksi $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leq x < 1 \\ x+1, & \text{kun } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

b) esimerkiksi $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{kun } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

18

$$f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x + 2}$$

Nimittäjän $x + 2$ nollakohta on $x = -2$.

Funktio f on määritelty ja jatkuva, kun $x \neq -2$.

- a) Funktio f ei ole määritelty kohdassa $x = -2$, joten täytyy tutkia toispuoliset raja-arvot.

Kun $x \rightarrow -2^-$, niin $x^2 < 4$ eli $x^2 - 4 < 0$.

Tällöin $|x^2 - 4| = -(x^2 - 4)$.

Lasketaan funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-(\cancel{x+2})(x-2)}{(\cancel{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} -(x-2) \\ &= -(-2-2) = -(-4) = 4 \end{aligned}$$

Kun $x \rightarrow -2+$, niin $x^2 > 4$ eli $x^2 - 4 > 0$.

Tällöin $|x^2 - 4| = x^2 - 4$.

Lasketaan funktion oikeanpuoleinen raja-arvo.

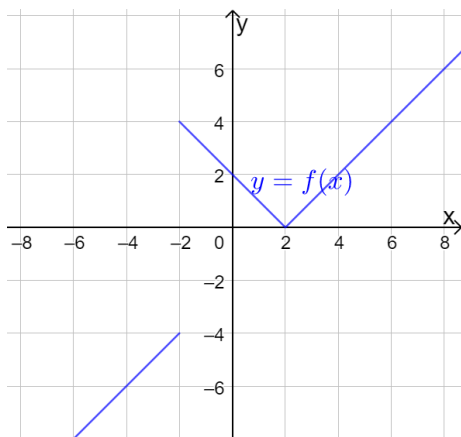
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2 - 4}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} (x - 2) \\ &= -2 - 2 = -4 \end{aligned}$$

Koska toispuoleiset raja-arvot ovat eri suuret, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa -2 .

b) Funktio f on määritelty ja jatkuva kohdassa $x = 2$.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} \\ &= \frac{|2^2 - 4|}{2 + 2} = \frac{0}{4} = 0 \end{aligned}$$

Ratkaisun voi tarkistaa piirtämällä kuvaajan laskimella.



Vastaus a) ei raja-arvoa
 b) raja-arvo on 0

19

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1| - 1}{|x|}$$

Nimittäjän $|x|$ nollakohta on $x = 0$.

Funktio f ei ole määritelty kohdassa $x = 0$, joten täytyy tutkia toispuoleiset raja-arvot.

Kun $x \rightarrow 0^-$, niin $x^2 < 1$ eli $x^2 - 1 < 0$.

Tällöin $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$ ja $|x| = -x$.

Lasketaan funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x^2 - 1| - 1}{|x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(x^2 - 1) - 1}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + 1 - 1}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \end{aligned}$$

Kun $x \rightarrow 0+$, niin $x^2 < 1$ eli $x^2 - 1 < 0$.

Tällöin $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$ ja $|x| = x$.

Lasketaan funktion oikeanpuoleinen raja-arvo.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x^2 - 1| - 1}{|x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-(x^2 - 1) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x^2 + 1 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

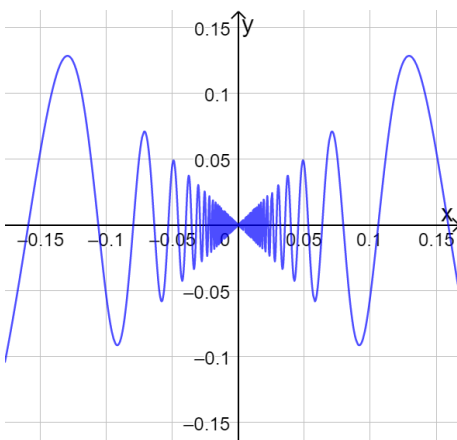
Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, niin funktion raja-arvo kohdassa 0 on 0.

Vastaus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - 1| - 1}{|x|} = 0$

20

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

Piirretään funktion kuvaaja laskimella.



Koska $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ kaikilla $x \neq 0$, niin $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sin \frac{1}{x}) = 0$.

Toisaalta $f(0) = 0$.

Siten funktio f on jatkuva kohdassa 0.

21

- a) **Oletus:** Funktiolle $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ pätee
 $f(x)f(-x) = -1$ kaikilla $x \neq 0$.

Väite: Funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 0 .

Todistus:

Oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a.$$

Kun $x \rightarrow 0$, niin myös $-x \rightarrow 0$. Siten $\lim_{x \rightarrow 0} f(-x) = a$.

$$\text{Tällöin } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(-x) = a \cdot a = a^2.$$

Oletuksen mukaan $f(x)f(-x) = -1$ kaikilla $x \neq 0$.

$$\text{Siten } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(-x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

$$\text{Tästä seuraa ristiriita } a^2 = -1.$$

Koska vastaoletus johtaa ristiriitaan, väite on tosi.

b) Esimerkiksi funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < 0 \\ -1, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

toteuttaa vaaditut ehdot.

Vastaus b) esimerkiksi $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < 0 \\ -1, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$

22

Funktiolle f pätee $f(a+b) = f(a) + f(b)$ kaikilla a ja b .

- a) Sijoitetaan yllä olevaan yhtälöön arvot $a = 0$ ja $b = 0$ ja ratkaistaan $f(0)$.

$$f(0+0) = f(0) + f(0)$$

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad | -f(0)$$

$$0 = f(0)$$

Siis $f(0) = 0$.

- b) Jos funktio f on jatkuva kohdassa 0 , niin

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Olkoon a jokin reaaliluku. Tällöin jokainen luku x on muotoa $x = a + h$.

Kun $x \rightarrow a$, niin $h \rightarrow 0$. Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (f(a) + f(h))$$

$$= f(a) + f(0)$$

$$= f(a) + 0$$

$$= f(a).$$

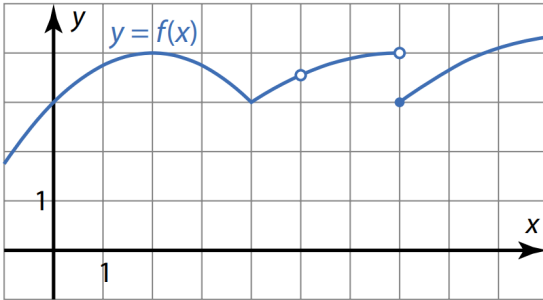
Siis f on jatkuva kohdassa a .

c) Esimerkiksi $f(x) = 2x$.

Koska $k(a + b) = ka + kb$ kaikilla k, a ja b , niin esimerkiksi kelpaavat kaikki muotoa $f(x) = kx$ olevat funktiot.

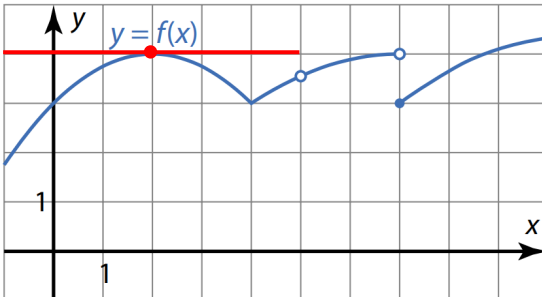
Vastaus c) esimerkiksi $f(x) = 2x$

23



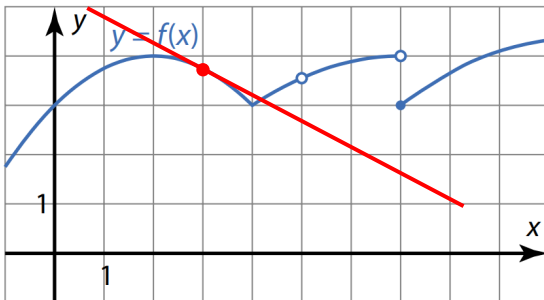
Funktion derivoituvuus voidaan päätellä kuvaajan avulla. Funktio on derivoituva tietyssä kohdassa, jos tähän kohtaan voidaan piirtää yksikäsitteisellä tavalla tangentti.

a)



Kohtaan $x = 2$ voidaan piirtää tangentti yksikäsitteisellä tavalla. Funktio f on derivoituva kohdassa 2.

b)



Kohtaan $x = 3$ voidaan piirtää tangentti yksikäsitteisellä tavalla. Funktio f on derivoituva kohdassa 3.

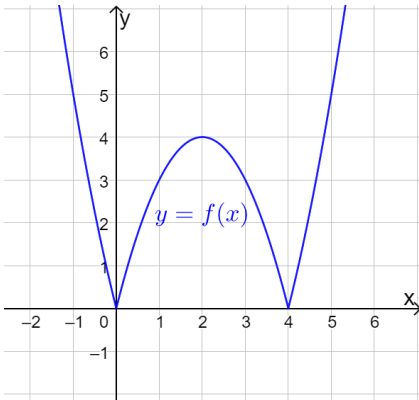
- c) Kohdassa $x = 4$ kuvaajalla on terävä kärki, eikä siihen voida piirtää tangenttia yksikäsitteisellä tavalla. Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 4.
- d) Funktio f ei ole määritelty kohdassa $x = 5$, joten kohtaan $x = 5$ ei voida piirtää tangenttia. Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 5.
- f) Funktio f ei ole jatkuva kohdassa $x = 7$, joten tähän kohtaan ei voida piirtää tangenttia yksikäsitteisellä tavalla. Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 7.

Vastaus

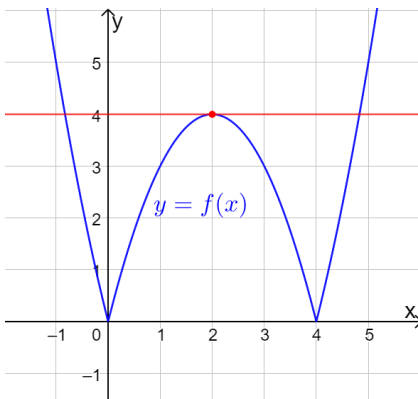
- a) on derivoituva
- b) on derivoituva
- c) ei ole derivoituva
- d) ei ole derivoituva
- e) ei ole derivoituva

24

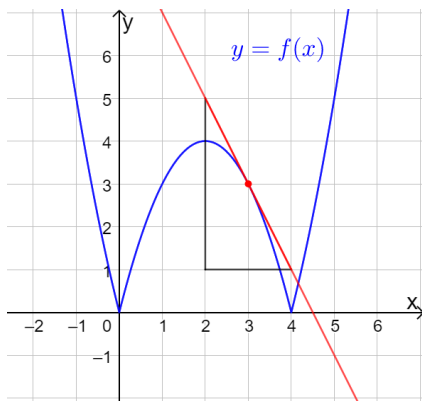
Piirretään kuvaaja geometriaohjelmalla.



a)



Funktion kuvaajalle kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentin kulmakerroin näyttää olevan 0. Siten $f'(2) \approx 0$.



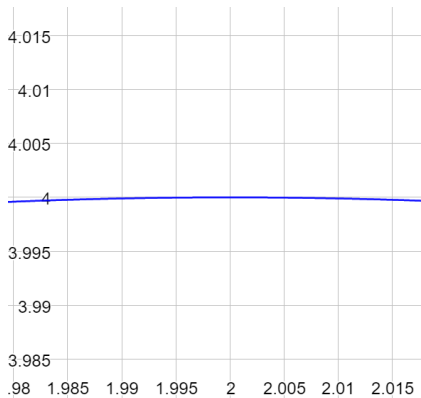
Kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin näyttää olevan

$$k = \frac{1-5}{4-2} = -2.$$

Siten $f'(3) \approx -2$.

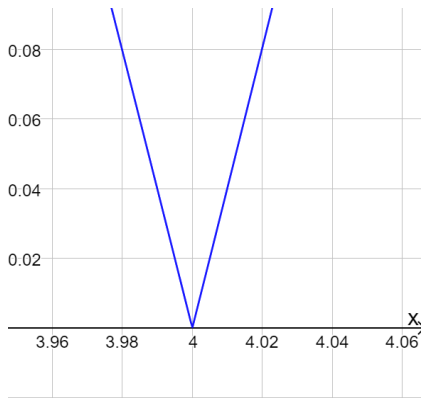
Huomaa! Tangentin kulmakertoimen voi määrittää myös geometriaohjelman kulmakerroin-toiminnolla.

- b) Suurennetaan kuvaajaa yhä uudestaan kohdassa 2. Kuvaaja näyttää oikeenevan suoraksi viivaksi. Alla esimerkkisuurennus.



Vastaava tapahtuu myös kohdassa 3.

- c) Suurennetaan kuvaajaa yhä uudestaan kohdassa 4. Kuvaajassa on aina terävä kärki. Alla esimerkkisuurennus.



- Vastaus
- a) $f'(2) \approx 0$ ja $f'(3) \approx -2$
 - b) kuvaaja näyttää oikeenevan suoraksi viivaksi
 - c) kuvaajassa on aina terävä kärki

25

Tapa 1: Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Muodostetaan funktion $f(x) = x^2$ erotusosamäärä kohdassa 3.

$$\begin{aligned}
 & \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
 &= \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\
 &= \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \\
 &= \frac{6h + h^2}{h} \\
 &= \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h, \text{ kun } h \neq 0
 \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 + 0 = 6$$

Tapa 2: Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Muodostetaan funktion $f(x) = x^2$ erotusosamäärä kohdassa 3.

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} \\ &= \frac{(x+3)(\cancel{x-3})}{\cancel{x-3}} \\ &= x + 3, \text{ kun } x \neq 3 \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

Vastaus $f'(3) = 6$

26

Tapa 1: Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Muodostetaan funktion $f(x) = x^2 + 3x$ erotusosamäärä kohdassa 0.

$$\begin{aligned}
 & \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\
 &= \frac{(0+h)^2 + 3(0+h) - (0^2 - 3 \cdot 0)}{h} \\
 &= \frac{h^2 + 3h - 0}{h} \\
 &= \frac{h^2 + 3h}{h} \\
 &= \frac{h(h+3)}{h} = h+3, \text{ kun } h \neq 0
 \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} (h+3) = 0+3 = 3$$

Tapa 2: Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Muodostetaan funktion $f(x) = x^2 + 3x$ erotusosamäärä kohdassa 0.

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \frac{x^2 + 3x - (0^2 - 3 \cdot 0)}{x - 0} \\ &= \frac{x^2 + 3x}{x} \\ &= \frac{x(x + 3)}{x} \\ &= x + 3, \text{ kun } x \neq 0 \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) = 0 + 3 = 3$$

Vastaus $f'(0) = 3$

27

Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Muodostetaan funktion $f(x) = 2\sqrt{x}$ erotusosamäärä kohdassa 1.

$$\begin{aligned}
 & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
 &= \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
 &= \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{1}}{x - 1} \\
 &= \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} \quad \text{lavennetaan lausekkeella } 2\sqrt{x} + 2 \\
 &= \frac{(2\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 2)}{(x - 1)(2\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{(2\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x - 1)(2\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{4x - 4}{(x - 1)(2\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{4\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x - 1)}(2\sqrt{x} + 2)} \\
 &= \frac{4}{2\sqrt{x} + 2}, \text{ kun } x \neq 1
 \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{2\sqrt{x} + 2} = \frac{4}{2\sqrt{1} + 2} = 1$$

Vastaus $f'(1) = 1$

28

Derivaatan määritelmä on $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Koska funktiolle f pätee $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 0$,
niin $f'(2) = 0$.

Funktio f on siis derivoituva ja siten myös jatkuva kohdassa 2.

Funktion arvosta $f(2)$ ei voida päätellä mitään annetuilla tiedoilla.

Vastaus Funktio on jatkuva ja derivoituva kohdassa 2.

Derivaatta $f'(2) = 0$.

Funktion arvosta $f(2)$ ei voi päätellä mitään.

29

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2, & \text{kun } x < 2 \\ 3 - x, & \text{kun } x \geq 2 \end{cases}$$

Tutkitaan, onko funktio f jatkuva kohdassa 2.

$$f(2) = 3 - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5 - x^2) = 5 - 2^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3 - x) = 3 - 2 = 1$$

Koska

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x),$$

niin funktio f on jatkuva kohdassa 2 ja siten se voi olla derivoituva kohdassa 2.

Tutkitaan, onko funktio f derivoituva kohdassa 2. Koska funktion lauseke vaihtuu tässä kohdassa, on määritettävä toispuoliset derivaatat.

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa 2.

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5 - x^2 - 1}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2 - x)(2 + x)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-\cancel{(x - 2)}(2 + x)}{\cancel{x - 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} -(2 + x) \\ &= -(2 + 2) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa 2.

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3 - x - 1}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - x}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Koska toispuoliset derivaatat ovat eri suuret, funktio ei ole derivoituva kohdassa 2.

Vastaus vasemmanpuoleinen derivaatta -4 ja oikeanpuoleinen derivaatta -1 , ei ole derivoituva

30

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{kun } x \leq 1 \\ 2x + 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

Tutkitaan, onko funktio f jatkuva kohdassa 1.

$$f(1) = 1^2 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

Koska

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x),$$

niin funktio f on jatkuva kohdassa 1 ja siten se voi olla derivoituva kohdassa 1.

Tutkitaan, onko funktio f derivoituva kohdassa 1. Koska funktion lauseke vaihtuu tässä kohdassa, on määritettävä toispuoliset derivaatat.

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa 1.

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2 - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

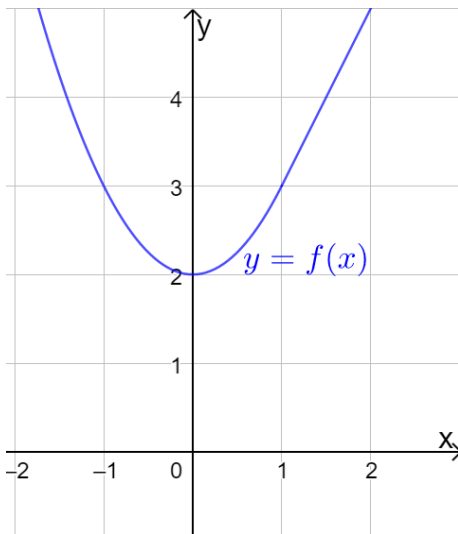
Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa 1.

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 1 - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Koska toispuoliset derivaatat ovat yhtä suuret, niin $f'(1) = 2$.

Funktio f on siis derivoituva kohdassa 1.

Piirretään funktion kuvaaja laskimella.



Vastaus on derivoituva

31

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{kun } x < -1 \\ x^3, & \text{kun } x \geq -1 \end{cases}$$

Tutkitaan, onko funktio f jatkuva kohdassa -1 .

$$f(-1) = (-1)^3 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + 1) = 3 \cdot (-1) + 1 = -2$$

Koska

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2 \quad \text{ja} \quad f(-1) = -1,$$

funktio f on epäjatkuva kohdassa -1 .

Siten se ei voi olla derivoituva kohdassa -1 .

Vastaus Koska $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2$ ja $f(-1) = -1$,
funktio f on epäjatkuva kohdassa -1 .
Siten se ei voi olla derivoituva kohdassa -1 .

32

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^2 g(x)$.

Funktion f arvo kohdassa 0 on

$$f(0) = 0^2 \cdot g(x) = 0.$$

Funktion f erotusosamäärä kohdassa 0 on

$$\begin{aligned} & \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \frac{(0+h)^2 \cdot g(0+h) - 0}{h} \\ &= \frac{\cancel{h^2} g(h)}{\cancel{h}} \\ &= h \cdot g(h). \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

Koska $-20 \leq g(x) \leq 16$ ja $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$,

niin $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot g(h) = 0$.

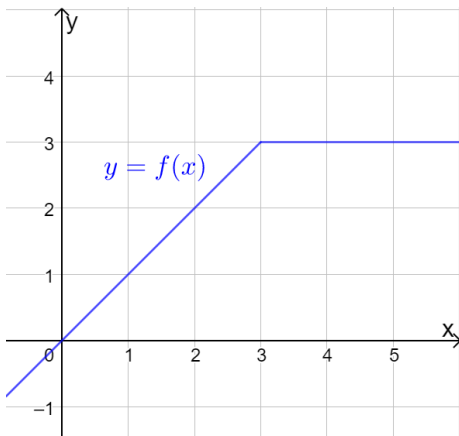
Funktio f on siis derivoituva kohdassa 0.

Vastaus Koska $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot g(h) = 0$,

niin funktio f on derivoituva kohdassa 0 .

33

Hahmotellaan ensiksi kuvaaja, joka on jatkuva, mutta ei derivoituva kohdassa 3.



Muodostetaan sitten funktion lauseke.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \leq 3 \\ 3, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

Osoitetaan, että funktio f on jatkuva kohdassa 3.

$$f(3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 3 = 3$$

Koska $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, niin funktio f on jatkuva kohdassa 3.

Osoitetaan, että funktio f ei ole derivoituva kohdassa 3.

Koska funktion lauseke vaihtuu tässä kohdassa, on määritettävä toispuoliset derivaatat.

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa 3.

$$\begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\cancel{x} - \cancel{3}}{\cancel{x} - \cancel{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa 3.

$$\begin{aligned} f'_+(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3 - 3}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{0}{x - 1} \\ &= \frac{0}{3 - 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Koska toispuoliset derivaatat ovat eri suuret, funktio f ei ole derivoituva kohdassa 3.

Vastaus esimerkiksi $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \leq 3 \\ 3, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$

34

Funktiolla f on seuraavat ominaisuudet:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y
- $f(0) = 0$
- f on derivoituva muuttujan arvolla 0 .

- a) Koska funktio f on derivoituva kohdassa 0 ja $f(0) = 0$, niin on oltava

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}.$$

Lasketaan funktion f derivaatta kohdassa x .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

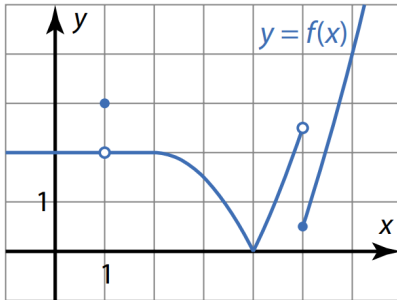
Näin ollen funktio f on kaikkialla derivoituva ja $f'(x) = f'(0)$.

b) Esimerkiksi funktio $f(x) = 3x$.

Koska $k(x + y) = kx + ky$ kaikilla k, x ja y ,
niin esimerkiksi kelpaavat kaikki muotoa $f(x) = kx$ olevat
funktioit.

Vastaus b) esimerkiksi funktio $f(x) = 3x$

35



- a) Kuvaajasta nähdään, että funktio ei ole jatkuva kohdissa $x = 1$ ja $x = 5$.
- b) Funktio on derivoituva niissä kohdissa, joihin voidaan piirtää yksikäsitteisellä tavalla tangentti.

Koska funktio ei ole jatkuva kohdissa $x = 1$ ja $x = 5$, ei se myöskään ole derivoituva kohdissa $x = 1$ ja $x = 5$.

Kohdassa $x = 4$ kuvaajalla on terävä kärki, eikä siihen voida piirtää tangenttia yksikäsitteisellä tavalla. Funktio ei siis ole derivoituva kohdassa $x = 4$.

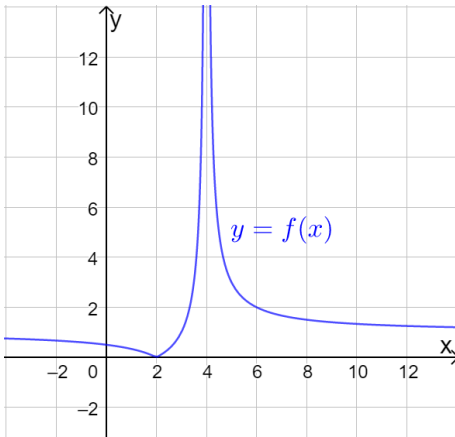
Funktio ei ole derivoituva kohdissa $x = 1$, $x = 4$ ja $x = 5$.

- c) a- ja b-kohdan tuloksien nojalla funktio on jatkuva, mutta ei derivoituva kohdassa $x = 4$.
- d) Jos funktio on derivoituva, niin se on myös jatkuva. Funktio f ei siis ole missään kohdassa derivoituva mutta ei jatkuva.

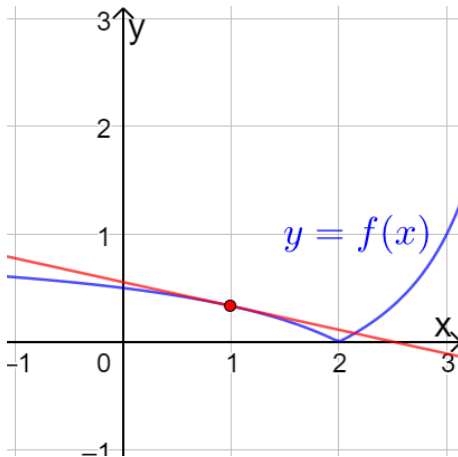
Vastaus a) kohdissa 1 ja 5
 b) kohdissa 1, 4 ja 5
 c) kohdassa 4
 d) ei missään (jos funktio on derivoituva, niin se on myös jatkuva)

36

Piirretään kuvaaja geometriaohjelmalla.

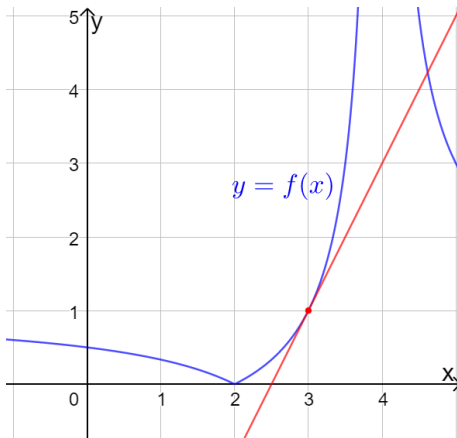


a) Piirretään kohtaan $x = 1$ tangentti.



Geometriaohjelman kulmakerroin-toiminnolla tangentin kulmakertoimeksi saadaan noin $-0,22$, joten $f'(1) \approx -0,22$.

- b) Kohdassa $x = 2$ kuvaajalla on terävä kärki, eikä siihen voida piirtää tangenttia yksikäsitteisellä tavalla. Funktio f ei ole derivoituva kohdassa 2.
- c) Piirretään kohtaan $x = 3$ tangentti.



Geometriaohjelman kulmakerroin-toiminnolla tangentin kulmakertoimeksi saadaan 2, joten $f'(3) = 2$.

- d) Funktio f ei ole määritelty kohdassa $x = 4$, joten kohtaan $x = 4$ ei voida piirtää tangenttia. Funktio f ei siis ole derivoituva kohdassa 4.

- Vastaus
- a) $f'(1) \approx -0,22$
 - b) ei ole derivoituva
 - c) $f'(3) = 2$
 - d) ei ole derivoituva

37

Tapa 1: Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Muodostetaan funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ erotusosamäärä kohdassa 2.

$$\begin{aligned}
 & \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \frac{\overset{2)}{2+h} \overset{2+h)}{1} - \frac{1}{2}}{h} \\
 &= \frac{\frac{2}{2(2+h)} - \frac{2+h}{2(2+h)}}{h} \\
 &= \frac{\frac{2-2-h}{2(2+h)}}{h} \\
 &= \frac{\cancel{2} - \cancel{2} - h}{\cancel{2}(2+h)} \\
 &= -\frac{1}{2(2+h)}, \text{ kun } h \neq 0
 \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{2(2+h)} = -\frac{1}{2(2+0)} = -\frac{1}{4}$$

Tapa 2: Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Muodostetaan funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ erotusosamäärä kohdassa 2.

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \frac{\overset{2)}{\frac{1}{x}} - \overset{x)}{\frac{1}{2}}}{x - 2} \\ &= \frac{\frac{2}{x} - \frac{x}{2}}{x - 2} \\ &= \frac{\frac{2x}{x} - \frac{2x}{2}}{x - 2} \\ &= \frac{2 - x}{x - 2} \\ &= \frac{2x}{x - 2} \\ &= \frac{\cancel{2x}}{\cancel{x - 2}} \\ &= -\frac{1}{2x}, \text{ kun } x \neq 2 \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$$

Vastaus $f'(2) = -\frac{1}{4}$

38

Tapa 1: Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Muodostetaan funktion $f(x) = x|x|$ erotusosamäärä kohdassa 0.

$$\begin{aligned} & \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \frac{(0+h)|0+h| - 0 \cdot |0|}{h} \\ &= \frac{h|h|}{h} \\ &= |h|, \text{ kun } h \neq 0 \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = |0| = 0$$

Tapa 2: Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Muodostetaan funktion $f(x) = x|x|$ erotusosamäärä kohdassa 0.

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \frac{x|x| - 0 \cdot |0|}{x - 0} \\ &= \frac{\cancel{x}|x|}{\cancel{x}} \\ &= |x|, \text{ kun } x \neq 0 \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0$$

Vastaus $f'(0) = 0$

39

Tapa 1: Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Muodostetaan funktion $f(x) = \sqrt{x}$ erotusosamäärä kohdassa $a > 0$.

$$\begin{aligned}
 & \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\
 &= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
 &= \frac{(\sqrt{a+h})^2 - (\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
 &= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
 &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}, \text{ kun } h \neq 0
 \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Tapa 2: Käytetään määritelmää $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Muodostetaan funktion $f(x) = \sqrt{x}$ erotusosamäärä kohdassa $a > 0$.

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{\cancel{x} - \cancel{a}}{(\cancel{x} - \cancel{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}, \text{ kun } x \neq a \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Koska $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ kaikilla $a > 0$,

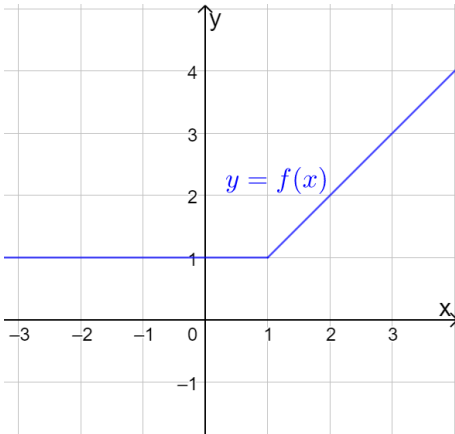
niin $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, kun $x > 0$.

Vastaus $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, kun $x > 0$

40

Hahmotellaan ensiksi kuvaaja, joka on kaikkialla jatkuva ja yhdessä kohdassa epäderivoituva. Muodostetaan sitten funktion lauseke.



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \leq 1 \\ x, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

Vakiofunktio 1 on jatkuva ja derivoituva välillä $x < 1$ ja polynomifunktio x on jatkuva ja derivoituva välillä $x > 1$.

Osoitetaan, että funktio f jatkuva kohdassa 1 .

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$$

Koska funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, niin funktio on f on jatkuva kohdassa 1 .

Osoitetaan, että funktio f ei ole derivoituva kohdassa 1.

Koska funktion lauseke vaihtuu tässä kohdassa, on määritettävä erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot.

Lasketaan funktion f erotusosamäärän vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0}{x - 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f erotusosamäärän oikeapuoleinen raja-arvo kohdassa 1.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, funktio f ei ole derivoituva kohdassa 1.

Vastaus esimerkiksi $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \leq 1 \\ x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$

41

Oletus: Funktio f ei ole jatkuva kohdassa a .

Väite: Funktio f ei ole derivoituva kohdassa a .

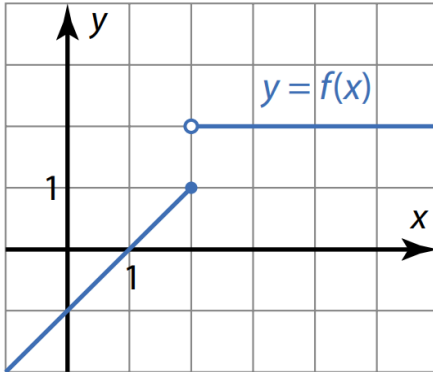
Todistus: Oletetaan vastoin väitettä, että funktio f on derivoituva kohdassa a .

Mutta tällöin funktio f on jatkuva kohdassa a , mikä on ristiriita oletuksen kanssa.

Koska vastaoletus johtaa ristiriitaan, niin väite on tosi.

42

a)



Kun $x \leq 2$, funktion f kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on 1. Funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa 2 on siis 1.

b) Muodostetaan funktion f erotusosamäärän oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa 2.

Kun $x > 2$, niin $f(x) = 2$, mutta $f(2) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{2 - 1}{x - 2} = \frac{1}{0}, \text{ jota ei ole määritelty.}$$

Koska erotusosamäärällä ei ole oikeanpuoleista raja-arvoa, niin funktiolla ei ole oikeanpuoleista derivaattaa kohdassa 2.

Vastaus a) 1

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{2 - 1}{x - 2} \text{ ei ole määritelty}$$

43

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{kun } x < 1 \\ 2x - 4, & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

Tutkitaan, onko funktio f jatkuva kohdassa 1.

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3) = 1^2 - 3 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 4) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$$

Koska funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, niin funktio f on jatkuva kohdassa 1 ja siten se voi olla derivoituva kohdassa 1.

Tutkitaan, onko funktio f derivoituva kohdassa 1. Koska funktion lauseke vaihtuu tässä kohdassa, on määritettävä toispuoliset derivaatat.

Lasketaan funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa 1.

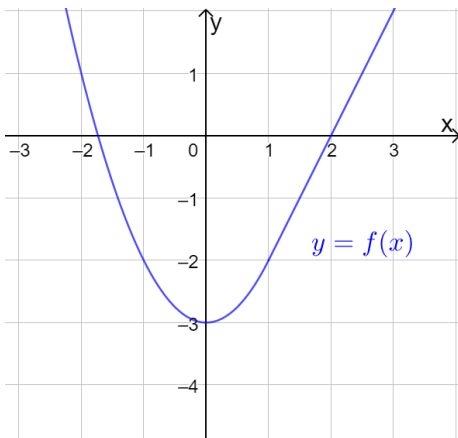
$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3 - (-2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa 1.

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 4 - (-2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Koska toispuoliset derivaatat ovat yhtä suuret, niin $f'(1) = 2$.
Funkto f on siis derivoituva kohdassa 1.

Piirretään funktion kuvaaja laskimella.



Vastaus on derivoituva

44

- a) Muodostetaan funktion $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ erotusosamäärä kohdassa 0.

$$\begin{aligned} & \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \frac{\frac{0+h}{1+|0+h|} - \frac{0}{1+|0|}}{h} \\ &= \frac{\cancel{0} + \cancel{h}}{1+|h|} \cdot \frac{1}{\cancel{h}} \\ &= \frac{1}{1+|h|} \end{aligned}$$

Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 0.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1+|h|} = \frac{1}{1+|0|} = 1$$

Koska erotusosamäärällä on raja-arvo, niin funktio f on derivoituva kohdassa 0.

b) Kun $x < 0$, niin $f(x) = \frac{x}{1-x}$ ja

$$g(x) = f'(x) = \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Kun $x > 0$, niin $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ja

$$g(x) = f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Kun $x = 0$, niin $g(0) = f'(0) = 1$.

Lasketaan funktion g vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa 0.

$$\begin{aligned} g'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{(1-x)^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - (1-x)^2}{x(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1 + 2x - x^2}{x(1-x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - x^2}{x(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(2-x)}{\cancel{x}(1-x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{2-0}{(1-0)^2} = 2 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion g oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa 0.

$$\begin{aligned} g_+'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - (1+x)^2}{x(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - 1 - 2x - x^2}{x(1+x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2x - x^2}{x(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cancel{x}(-2-x)}{\cancel{x}(1+x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2-x}{(1+x)^2} = \frac{-2-0}{(1+0)^2} = -2 \end{aligned}$$

Koska funktion g toispuoliset derivaatat kohdassa 0 ovat eri suuret, funktio g ei ole derivoituva kohdassa 0.

45

Funktiolla f on seuraavat ominaisuudet:

- $f(x+y) = f(x)f(y)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y
- $f(0) = 1$
- f on derivoituva muuttujan arvolla 0 .

Koska funktio f on derivoituva kohdassa 0 , niin on olemassa

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Lasketaan funktion f erotusosamäärän raja-arvo kohdassa x .

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \frac{f(h) - 1}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \frac{f(h) - f(0)}{h} \right) \\ &= f(x)f'(0) \end{aligned}$$

Koska erotusosamäärällä on raja-arvo, niin funktio f on derivoituva kaikkialla ja $f'(x) = f(x)f'(0)$.

Esimerkiksi funktio $f(x) = e^x$ toteuttaa ehdot.

Vastaus esimerkiksi funktio $f(x) = e^x$

46

Funktio $f(x)$ määritellään kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} p(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{kun } x > 0, \\ \ln(1-x), & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$

missä $p(x) = ax^2 + c$ on toisen asteen polynomi.

Funktio f on derivoituva, kun $x \neq 0$.

Jotta funktio f olisi derivoituva kohdassa 0 , sen tulee olla jatkuva kohdassa 0 .

Koska

$$f(0) = \ln(1-0) = 0,$$

on oltava

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + c) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Näin käy vain, jos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + c) = c = 0.$$

Siis funktio f on jatkuva kohdassa 0 vain, jos $p(x) = ax^2$.

Funktio f on derivoituva kohdassa 0 vain, jos sen toispuoliset derivaatat kohdassa 0 ovat yhtä suuret.

Lasketaan funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa 0 .

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ah^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{1}{h}\right)}{\frac{3}{2}h^{\frac{1}{2}}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} ah \cdot \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0 \end{aligned}$$

Koska funktio $\ln(1-x)$ on tavalliseen tapaan derivoituva kohdassa 0 , on sen erotusosamäärän (vasemman- ja oikeanpuoleinen) raja-arvo kohdassa 0 derivaattafunktion arvo kohdassa 0 .

Derivaattafunktion $D\ln(1-x) = \frac{-1}{1-x}$ arvo kohdassa 0 on -1 .

Siten funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa 0 on

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1.$$

Koska toispuoliset derivaatat kohdassa 0 ovat eri suuret, funktio f ei ole derivoituva kohdassa 0 .

Vastaus Kertoimia a ja c ei ole olemassa.

47

- a) Funktio $f(x) = x^3 - x + 2$ on polynomifunktio ja siksi se on jatkuva välillä $[-1, 2]$ ja derivoituva välillä $] -1, 2[$.

Väliarvolauseen mukaan välillä $] -1, 2[$ on sellainen luku c , että

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}.$$

Lasketaan funktion $f(x) = x^3 - x + 2$ arvot.

$$f(2) = 2^3 - 2 + 2 = 8$$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) + 2 = 2$$

Lasketaan derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 1$ arvo.

$$f'(c) = 3c^2 - 1$$

Saadaan

$$3c^2 - 1 = \frac{8 - 2}{2 + 1}$$

$$c^2 = 1$$

$$c = 1 \text{ tai } c = -1$$

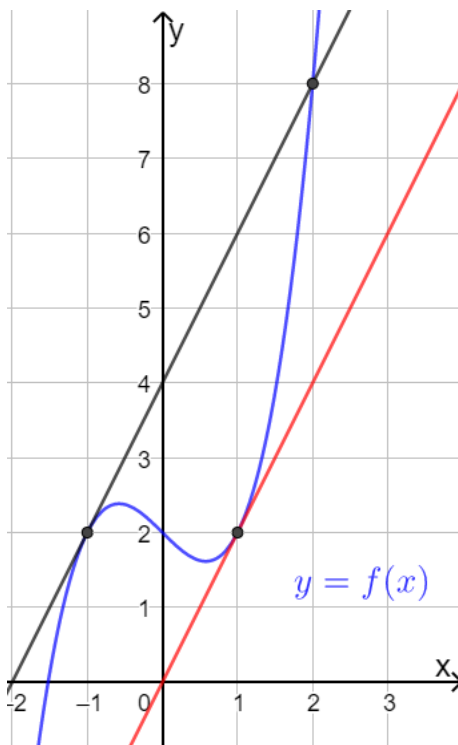
Yhtälö toteutuu välillä $] -1, 2[$ kohdassa $c = 1$.

b) Yhtälön

$$f'(1) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}$$

oikea puoli on kuvaajan pisteitä $(-1, 2)$ ja $(2, 8)$ yhdistävän suoran kulmakerroin ja vasen puoli kohtaan 1 piirretyn tangentin kulmakerroin.

Yhtälö tarkoittaa, että välin päätepisteitä $(-1, 2)$ ja $(2, 8)$ yhdistävä suora ja kohtaan 1 piirretty tangentti ovat yhdensuuntaiset.



Vastaus a) $c = 1$

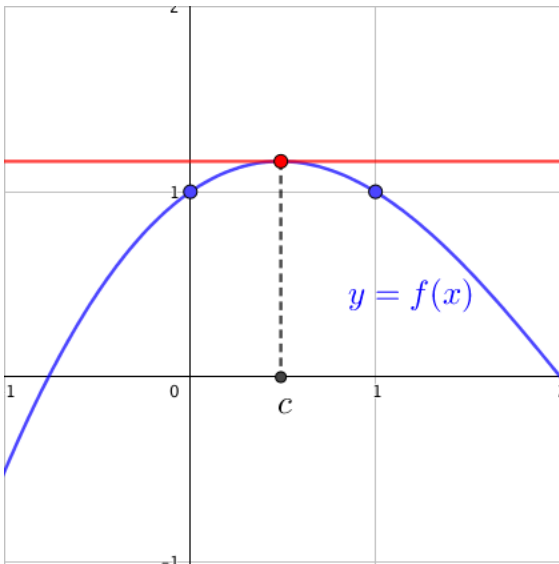
48

Funktio $f(x) = 2^x - x^2$ on kaikkialla jatkuva ja derivoituva.

Väliarvolauseen nojalla välillä $]0, 1[$ on siis sellainen luku c , että

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \\ &= \frac{(2^1 - 1^2) - (2^0 - 0^2)}{1} \\ &= \frac{1 - 1}{1} = 0. \end{aligned}$$

Ratkaisua voi havainnollistaa piirtämällä kuvaajan.



49

Määritetään erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot kohdassa a . Käytetään hyväksi differentiaalilaskennan väliarvolausetta, jonka oletukset ovat voimassa.

Kun $x > a$, niin $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$ jollakin luvulla $c_x \in]a, x[$.

Kun $x \rightarrow a^+$, niin myös välillä $]a, x[$ oleva luku c_x lähestyy a :ta ja tällöin oletuksen mukaan $f'(c_x) \rightarrow b$.

Näin ollen $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(c_x) = b$.

Funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa a on $f'_+(a) = b$.

Vastaavasti, kun $x < a$, niin $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(c_x)$

jollakin luvulla $c_x \in]x, a[$. Kun $x \rightarrow a^-$, niin myös välillä $]x, a[$ oleva luku c_x lähestyy a :ta ja tällöin oletuksen mukaan $f'(c_x) \rightarrow b$.

Näin ollen $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(c_x) = b$.

Funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa a on $f'_-(a) = b$.

Koska funktion f toispuoliset derivaatat ovat kohdassa a yhtä suuret, on funktio tässä kohdassa derivoituva ja $f'(a) = b$.



50

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{kun } x \leq 2 \\ \sqrt{x-1}, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

1) Tutkitaan, onko funktio f jatkuva kohdassa 2.

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{2}x \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-1} = \sqrt{2-1} = 1$$

Koska funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, niin funktio f on jatkuva kohdassa 2 ja siten se voi olla derivoituva kohdassa 2.

$$\text{2) Välillä } x < 2 \text{ on } f'(x) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Välillä } x > 2 \text{ on } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

3) Lasketaan derivaattafunktioiden toispuoliset raja-arvot kohdassa 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2}$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, niin $f'(x) = \frac{1}{2}$.

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \leq 2 \\ 2^x, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

1) Tutkitaan, onko funktio f jatkuva kohdassa 2.

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2) = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2^x = 2^2 = 4$$

Koska funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, niin funktio f on jatkuva kohdassa 2 ja siten se voi olla derivoituva kohdassa 2.

2) Välillä $x < 2$ on $f'(x) = 2x$.

Välillä $x < 2$ on $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$.

3) Lasketaan derivaattafunktioiden toispuoleiset raja-arvot kohdassa 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\ln(2) \cdot 2^x) = \ln(2) \cdot 2^2 = \ln(2) \cdot 4 \text{ (}\neq 4\text{)}$$

Koska toispuoliset raja-arvot eivät ole yhtä suuret, funktiolla ei ole derivaattaa kohdassa 2.

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x^2, & \text{kun } x \leq 2 \\ \ln x, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

1) Tutkitaan, onko funktio f jatkuva kohdassa 2.

$$f(2) = \frac{1}{8} \cdot 2^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{8}x^2 \right) = \frac{1}{8} \cdot 2^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\ln x) = \ln 2 \quad (\neq \frac{1}{2})$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, niin funktio f ei ole jatkuva kohdassa 2 ja siten se ei voi olla derivoituva kohdassa 2.

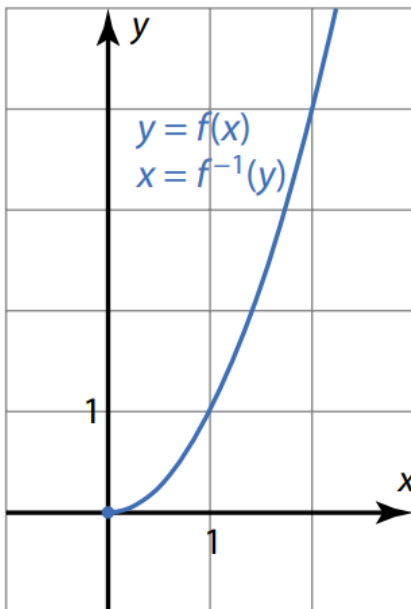
Vastaus a) $f'(x) = \frac{1}{2}$

b) Derivaattaa ei ole, koska toispuoleiset derivaatat ovat eri suuret.

c) Derivaattaa ei ole, koska funktio ei ole jatkuva.

51

a)



Luetaan kuvaajalta käänteisfunktion $f^{-1}(y) = x$ arvot.

$$f^{-1}(0) = 0$$

$$f^{-1}(1) \approx 1$$

$$f^{-1}(2) \approx 1,4$$

$$f^{-1}(4) \approx 2$$

b) Funktio f ja käänteisfunktio f^{-1} ovat vastakkaisia operaatioita, joten yhdistetyssä funktiossa ne kumoavat toisensa.

$$f^{-1}(f(2)) = 2$$

$$f(f^{-1}(3)) = 3$$

- c) Funktion f arvojoukko on $[0, \infty[$, joten käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on $[0, \infty[$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

$$x^2 = y$$

$$x = \pm\sqrt{y}$$

Koska nyt $x \geq 0$, niin $x = \sqrt{y}$.

Käänteisfunktion on lauseke on $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Vastaus a) $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(1) \approx 1$, $f^{-1}(2) \approx 1,4$ ja $f^{-1}(4) \approx 2$

b) $f^{-1}(f(2)) = 2$ ja $f^{-1}(f(3)) = 3$

c) määrittelyjoukko $[0, \infty[$
ja lauseke $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

52

- a) Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

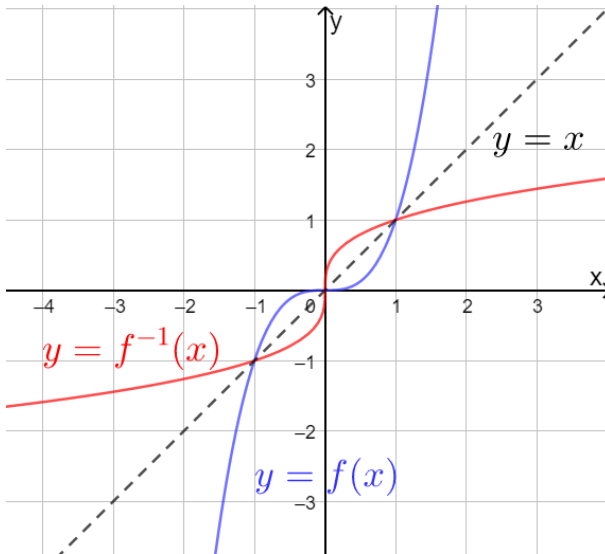
$$x^3 = y$$

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Kun vaihdetaan muuttuja, saadaan $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

- b) Piirretään funktioiden $f(x) = x^3$ ja $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ kuvaajat laskimella.



Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko $\mathbf{R}$.

Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko $\mathbf{R}$.

Vastaus a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

b) Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko $\mathbf{R}$. Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko $\mathbf{R}$.

53

a) Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$-2x + 6 = y$$

$$-2x = y - 6 \quad | :(-2)$$

$$x = -\frac{1}{2}y + 3$$

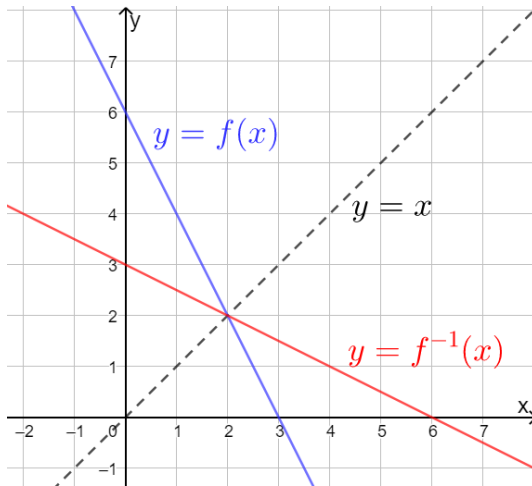
Käänteisfunktion lauseke on

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{2}y + 3.$$

Kun vaihdetaan muuttuja, saadaan

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 3.$$

- b) Piirretään funktioiden $f(x) = -2x + 6$ ja $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ kuvaajat.



Vastaus a) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

54

- a) Derivoidaan funktio $f(x) = -x^2 + 5$.

$$f'(x) = -2x$$

Koska $-2x \leq 0$, kun $x \geq 0$,

ja $-2x = 0$ vain yksittäisessä kohdassa $x = 0$,

niin funktio f on aidosti vähenevä välillä $[0, \infty[$.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

- b) Koska funktio f on aidosti vähenevä, sen suurin arvo on $f(0) = 5$.

Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeavan paraabelin se osa, jossa $x \geq 0$.

Siis funktion f määrittelyjoukko on $[0, \infty[$ ja arvojoukko $] -\infty, 5]$.

Täten käänteisfunktion määrittelyjoukko on $] -\infty, 5]$ ja arvojoukko $[0, \infty[$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

$$-x^2 + 5 = y$$

$$x^2 = 5 - y$$

$$x = \sqrt{5 - y} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{5 - y}$$

Koska funktion f määrittelyjoukossa $x \geq 0$, niin $x = \sqrt{5 - y}$.

Siis $f^{-1}(y) = \sqrt{5 - y}$.

Kun vaihdetaan muuttujaksi x , saadaan

$$f^{-1} :]-\infty, 5] \rightarrow [0, \infty[, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{5 - x}.$$

Vastaus a) Funktio f on aidosti vähenevä, kun $x \geq 0$, joten sillä on käänteisfunktio.

$$\text{b) } f^{-1} :]-\infty, 5] \rightarrow [0, \infty[, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{5 - x}$$

55

- a) Derivoidaan funktio $f(x) = e^{2x}$.

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

Koska $2e^{2x} > 0$ kaikilla x , niin funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

- b) Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko $]0, \infty[$.
Täten käänteisfunktion määrittelyjoukko on $]0, \infty[$ ja arvojoukko $\mathbf{R}$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

$$e^{2x} = y$$

$$2x = \ln y \quad | :2$$

$$x = \frac{1}{2} \ln y$$

$$\text{Siis } f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln y.$$

Kun vaihdetaan muuttujaksi x , saadaan

$$f^{-1} :]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln x.$$

$$\text{c) } f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^{2x}) = \frac{1}{2} \ln e^{2x} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \ln e = x$$

Vastaus a) Funktio f on aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio.

$$\text{b) } f^{-1} :]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\text{c) } f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2} \ln e^{2x} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \ln e = x$$

56

- a) Derivoidaan funktio $f(x) = -x^3 - x + 5$.

$$f'(x) = -3x^2 - 1$$

Koska

$$-3x^2 - 1 \leq 0 - 1 < 0$$

kaikilla x , niin funktio f on aidosti vähenevä.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

- b) Tehtävänä on määrittää sellainen x , että

$$f^{-1}(3) = x \text{ ja } f(x) = 3.$$

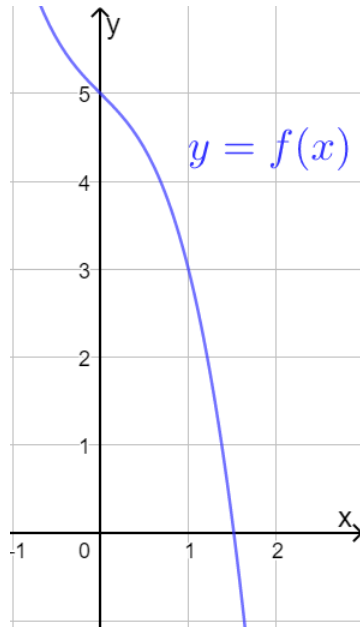
Käytetään apuna funktion kuvaajaa.

Huomataan, että

$$f(1) = -1^3 - 1 + 5 = 3,$$

joten

$$f^{-1}(3) = 1.$$



Tehtävänä on määrittää sellainen x , että

$$f^{-1}(0) = x \text{ ja } f(x) = 0.$$

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^3 - x + 5 &= 0 \\ x &= 1,5160... \end{aligned}$$

Saadaan $f^{-1}(0) \approx 1,52$.

c) Käänteisfunktion nollakohta on se muuttujan y arvo, jolla

$$f^{-1}(y) = 0 \text{ eli } f(0) = y.$$

Koska

$$f(0) = -0^3 - 0 + 5 = 5,$$

niin

$$f^{-1}(5) = 0.$$

Vastaus a) Koska $f'(x) < 0$ kaikilla x , funktio f on aidosti vähenevä ja sillä on käänteisfunktio.

$$\text{b) } f^{-1}(3) = 1 \text{ ja } f^{-1}(0) \approx 1,52$$

$$\text{c) } 5$$

57

- a) Derivoidaan funktio $f(x) = e^x + x + 1$.

$$f'(x) = e^x + 1$$

Koska

$$e^x + 1 > 0 + 1 > 0$$

kaikilla x , niin funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

- b) Tehtävänä on määrittää sellainen x , että

$$f^{-1}(2) = x \text{ ja } f(x) = 2.$$

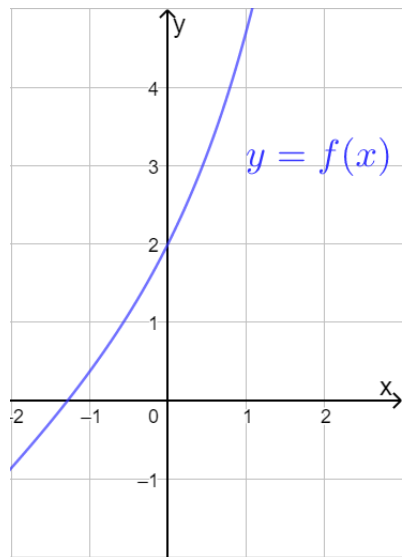
Käytetään apuna funktion kuvaajaa.

Huomataan, että

$$f(0) = e^0 + 0 + 1 = 1 + 1 = 2,$$

joten

$$f^{-1}(2) = 0.$$



c) Tehtävänä on määrittää sellainen y , että

$$f^{-1}(y) = 2 \quad \text{eli} \quad f(2) = y.$$

Koska

$$f(2) = e^2 + 2 + 1 = e^2 + 3,$$

niin

$$y = e^2 + 3.$$

Vastaus a) Koska $f'(x) > 0$ kaikilla x , niin funktio f on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio.

b) $f^{-1}(2) = 0$

c) kohdassa $e^2 + 3$

58

- a) Derivoidaan funktio $f(x) = x^2 - 2x$.

$$f'(x) = 2x - 2$$

Koska $2x - 2 \geq 2 \cdot 1 - 2 = 0$, kun $x \geq 1$,
ja $2x - 2 = 0$ vain yksittäisessä kohdassa $x = 1$,
niin funktio f on aidosti kasvava välillä $[1, \infty[$.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

- b) Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

$$x^2 - 2x = y$$

$$x^2 - 2x - y = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot 1 \cdot y}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4(1 + y)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 + y}}{2}$$

$$x = \frac{2 \cdot (1 \pm \sqrt{1 + y})}{2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + y}$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

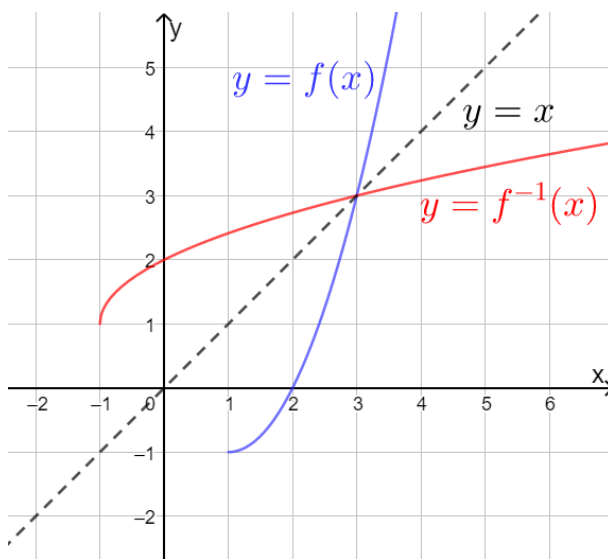
Koska funktion f määrittelyjoukossa $x \geq 1$,
niin $x = 1 + \sqrt{y+1}$.

$$\text{Siis } f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y+1}.$$

Kun vaihdetaan muuttujaksi x , saadaan

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}.$$

- c) Piirretään funktioiden $f(x) = x^2 - 2x$ ja $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ kuvaajat.



Vastaus a) Funktio f on aidosti vähenevä, kun $x \geq 0$, joten sillä on käänteisfunktio.

b) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

59

Neliöjuuren määritelmän mukaan

$$x = \sqrt{y} \Leftrightarrow x^2 = y \text{ ja } x \geq 0.$$

Funktion $f(x) = x^2$, missä $x > 0$, käänteisfunktio on $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2x$.

Sovelletaan käänteisfunktion derivointikaavaa funktioon

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{f'(\sqrt{y})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

missä $y > 0$.

Siis $D \sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, missä $y > 0$.

Kun muuttujaksi vaihdetaan x , saadaan $D \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, missä $x > 0$.

Vastaus D $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, missä $x > 0$

60

- a) Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 + x + 3$.

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

Koska $3x^2 + 1 > 0$, kaikilla x ,

niin funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

- b) Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = 1.$$

Ratkaistaan derivointia varten muuttuja x .

$$f(x) = 1$$

$$x^3 + x + 3 = 1$$

$$x = -1$$

Siis

$$f(-1) = 1$$

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4$$

ja

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{4}.$$

Vastaavasti

$$(f^{-1})'(-7) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = -7.$$

Ratkaistaan derivointia varten muuttuja x .

$$f(x) = -7$$

$$x^3 + x + 3 = -7$$

$$x = -2$$

Siis

$$f(-2) = -7$$

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 1 = 13$$

ja

$$(f^{-1})'(-7) = \frac{1}{f'(-2)} = \frac{1}{13}.$$

Vastaus a) Koska $f'(x) > 0$ kaikilla x , funktio f on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio.

$$\text{b) } (f^{-1})'(1) = \frac{1}{4} \text{ ja } (f^{-1})'(-7) = \frac{1}{13}$$

61

- a) Derivoidaan funktio $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + 7$.

$$f'(x) = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Koska $(x + 3)^2 = 0$, kun $x = -3$,

ja $(x + 3)^2 > 0$, kun $x \neq -3$,

niin funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

- b) Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = 7.$$

Ratkaistaan derivointia varten muuttuja x .

$$f(x) = 7$$

$$\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + 7 = 7$$

$$x = 0$$

Siis

$$f(0) = 7$$

$$f'(0) = (0 + 3)^2 = 9$$

ja

$$(f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{9}.$$

- c) Käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva kohdassa $y = f(x)$, jossa $f'(x) = 0$.

a-kohdassa havaittiin, että $f'(x) = 0$ ainoastaan kohdassa $x = -3$.

Käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva kohdassa

$$y = f(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) + 7 = -2.$$

Vastaus a) Koska $f'(x) = 0$, kun $x = -3$, ja $f'(x) > 0$ muuten, niin funktio f on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio.

b) $(f^{-1})'(7) = \frac{1}{9}$

c) kohdassa -2

62

$$f(x) = \ln x + x - 1, \text{ missä } x > 0$$

a) Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

Koska $\frac{1}{x} + 1 > 0$, kun $x > 0$,

niin funktio f on aidosti kasvava, kun $x > 0$.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

b) Tehtävänä on määrittää sellainen x , että

$$f^{-1}(0) = x \text{ ja } f(x) = 0.$$

Ratkaistaan muuttuja x .

$$f(x) = 0$$

$$\ln x + x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Siis $f^{-1}(0) = 1$.

Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = 0.$$

Nyt

$$f(1) = 0,$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

ja

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

Vastaus a) Koska $f'(x) > 0$, kun $x > 0$,
niin funktio f on aidosti kasvava
ja sillä on käänteisfunktio.

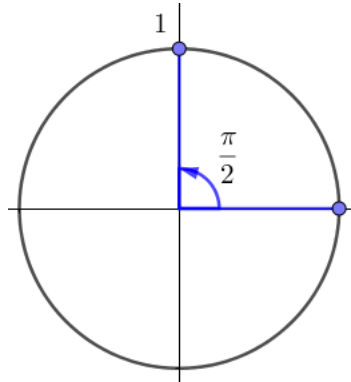
$$\text{b) } f^{-1}(0) = 1 \text{ ja } (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}$$

63

Funktion $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

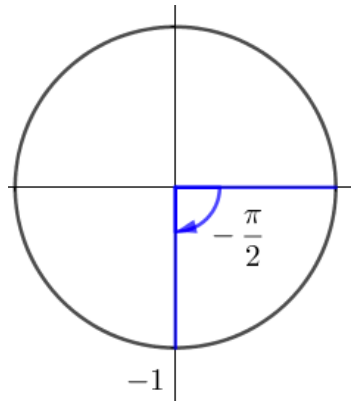
a) Koska $\sin \frac{\pi}{2} = 1$,

niin $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

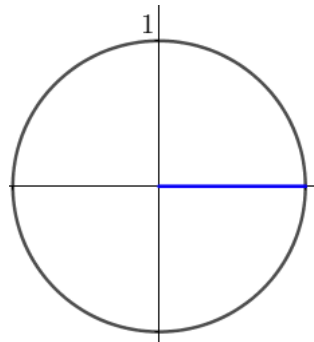


b) Koska $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$,

niin $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.



c) Koska $\sin 0 = 0$,
niin $\arcsin 0 = 0$.



Vastaus a) $\frac{\pi}{2}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) 0

64

- a) Funktion $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = 0.$$

Ratkaistaan derivointia varten muuttuja x .

$$f(x) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = 0$$

Derivoidaan funktio $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \cos x$$

Siis

$$f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1$$

ja

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

b) Funktion $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = \frac{1}{2}.$$

Ratkaistaan derivointia varten muuttuja x .

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Siis

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ja

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

c) Funktion $f(x) = \sin x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ratkaistaan derivointia varten muuttuja x .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

Siis

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

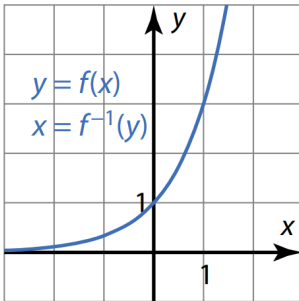
ja

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$$

Vastaus a) 1 b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{2}$

65

a)



Luetaan kuvaajalta käänteisfunktion $f^{-1}(y) = x$ arvot.

$$f^{-1}(1) \approx 0$$

$$f^{-1}(3) \approx 1$$

$$f^{-1}(4) \approx 1,3$$

b) Funktio f ja käänteisfunktio f^{-1} ovat vastakkaisia operaatioita, joten yhdistetyssä funktiossa ne kumoavat toisensa.

$$f^{-1}(f(1)) = 1$$

$$f(f^{-1}(2)) = 2$$

c) Funktion f arvojoukko on $]0, \infty[$.

Käänteisfunktion määrittelyjoukko on siis $]0, \infty[$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

$$3^x = y$$

$$x = \log_3 y$$

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \log_3 y$.

Kun vaihdetaan muuttuja, saadaan $f^{-1}(x) = \log_3 x$.

Vastaus a) $f^{-1}(1) \approx 0$, $f^{-1}(3) \approx 1$ ja $f^{-1}(4) \approx 1,3$

b) $f^{-1}(f(1)) = 1$ ja $f^{-1}(f(1)) = 2$

c) määrittelyjoukko $]0, \infty[$

ja lauseke $f^{-1}(x) = \log_3 x$

66

- a) Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

$$e^{x-1} = y$$

$$x - 1 = \ln y$$

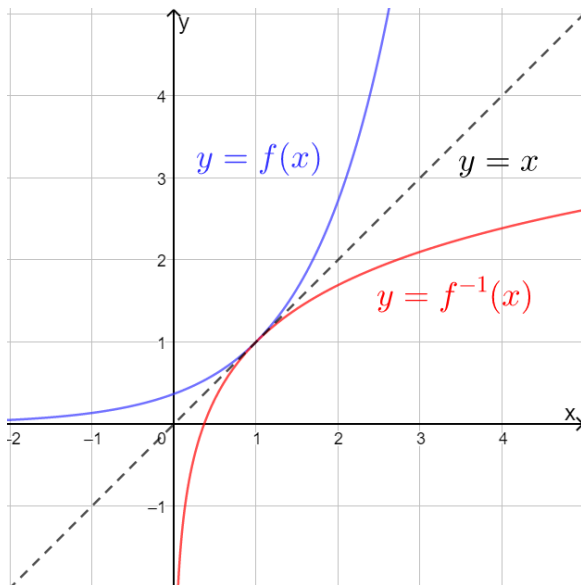
$$x = \ln y + 1$$

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \ln y + 1$.

Kun vaihdetaan muuttuja, saadaan $f^{-1}(x) = \ln x + 1$.

- b) Funktion $f(x) = e^{x-1}$ arvojoukko on $A_f =]0, \infty[$.
- c) Käänteisfunktion $f^{-1}(x) = \ln x + 1$ määrittelyjoukko on $M_{f^{-1}} =]0, \infty[$.
- d) $f^{-1} :]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \ln x + 1$

- e) Piirretään funktioiden $f(x) = e^{x-1}$ ja $f^{-1}(x) = \ln x + 1$ kuvaajat laskimella.



Vastaus a) $f^{-1}(x) = \ln x + 1$

b) $A_f =]0, \infty[$

c) $M_{f^{-1}} =]0, \infty[$

d) $f^{-1} :]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}, f^{-1}(x) = \ln x + 1$

67

- a) Funktio $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$ on aidosti kasvava ja sen kuvaaja on nouseva suora.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

- b) Funktion f määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko $\mathbf{R}$.
Täten käänteisfunktion määrittelyjoukko on $\mathbf{R}$ ja arvojoukko $\mathbf{R}$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

$$\frac{2}{3}x - 4 = y$$

$$x = \frac{3}{2}y + 6$$

$$\text{Siis } f^{-1}(y) = \frac{3}{2}y + 6.$$

Kun vaihdetaan muuttujaksi x , saadaan

$$f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + 6.$$

c)

$$\begin{aligned}f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{2}{3}x - 4\right) \\&= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}x - 4\right) + 6 \\&= x - 6 + 6 \\&= x\end{aligned}$$

Vastaus a) Funktio f on aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio.

$$\text{b) } f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + 6$$

$$\text{c) } f^{-1}(f(x)) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}x - 4\right) + 6 = x$$

68

- a) Derivoidaan funktio $f(x) = x^2 - 2$.

$$f'(x) = 2x$$

Koska $2x \leq 0$, kun $x \leq 0$,
ja $2x = 0$ vain yksittäisessä kohdassa $x = 0$,
niin funktio f on aidosti vähenevä välillä $]-\infty, 0]$.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

- b) Koska funktio f on aidosti vähenevä, sen pienin arvo on $f(0) = -2$.

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeavan paraabelin se osa, jossa $x \leq 0$.

Siis funktion f määrittelyjoukko on $]-\infty, 0]$ ja arvojoukko $[-2, \infty[$.

Täten käänteisfunktion määrittelyjoukko on $[-2, \infty[$ ja arvojoukko $]-\infty, 0]$.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

$$x^2 - 2 = y$$

$$x^2 = y + 2$$

$$x = \sqrt{y + 2} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{y + 2}$$

Koska funktion f määrittelyjoukossa $x \leq 0$,
niin $x = -\sqrt{y + 2}$.

$$\text{Siis } f^{-1}(y) = -\sqrt{y + 2}.$$

Kun vaihdetaan muuttujaksi x , saadaan

$$f^{-1} : [-2, \infty[\rightarrow]-\infty, 0], \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 2}.$$

Vastaus a) Funktio f on aidosti vähenevä, kun $x \leq 0$,
joten sillä on käänteisfunktio.

$$\text{b) } f^{-1} : [-2, \infty[\rightarrow]-\infty, 0], \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 2}$$

69

- a) Derivoidaan funktio $f(x) = x^5 + x + 2$.

$$f'(x) = 5x^4 + 1$$

Koska

$$5x^4 + 1 \geq 0 + 1 > 0$$

kaikilla x , niin funktio f on aidosti kasvava.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

- b) Tehtävänä on määrittää sellainen x , että

$$f^{-1}(0) = x \text{ ja } f(x) = 0.$$

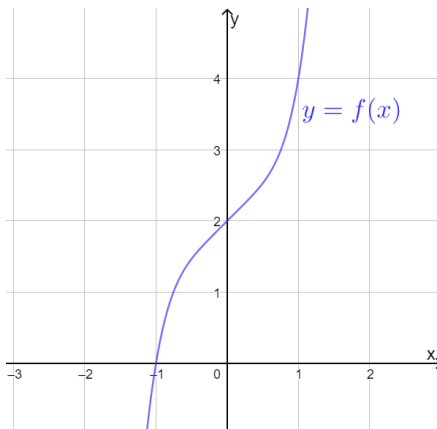
Käytetään apuna funktion kuvaajaa.

Huomataan, että

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^5 + (-1) + 2 \\ &= -1 - 1 + 2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

joten

$$f^{-1}(0) = -1.$$



Tehtävänä on määrittää sellainen x , että

$$f^{-1}(3) = x \text{ ja } f(x) = 3.$$

Ratkaistaan likiarvo laskimella.

$$f(x) = 3$$

$$x^5 + x + 2 = 3$$

$$x = 0,7548\dots$$

Saadaan $f^{-1}(3) \approx 0,75$.

c) Käänteisfunktion nollakohta on se muuttujan y arvo, jolla

$$f^{-1}(y) = 0 \text{ eli } f(0) = y.$$

Lasketaan nollakohta y .

$$y = f(0) = 0^5 + 0 + 2 = 2$$

Vastaus a) Koska $f'(x) > 0$ kaikilla x , funktio f on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio.

$$\text{b) } f^{-1}(0) = -1 \text{ ja } f^{-1}(3) \approx 0,75$$

$$\text{c) } 2$$

70

a) Derivoidaan funktio $f(x) = xe^{2x-1}$.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x-1} + x \cdot e^{2x-1} \cdot 2 = (2x+1)e^{2x-1}$$

Derivaatafunktiota $f'(x) = (2x+1)e^{2x-1}$ saa positiivisia arvoja, kun

$$2x+1 > 0$$

$$x > -\frac{1}{2}.$$

Koska $(2x+1)e^{2x-1} \geq 0$, kun $x \geq -\frac{1}{2}$,

niin funktio f on aidosti kasvava välillä $[-\frac{1}{2}, \infty[$.

Siten funktiolla f on käänteisfunktio välillä $I = [-\frac{1}{2}, \infty[$.

- b) Funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajat leikkaavat toisensa suoralla $y = x$. Leikkauspisteiden x -koordinaatit (ja samalla myös y -koordinaatit) saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = x$.

$$x = f(x)$$

$$x = xe^{2x-1}$$

$$x - xe^{2x-1} = 0$$

$$x(1 - e^{2x-1}) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 1 - e^{2x-1} = 0$$

$$e^{2x-1} = 1$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Kuvaajat leikkaavat toisensa pisteissä $(0, 0)$ ja $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Vastaus a) $I = [-\frac{1}{2}, \infty[$

b) $(0, 0)$ ja $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

71

Selvitetään funktion $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $x > 3$ käänteisfunktio.

Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = y$.

$$f(x) = y$$

$$\frac{x+2}{x-3} = y$$

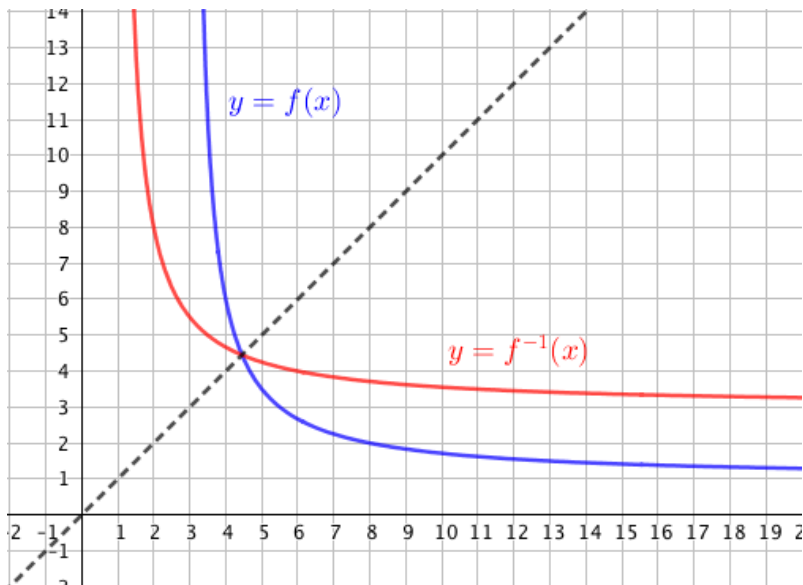
$$x = \frac{3y+2}{y-1}$$

missä $y \neq 1$.

Käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(y) = \frac{3y+2}{y-1}$.

Kun vaihdetaan muuttujaksi x , saadaan $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}$.

Päätellään määrittelyehto kuvaajan avulla.



Funktion f arvojoukko on väli $y > 1$.

Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on väli $x > 1$.

Lasketaan yhdistetyn funktion arvo, kun $x > 3$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{x+2}{x-3}\right) \\ &= \frac{3\left(\frac{x+2}{x-3}\right)+2}{\frac{x+2}{x-3}-1} \\ &= \frac{\frac{3x+6}{x-3} + \frac{2(x-3)}{x-3}}{\frac{x+2}{x-3} - \frac{1(x-3)}{x-3}} \\ &= \frac{\frac{x}{x-3}}{\frac{1}{x-3}} \\ &= \frac{x}{\cancel{x-3}} \cdot \frac{\cancel{x-3}}{1} = x \end{aligned}$$

Vastaus $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}$, määrittelyalue $x > 1$

72

Logaritmin määritelmän mukaan

$$2^x = y \Leftrightarrow x = \log_2 y.$$

Siis funktion $f(x) = 2^x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(y) = \log_2 y$.

Funktion $f(x) = 2^x$ derivaatafunktio on $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$.

Sovelletaan käänteisfunktion derivointikaavaa funktioon

$$f^{-1}(y) = \log_2 y.$$

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{f'(\log_2 y)} \\ &= \frac{1}{2^{\log_2 y} \ln 2} \\ &= \frac{1}{y \ln 2} \end{aligned}$$

missä $y > 0$.

Siis $D \log_2 y = \frac{1}{y \ln 2}$, kun $y > 0$.

Kun muuttujaksi vaihdetaan x , saadaan

$$D \log_2 x = \frac{1}{x \ln 2}, \text{ missä } x > 0.$$

Vastaus $D \log_2 x = \frac{1}{x \ln 2}, \text{ missä } x > 0.$

73

$$f: [2, 5] \rightarrow [25, 52], \quad f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x$$

Määritetään derivaattafunktio.

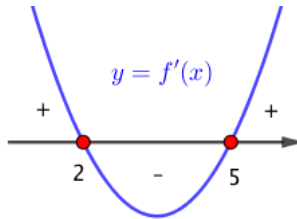
$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$6x^2 - 42x + 60 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = 5$$

Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten $f'(x) < 0$ välillä $2 < x < 5$.



Funktio f on siten aidosti vähenevä ja sen suurin arvo on $f(2) = 52$ ja pienin arvo $f(5) = 25$.

Koska funktio f on jatkuva, sen arvojoukko on $[25, 52]$.

Funktiolla f on siis käänteisfunktio $g = f^{-1} : [25, 52] \rightarrow [2, 5]$.

Käänteisfunktion arvo $g(45)$ saadaan ratkaisemalla sellainen x , että $g(45) = x$ ja $f(x) = 45$.

$$f(x) = 45$$

$$2x^3 - 21x^2 + 60x = 45$$

$$x = 3$$

Siis $g(45) = 3$.

Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'(45) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = 45.$$

Siis

$$f(3) = 45$$

$$f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 42 \cdot 3 + 60 = -12$$

ja

$$g'(45) = (f^{-1})'(45) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{-12} = -\frac{1}{12}.$$

Vastaus $g(45) = 3$ ja $g'(45) = -\frac{1}{12}$

74

a) Derivoidaan funktio $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^x + (x^2 + 1)e^x \\ &= (x^2 + 2x + 1)e^x \\ &= (x + 1)^2 e^x \end{aligned}$$

Koska

$$e^x > 0,$$

$$(x + 1)^2 = 0 \quad \text{vain kohdassa } x = -1$$

ja $(x + 1)^2 > 0$ muualla,

niin funktio f on aidosti kasvava. Siten funktiolla f on käänteisfunktio.

b) Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = 1.$$

Ratkaistaan derivointia varten muuttuja x .

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ (x^2 + 1)e^x &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= (0 + 1)^2 \cdot e^0 = 1 \end{aligned}$$

ja

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

- c) Käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva kohdassa $y = f(x)$, jossa $f'(x) = 0$.

a-kohdan perusteella $f'(x) = 0$ vain kohdassa $x = -1$.

Lasketaan kohta y.

$$y = f(-1) = \left((-1)^2 + 1\right)e^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e}.$$

Käänteisfunktio f^{-1} ei ole derivoituva kohdassa $\frac{2}{e}$.

Vastaus b) 1

 c) kohdassa $\frac{2}{e}$

75

a) $f(x) = \ln x + x + 1$, missä $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1, \text{ missä } x > 0$$

Koska $\frac{1}{x} + 1 > 0$, kun $x > 0$, niin funktio f on aidosti kasvava. Siten funktiolla f on käänteisfunktio $g = f^{-1}$.

b) Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = 2.$$

Ratkaistaan derivointia varten muuttuja x .

$$f(x) = 2$$

$$\ln x + x + 1 = 2$$

$$x = 1$$

Siis

$$f(1) = 2$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} + 1 = 2$$

ja

$$g'(2) = (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

- c) Funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajat leikkaavat toisensa suoralla $y = x$. Leikkauspisteiden x -koordinaatit (ja samalla myös y -koordinaatit) saadaan ratkaisemalla yhtälö $x = f(x)$.

$$x = f(x)$$

$$x = \ln x + x + 1$$

$$\ln x = -1$$

$$x = e^{-1}$$

Kuvaajat leikkaavat toisensa pisteessä (e^{-1}, e^{-1}) .

- d) Kuvaajien välinen kulma on leikkauspisteeseen (e^{-1}, e^{-1}) piirrettyjen tangenttien välinen kulma.

Funktion f kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on

$$f'(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} + 1 = e + 1.$$

Käänteisfunktion g kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on

$$g'(e^{-1}) = (f^{-1})'(e^{-1}) = \frac{1}{f'(e^{-1})} = \frac{1}{e + 1}.$$

Lasketaan tangenttien välinen kulma.

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{e + 1 - \frac{1}{e + 1}}{1 + (e + 1) \frac{1}{e + 1}} \right|$$

$$\tan \alpha = 1,72467\dots$$

$$\alpha = 59,89\dots^\circ \approx 59,9^\circ$$

Vastaus a) $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ kaikilla $x > 0$,
joten f on aidosti kasvava ja sillä on käänteisfunktio.

b) $g'(2) = \frac{1}{2}$

c) (e^{-1}, e^{-1})

d) $59,9^\circ$

76

a) Katso c-kohdan kuvaajat.

b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$f'(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$$

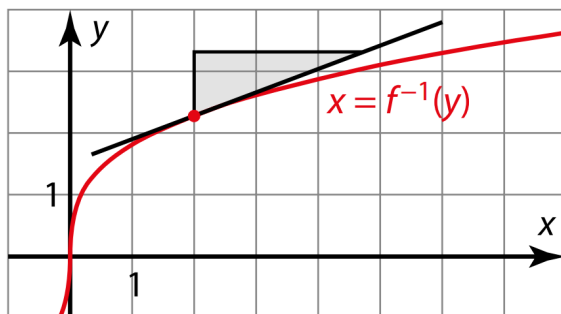
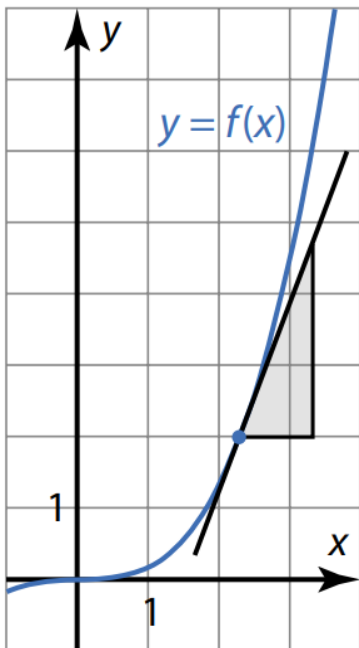
Käänteisfunktion derivointikaavaan mukaan

$$(f^{-1})'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2}.$$

c) $f'(x)$ on xy -koordinaatistossa funktion f kuvaajalle kohtaan x piirretyn tangentin kulmakerroin.

$(f^{-1})'(y)$ on yx -koordinaatistossa funktion f^{-1} kuvaajalle kohtaan $y = f(x)$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Nämä kulmakertoimet ovat toistensa käänteislukuja.

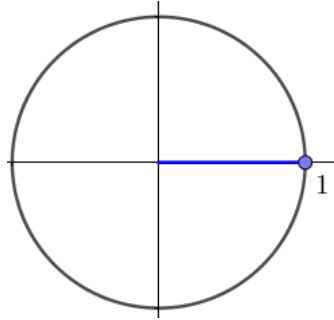


Vastaus b) $f'(2) = 2$ ja $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2}$

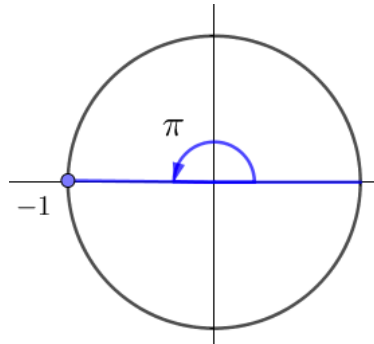
77

Funktion $f(x) = \cos x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arccos x$.

- a) Koska $\cos 0 = 1$,
niin $\arccos 1 = 0$.

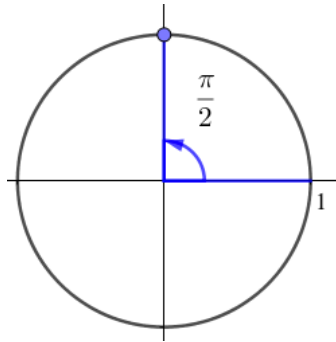


- b) Koska $\cos \pi = -1$,
niin $\arccos(-1) = \pi$.



c) Koska $\cos \frac{\pi}{2} = 0$,

niin $\arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$.



Vastaus a) 0 b) π c) $\frac{\pi}{2}$

78

- a) Funktion $f(x) = \cos x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arccos x$.

Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = 0.$$

Ratkaistaan derivointia varten muuttuja x .

$$f(x) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Nyt

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

ja

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

b) Funktion $f(x) = \cos x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arccos x$.

Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ratkaistaan derivointia varten muuttuja x .

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

Nyt

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

ja

$$(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$$

c) Funktion $f(x) = \cos x$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \arccos x$.

Käänteisfunktion derivointikaavan mukaan

$$(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ missä } f(x) = -\frac{1}{2}.$$

Ratkaistaan derivointia varten muuttuja x .

$$f(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}$$

Nyt

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ja

$$(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Vastaus a) -1 b) -2 c) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$