YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

Matematiikka, lyhyt oppimäärä kevät 2021

Alustavat hyvän vastauksen piirteet 23.3.2021

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Tehtäväkohtaiset ohjeet

A-osa

1.

5	2
2	2
$x = 1$	2
84 euroa	2
Vain ratkaisu 1 on oikein.	2
19% TAI 21% (Oikeansuuntainen ratkaisu)	2 1

2.

Maalin leveydestä puolet on $\frac{7{,}32}{2} = 3{,}66$. Maalin puolikasta vastaavan kulman tangentti on $\tan\alpha = \frac{3{,}66}{11{,}0}$, joten puolikas kulma on $\approx 18{,}40$ astetta, joten kysytty kulma on noin 37 astetta.	3 3 3 3

3.

$t = \frac{v - v_0}{a}$	2
$M = \frac{m}{n}$	2
$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ tai $v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$	2
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$,	2
$r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}} \approx 0{,}78$	2
$t = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1{,}02} \approx 35$	2

4.

Suoraa ei ole piirretty kuvaan. Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen B kautta. Suoraa ei ole piirretty kuvaan. Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen B kautta. Suoraa ei ole piirretty kuvaan. Suora näkyy kuvassa ja kulkee pisteen A kautta.	2 2 2 2 2 2

B1-osa

5.

Annetuista tiedoista saadaan yhtälöt $x + y = 4802$ ja $35x + 25y = 136900$. Koska $x = 4802 - y$, niin $35(4802 - y) + 25y = 136900$, eli $-10y = 136900 - 35 \cdot 4802$, joten $y = 3117$ ja $x = 1685$.	6 2 (2) 2

6.

$\frac{95}{130} \approx 0{,}73077$, joten raja on $1 - 0{,}73077 = 0{,}26923$ $\approx 26{,}9$ % pienempi (tarkkuus vaadittu)	2 1 1
Vuoden 2030 raja on $(1 - 0{,}375) \cdot 95$ g/km ($= 59{,}375$). Vuoden 2025 raja on $(1 - 0{,}15) \cdot 95$ g/km ($= 80{,}75$). Vuoden 2030 raja on siis $1 - \frac{59{,}375}{80{,}75} \approx 0{,}26471 = 26{,}5\%$ pienempi kuin vuoden 2025 raja.	2 1 1
Pylväsdiagrammi. Pylväsdiagrammi omilla luvuilla. Luvut ovat oikein.	(1) 2 1

7.

Todennäköisin on 1 oikein ja epätodennäköisin 4 oikein.	1+1
Hän voittaa $32 \cdot 3 = 96$ euroa.	2
Todennäköisyys saada 4 oikein on $\frac{4845}{916895}$. Todennäköisyys saada 0 oikein on $\frac{230300}{916895}$. Todennäköisyys saada toisella rivillä neljä oikein ja toisella kaikki väärin on siis $2 \cdot \frac{4845}{916895} \cdot \frac{230300}{916895} \approx 0{,}002654\ldots \approx 0{,}3$ %.	1 1 2
Erilaisia neljän numeron valintoja voidaan 20 numerosta tehdä $\binom{20}{4} = 4845$ eri tavalla.	 4

8.

Olkoon saadun laatikon korkeus x, jolloin pohjan leveys on $1 - 2x$. Tilavuus on siis $V(x) = x(1 - 2x)^2$. Maksimoidaan tilavuus derivoimalla. Saadaan $V'(x) = -2 \cdot 2(1-2x)x + (1-2x)^2$. Selvitetään derivaatan nollakohdat: $V'(x) = (1-2x)(1-6x)$, eli $x = \frac{1}{2}$ tai $x = \frac{1}{6}$. Nollakohta $x = \frac{1}{2}$ antaa tilavuuden 0, samoin määrittelyvälin päätepiste $x = 0$ antaa tilavuuden 0, joten suurin tilavuus on kohdassa $x = \frac{1}{6}$ eli 0,17 (m).	2 2 2 2 2 1 1

9.

Vaihteluväli $[34, 998]$ TAI sen pituus 964.	2
648 (käsky `mode`) ja 462 (käsky `median`)	2+1
493,02 (käsky `average`) ja $\approx 279{,}57$ (käsky `stdeva`)	1+2
Lukujen jakautumista on havainnollistettu esimerkiksi histogrammilla. Luvut eivät vaikuta normaalijakautuneelta, koska arvot eivät ole keskittyneet keskelle ja häviä reunoilta.	2 2

B2-osa

10.

Koiran ikä on $37\lg(2)+31 \approx 42$ vuotta.	3
Koiran ikä t toteuttaa yhtälön $37\lg(t)+31 \approx 25$, joten $t \approx 0{,}688$ vuotta, joka on noin 8 kuukautta.	2 1
Malli ei toimi kovin hyvin vanhoilla koirilla, koska koirat eivät elä esimerkiksi 70 vuotiaiksi, joka vastaa ihmiselle täysin mahdollista 99 vuoden ikää. Ihan pikkuruisilla koirilla malli ei myöskään toimi hyvin, koska esimerkiksi kuukauden ikäisen koiran ihmisikä olisi noin -9 vuotta. Malli on siis huono, kun on kyse nuorista koirista tai vanhoista ihmisistä.	2 2 2

11.

Hyllyn 1 kirjojen paksuus on keskimäärin $\frac{65}{25} = 2{,}60$ cm. Hyllyllä 2 keskipaksuus on $\frac{76}{28} \approx 2{,}71$ cm, ja hyllyllä 3 se on $\frac{30}{14} \approx 2{,}14$ cm. Hyllyllä 2 on siis paksuimmat kirjat.	1 1 1
Ensimmäisen menetelmän mukaan dosentti laskee $\frac{3807}{\frac{2{,}60+2{,}71+2{,}14}{3}} \approx 1530$ kirjaa. Toisen menetelmän mukaan: Näillä kolmella hyllyllä on yhteensä $25+28+14=67$ kirjaa, ja hyllyjen kokonaisleveys on yhteensä $65+76+30=171$ cm. Keskimäärin kirjan paksuus on siis $\frac{171}{67} \approx 2{,}55$ cm, joten kirjoja on suurinpiirtein $\frac{3807}{2{,}55} \approx 1490$.	2 1 1 1 2
Jälkimmäinen tapa on parempi, sillä ensimmäinen menetelmä vääristelisi tilannetta esimerkiksi tapauksessa, jossa kahdella hyllyllä olisi kummallakin yksi todella paksu kirja ja kolmannella hyllyllä monta hyvin ohutta. Tällöin ensimmäinen tapa antaisi keskiarvoksi hyvin paksun kirjan, vaikka todellisuudessa keskiarvon pitäisi olla melko ohut.	2

12.

47 m^2 asunnon neliöhinta on $\frac{89000}{47} \approx 1893{,}62$ euroa neliöltä. 42 m^2 asunnon neliöhinta on $\frac{96000}{42} \approx 2285{,}71$ euroa neliöltä.	1 1
47 m^2 asunnon ostoa varten pitää ottaa lainaa $89000-19000=70000$, kuukausikorko on $\frac{2{,}4}{12} = 0{,}2$ % ja lyhennysten lukumäärä on $12 \cdot 10 = 120$. Annuiteetin (kuukausimaksun) määrä tässä lainassa on $\frac{(1{,}002)^{120} \cdot 0{,}002}{(1{,}002)^{120}-1} \cdot 70000 \approx 656{,}72$. Yhteensä lainan takaisinmaksuun käytetään siis $656{,}72 \cdot 120 = 78806{,}40$ euroa, josta korkojen osuus on 8806,40 euroa. Asunnon kokonaiskustannukset ovat $8806{,}40 + 120 \cdot 220 = 35206{,}40$. 42 m^2 asunnon ostoa varten pitää ottaa lainaa $96000-19000=77000$. Kuukausikorko ja lyhennysten lukumäärä on sama kuin aiemmin. Annuiteetiksi saadaan samalla kaavalla 722,38 euroa. Kokonaiskustannukset ovat puolestaan $9685{,}60 + 120 \cdot 147 = 27325{,}60$ euroa.	1 1 1 1 1 1 1
Kun arvioidaan tarkemmin kokonaisedullisuutta, voisi huomioida muun muassa rahan arvon muutoksen inflaation seurauksena, asunnon jälleenmyyntiarvon kehityksen sekä vastikkeen ja korkotason muutokset.	3

13.	KUVA	2
	Funktion $p(x)$ kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä (0,3), sillä $p(0) = \|0 - 3\| = 3$.	2
	Funktion $f(x)$ derivaatalla on nollakohta arvolla $x \approx 0{,}4$, sillä $f'(x) = 28x^3 - 24x^2 - 14x + 8$, jonka nollakohdat ovat $x \approx -0{,}64$, $x \approx 0{,}42$ ja $x \approx 1{,}08$.	2
	Funktio $h(x)$ saa ainoastaan lukua 1 suurempia arvoja, kun $x > 1$, koska tällöin $h(x) = \sqrt{4x+2} - 1 > \sqrt{4+2} - 1 = \sqrt{6} - 1 > 1$.	3
	Funktion $f(x)$ kuvaaja leikkaa x-akselin neljä kertaa, sillä $f(1) = f(0) = -1 < 0$, mutta $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}6875$, joten välillä [0,1] on kaksi nollakohtaa. Lisäksi $f(-2) = 131 > 0$, joten välillä $[-2{,}0]$ on myös nollakohta. Lisäksi $f(2) = 35$, joten myös välillä [1,2] on nollakohta.	3