

Petri Luoma

<https://peda.net/p/pluoma/opetus/matematiikka/mab-vanha-ops/mtjt2232a2>

Arvoskulu: koe + bonus (viikkoon välikokeita, ilmoita rüm. sivulla laskujen lkm.)

50 teht. = 1 p.

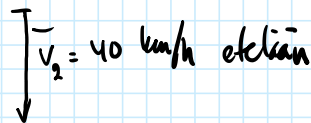
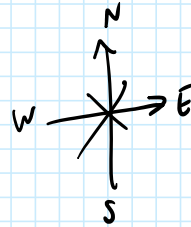
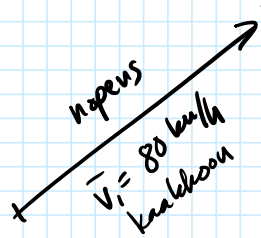
80 = 2 p.

110 = 3 p.

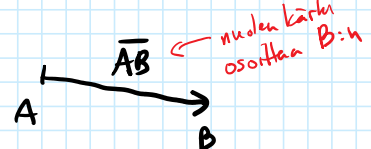
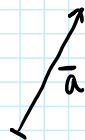
140 = 4 p. ← arvosanaksi 5.

Vektori

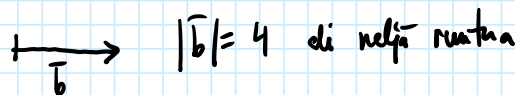
Tutun FYP1-kurssilta:



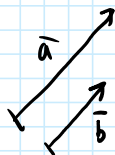
- vektori = suure, jolle ilmoitetaan suuruus ja suunta
- kuvataan muuttamalla: pituus = suuruus, suunta = muuttajan suunta
- nimeäminen: 1. pienin kirjain, viiva päälle 2. Alku- ja loppupisteen mukaan, viiva päälle



- vektorin pituus = suuruus = $|\vec{a}|$

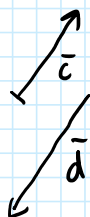


- Samansuuntaiset vektorit:



$$\vec{a} \parallel \vec{b}$$

- vastakkäissuunt. vektorit:



$$\vec{c} \nparallel \vec{d}$$

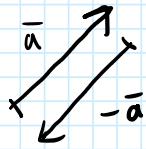
- yhdensuuntaiset vektorit = joko saman- tai vastakkäissuuntaiset: $\vec{a} \parallel \vec{b}$

- eri suuntaiset = ei yhdensuuntaiset vektorit $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

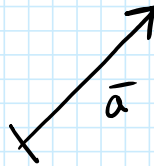
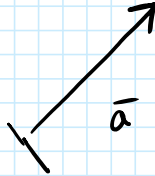
- nollavektori = mitään on nolla... $\vec{0}$

olla vektori. Pää on nolla, kuvana piste, merkitään $\vec{0}$

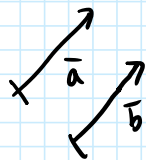
- vastavektori = vaihdetaan kärke toiseen päähän, merkitään $-\vec{a}$



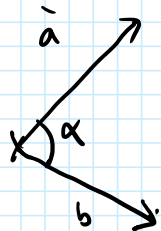
- vektorin paikkaa voi muuttaa kunhan sen suuruus ja suunta säilyy



- vektorit samoja jos niillä on sama suuruus ja suunta, merk. $\vec{a} = \vec{b}$

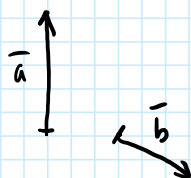


- vektorien välinen kulma: suora ne alkamaan samasta pisteestä, kulma on se pienempi,

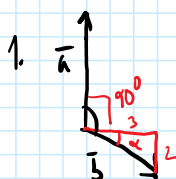


merkitään $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Esim.



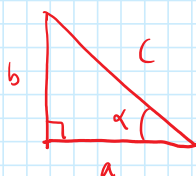
Laske $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ + \alpha = 123,7^\circ$



$\tan \alpha = \frac{2}{3}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33,7^\circ$

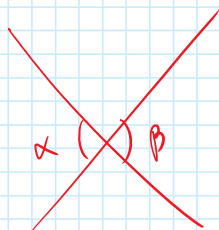
MAB2-
kertaus



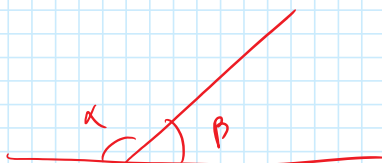
$\sin \alpha = \frac{b}{c}$, $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)$

$\cos \alpha = \frac{a}{c}$, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$

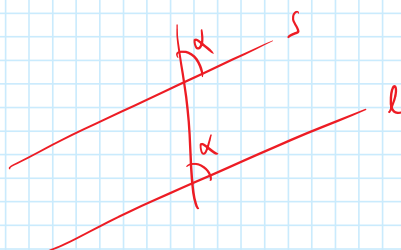
$\tan \alpha = \frac{b}{a}$, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$



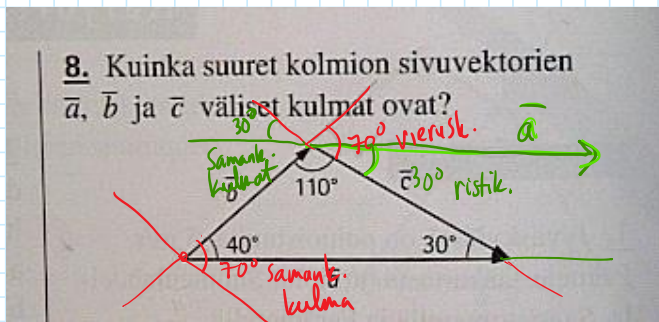
ristikulmat : $\alpha = \beta$



vieruskulmat : $\alpha + \beta = 180^\circ$



s ja l yhdensuuntaiset;
samankohittaiset kulmat yhtä suuria

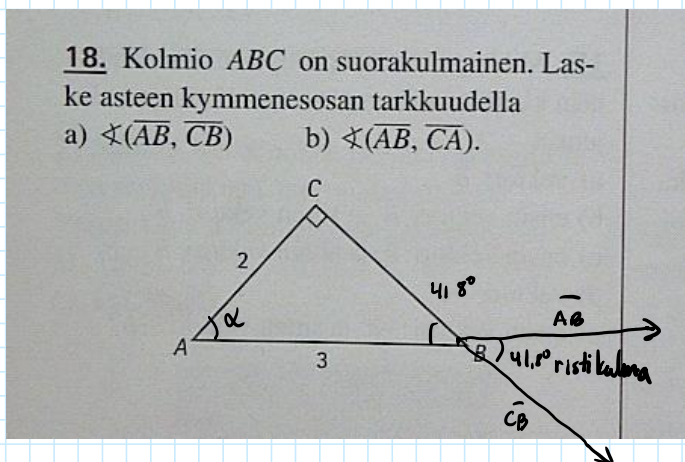


Otettu näyttöleike: 21.9.2017 13.12

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 40^\circ$$

$$\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 70^\circ$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 30^\circ$$

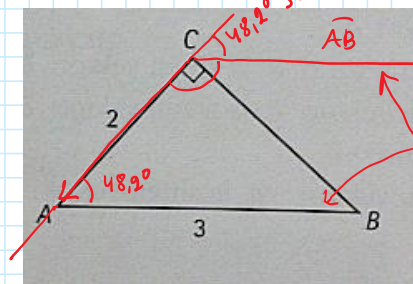


$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48,2^\circ$$

$$\angle(\vec{AB}, \vec{CB}) = 41,8^\circ$$

a)

b)



$$\angle(\vec{AB}, \vec{CA}) = 180^\circ - 48,2^\circ = 131,8^\circ$$

yhdensuuntaiset suorat

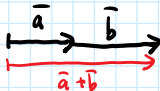
Vektoreiden summa

perjantai 22. syyskuuta 2017 8.27

- vektoreiden summaan vaikuttaa yhteenlaskettavien suuruus ja suunta

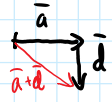
Esim.

a) $\vec{a} \rightarrow \vec{b}$

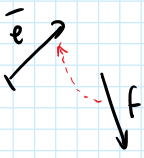
$|\vec{a} + \vec{b}| = 7$ 

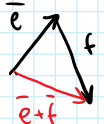
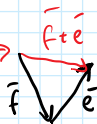
b) $\vec{a} \rightarrow \vec{c}$
 $|\vec{a} + \vec{c}| = 2$ 

$\sqrt{a^2 + b^2} = c$

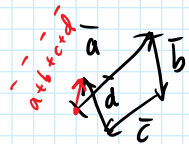
c) $\vec{a} \rightarrow \vec{d}$ 

$|\vec{a} + \vec{d}| = \text{hypoteenuusa} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

d) 

 $\vec{e} + \vec{f} = \vec{f} + \vec{e}$ 

- vektoreiden summa: siirä vektorit peräkkäin $\rightarrow$ summa vektori on 1. vektorin alusta 2. vektorin loppuun

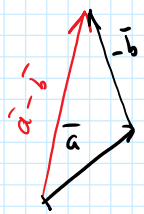
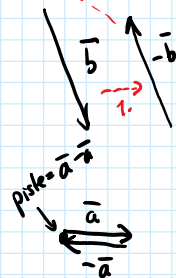


- erotus = summa

$2 - 3 = 2 + (-3)$

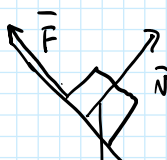
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

$\vec{b}$:n vastavektori

- $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

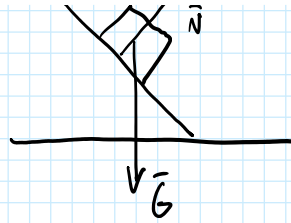
Fysiikassa





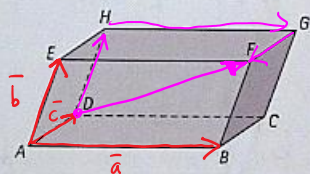
vektorisumma $= \vec{0}$

Fysikkassa

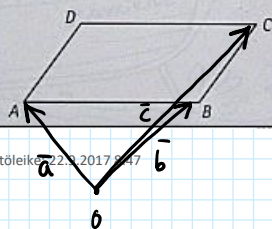


vektorisumma = $\vec{0}$

36. Kuvion suuntaissärmiössä merkitään $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AE}$ ja $\vec{c} = \vec{AD}$. Ilmaise vektorien $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ avulla
a) $\vec{DF}$ b) $\vec{HB}$ c) $\vec{CE}$.



37. Nelikulmio ABCD on suunnikas. Nimetään $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ ja $\vec{OC} = \vec{c}$. Ilmaise $\vec{a}$:n, $\vec{b}$:n ja $\vec{c}$:n avulla
a) $\vec{AB}$ b) $\vec{CD}$ c) $\vec{OD}$ d) $\vec{BD}$.



Otettu näyttöleike 22.3.2017 8:47

36. a) $\vec{DF}$ kaikki reitit pitkin särmiötä ($= \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$)
kelpaa:

$$\vec{DF} = \vec{DH} + \vec{HG} + \vec{GF} = \vec{b} + \vec{a} - \vec{c}$$

↑
laita miinus
kun kuljet
vektoria väärään
suuntaan

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{HB} &= \vec{HE} + \vec{EA} + \vec{AB} \\ &= -\vec{c} - \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \vec{CE} = \vec{CB} + \vec{BA} + \vec{AE} = -\vec{c} - \vec{a} + \vec{b}$$

37.

$$\text{a) } \vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\text{b) } \vec{CD} = \vec{BA} \text{ koska kuvio suunnikas}$$

$$\vec{BA} = -\vec{AB} = -(-\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\text{c) } \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{BC} =$$

$$\vec{a} + (\vec{BO} + \vec{OC}) =$$

$$\vec{a} + (-\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \vec{BD} &= \vec{BA} + \vec{AD} = (\vec{a} - \vec{b}) + (-\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{a} - \vec{b} - \vec{b} + \vec{c} \\ &= \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

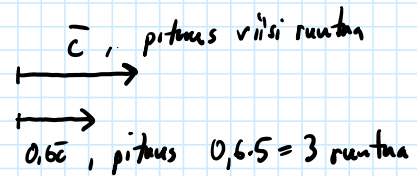
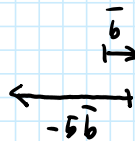
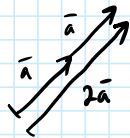
Vektorin kertominen luvulla

- vektoreille on määritetty kolme kertolaskua, tässä käsitellään yksi: vektorin kertominen luvulla

Esim. $2\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$

$$-5\vec{b} = -\vec{b} - \vec{b} - \vec{b} - \vec{b} - \vec{b}$$

$$0,6\vec{c}$$



- $t \cdot \vec{a}$ on $\begin{cases} \vec{a}:n \text{ suuntainen jos } t > 0 \\ \text{vastakkäsuuntainen } \vec{a}:n \text{ kanssa jos } t < 0 \end{cases}$

- $|t \cdot \vec{a}| = \text{vektorin pituus} = |t| \cdot |\vec{a}|$

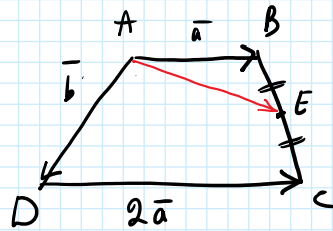
- jos $t=0$: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
 $t=-1$: $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

- vektoriden sieventäminen kuten polynomeilla

$$2(\vec{a} + \vec{b}) - 3(-\vec{a} + \vec{b}) = \underline{2\vec{a}} + \underline{2\vec{b}} + \underline{3\vec{a}} - \underline{3\vec{b}} = 5\vec{a} - \vec{b}$$

51. Puolisuunnikkaan $ABCD$ sivu CD on kaksi kertaa niin pitkä kuin yhdensuuntainen sivu AB . Ilmaise vektorien $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ avulla

- lävistäjävektori $\overrightarrow{AC}$
- sivuvektori $\overrightarrow{BC}$
- vektori $\overrightarrow{AE}$, missä E on sivun BC keskipiste.



S. 38 : 42 →

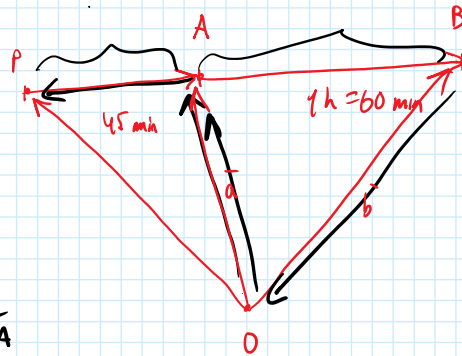
Otettu näyttöleike: 28.9.2017 12.49

$$a) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + 2\vec{a}$$

$$b) \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \\ = -\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$c) \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \\ = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ = 1,5\vec{a} + 0,5\vec{b}$$

63. Raketti, joka kulkee suuntaansa muuttamatta, kulki tunnissa avaruuden pisteestä A pisteeseen B . 45 minuuttia ennen saapumistaan pisteeseen A se oli ollut pisteessä P . Ilmaise Maan pisteestä O pisteeseen P kulkeva vektorien $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ avulla.

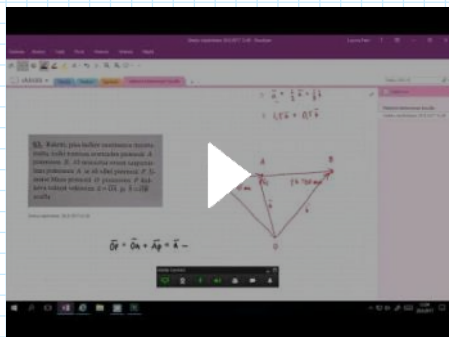


Otettu näyttöleike: 28.9.2017 12.58

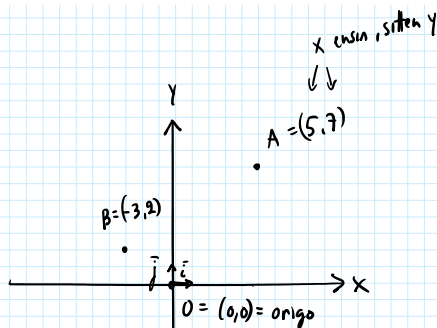
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{45}{60}\overrightarrow{BA}$$

$$= \vec{a} + \frac{45}{60}(-\vec{b} + \vec{a}) = \frac{60}{1} - \frac{45}{60}\vec{b} + \frac{45}{60}\vec{a} = \frac{105}{60}\vec{a} - \frac{45}{60}\vec{b}$$

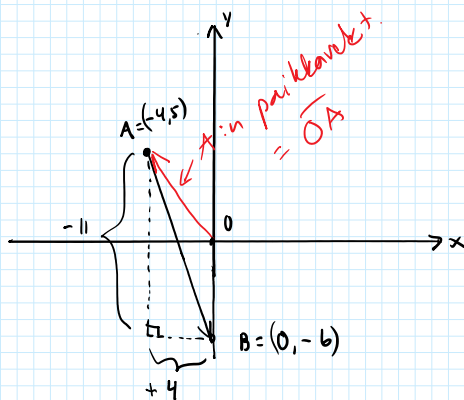
<https://youtu.be/hRTDZKmHOaY>



- xy-koordinaatisto:
akselien nuolet + otsikat



- määritelmä: yksi runta oikealle = vektori $\vec{i}$
 yksi ylös = vektori $\vec{j}$, näiden avulla voit laskea vektorin A:sta B:in:



$$\vec{AB} = -11\vec{j} + 4\vec{i} = 4\vec{i} - 11\vec{j} \quad \text{pituus } |\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + (-11)^2}$$

$$\vec{BA} = -4\vec{i} + 11\vec{j}$$

$$\vec{OA} = -4\vec{i} + 5\vec{j} = \text{paikkavektori} = \text{vektori origosta tiettyyn pisteeseen}$$

- Jos $A = (x_1, y_1) \leftrightarrow$ paikkavektori $\vec{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$

- vektorin pituus apukolmiosta Pythagoralla: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$

↑
alaindeksi = lukuarvo tunnetaan

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

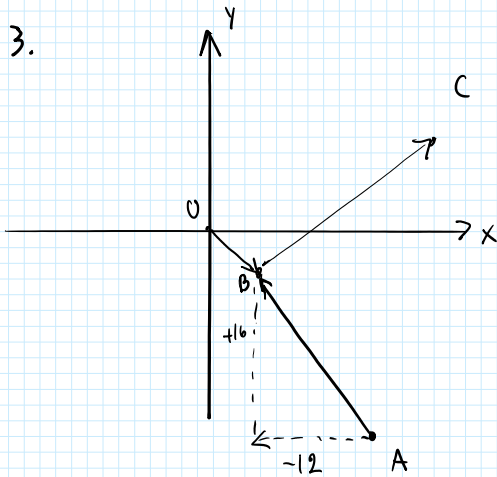
↑
loppupisteen koord. - alkupisteen koord. ?

Esim. $A = (1, 7)$, $B = (-14, 35)$

a) $\vec{AB} = (-14 - 1)\vec{i} + (35 - 7)\vec{j} = -15\vec{i} + 28\vec{j}$

b) $|\vec{AB}| = \sqrt{(-15)^2 + 28^2} = \sqrt{1009} \approx 31,8 \text{ (runnua)}$

73.



$$\begin{aligned}
 \vec{OC} &= \vec{OB} + \vec{BC} = \\
 &= \underline{5\vec{i}} - \underline{3\vec{j}} + \underline{21\vec{i}} + \underline{14\vec{j}} \\
 &= 26\vec{i} + 11\vec{j} \\
 C &= (26, 11)
 \end{aligned}$$

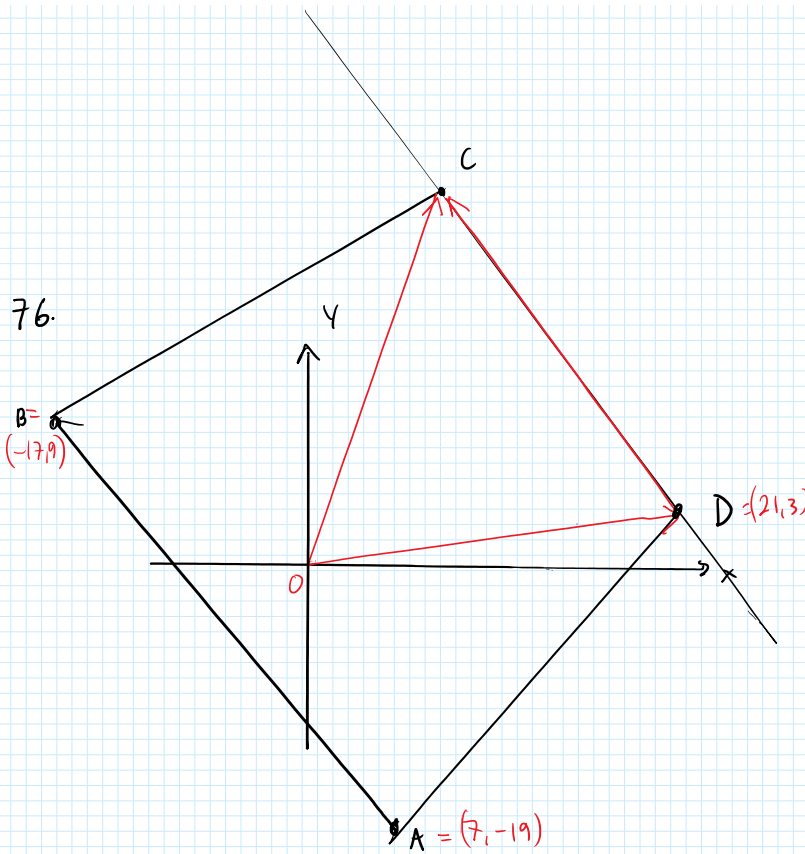
$$\begin{aligned}
 A &= (17, -19) \\
 \vec{AB} &= -12\vec{i} + 16\vec{j}
 \end{aligned}$$

$$\vec{CB} = -21\vec{i} - 14\vec{j} \Rightarrow \vec{BC} = -(-21\vec{i} - 14\vec{j}) = \underline{\underline{21\vec{i} + 14\vec{j}}}$$

Pisteen B koordinaatit
paikkavektorin avulla:

$$\begin{aligned}
 \vec{OB} &= \vec{OA} + \vec{AB} \\
 \vec{OB} &= 17\vec{i} - 19\vec{j} + (-12\vec{i} + 16\vec{j}) \\
 &= \underline{17\vec{i}} - \underline{19\vec{j}} - \underline{12\vec{i}} + \underline{16\vec{j}} \\
 &= 5\vec{i} - 3\vec{j} \\
 &\quad \downarrow \\
 B &= (5, -3)
 \end{aligned}$$

76.



$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$$

$$|\overrightarrow{DC}| = \frac{3}{4} |\overrightarrow{AB}|$$

C:n paikka vektori

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{OC} = \underbrace{21\vec{i} + 3\vec{j}}_{\overrightarrow{OD}} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OC} = 21\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4} ((-17-7)\vec{i} + (9-(-19))\vec{j})$$

$$\overrightarrow{OC} = 21\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4} (-24\vec{i} + 28\vec{j})$$

$$= \underline{21\vec{i}} + \underline{3\vec{j}} - \underline{18\vec{i}} + \underline{21\vec{j}}$$

$$= 3\vec{i} + 24\vec{j}$$

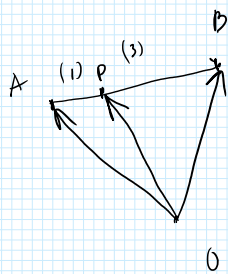
$$\downarrow$$

$$C = (3, 24)$$

S. 51: 65 →

72, 74

74. b)



$$A = (-4,7; -3,4)$$

$$B = (2,5; 8,2)$$

$$\vec{OA} = -4,7\vec{i} - 3,4\vec{j}$$

$$\vec{OB} = 2,5\vec{i} + 8,2\vec{j}$$

$$\vec{AB} = (2,5 - (-4,7))\vec{i} + (8,2 - (-3,4))\vec{j}$$

$$= 7,2\vec{i} + 11,6\vec{j}$$

↙ a-kohdassa kerron $\frac{1}{2}$

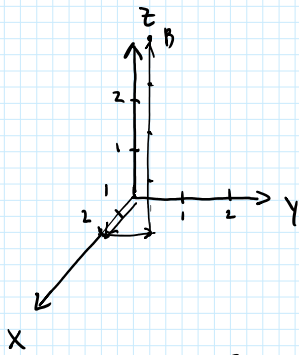
$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{AB} = -4,7\vec{i} - 3,4\vec{j} + \frac{1}{4}(7,2\vec{i} + 11,6\vec{j})$$

↑
 $\vec{i} \quad \frac{1}{3}$

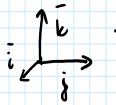
$$= -4,7\vec{i} - 3,4\vec{j} + 1,8\vec{i} + 2,9\vec{j} = -2,9\vec{i} - 0,5\vec{j}$$

↓
 $p = (-2,9; -0,5)$

- pürros ei ole niin hyödyllinen kuin XY-koord. koska et voi mitata matkoja tai kulmia



$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{xyz}$$



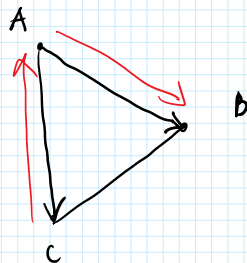
- uusi z-akselin suuntainen yksikkövektori $\vec{k}$
- kaavat samoja kuin XY-laskuissa, yksi termi lisää

$$A = (x_1, y_1, z_1) \rightarrow \text{paikavektori } \vec{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$B = (x_2, y_2, z_2) \rightarrow \vec{AB} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

106.



$$\vec{AB} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$\vec{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$\vec{CB}$ (tai $\vec{BC}$) puuttuu.

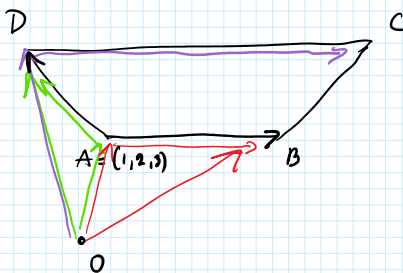
$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -\vec{AC} + \vec{AB}$$

$$= -(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) + (-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$$

$$= -3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$|\vec{CB}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

109.



$$|\vec{CD}| = 3|\vec{AB}|, \quad \vec{CD} \parallel \vec{AB}, \quad \vec{AB} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = (1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) + (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$$

$$= 0\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \rightarrow B = (0, 3, 2)$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) + (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$$

$$D = (3, 1, 4)$$

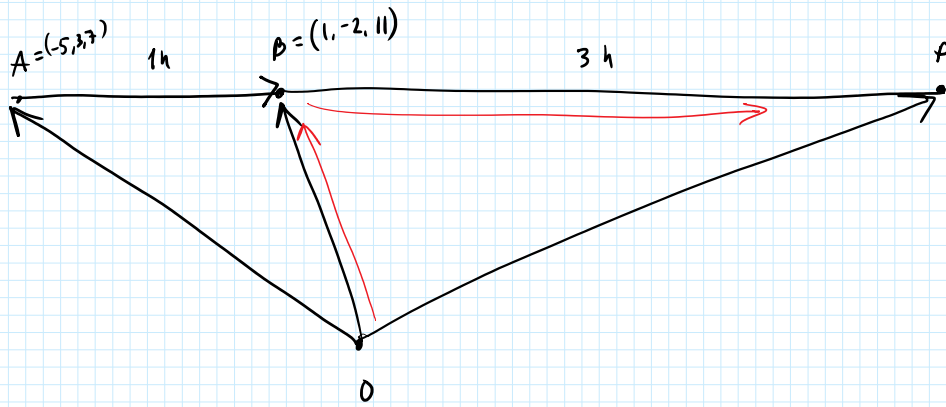
$$\vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC} = \vec{OD} + 3\vec{AB} = (3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) + 3(0\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})$$

$$= 3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} + 9\vec{j} + 6\vec{k} = 3\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$= 4\vec{j} + \vec{k} \rightarrow C = (0, 4, 1)$$

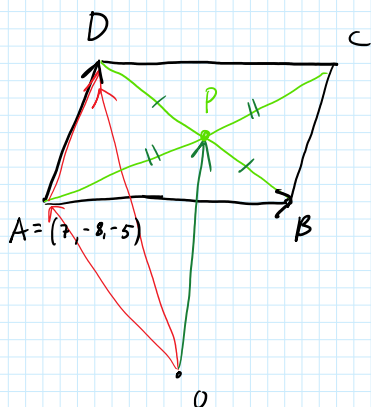
s. 62: 92, 94, 96, 97, 98, 100

100.



$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OB} + \vec{BP} = \vec{OB} + 3 \cdot \vec{AB} = \vec{i} - 2\vec{j} + 11\vec{k} + 3(6\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}) \\ &= 19\vec{i} - 17\vec{j} + 23\vec{k} \rightarrow P = (19, -17, 23)\end{aligned}$$

101.



$$\vec{OA} = 7\vec{i} - 8\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{AB} = 6\vec{i} - 7\vec{j} + 12\vec{k}$$

$$\vec{AD} = 3\vec{j} + 18\vec{k}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = 7\vec{i} - 5\vec{j} + 13\vec{k}$$

$$D = (7, -5, 13)$$

Suunnikkaan lävistäjäät puolittavat toisensa:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OA} + \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AD})$$

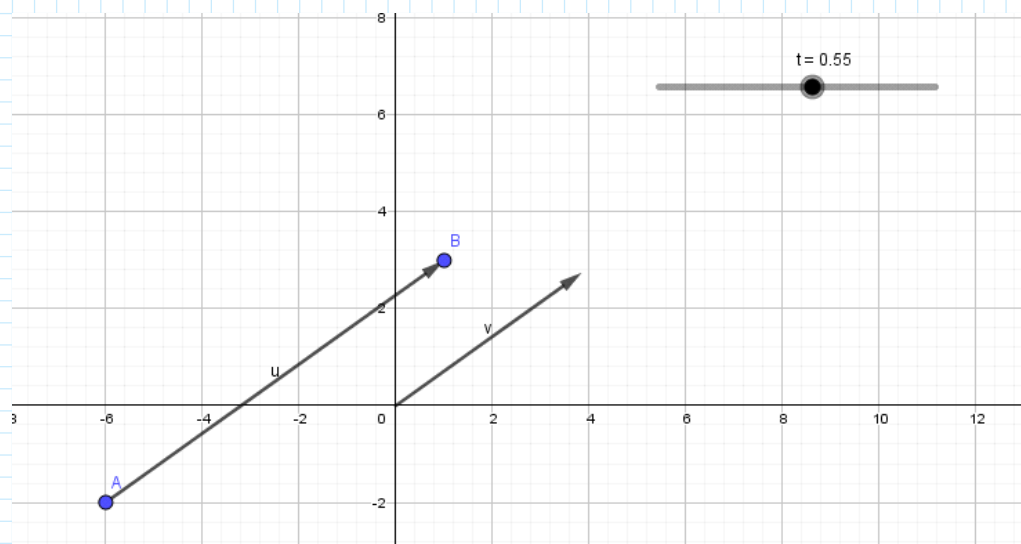
$$= 7\vec{i} - 8\vec{j} - 5\vec{k} + \frac{1}{2} (6\vec{i} - 7\vec{j} + 12\vec{k} + \overset{\text{"AD"}}{3\vec{j} + 18\vec{k}}) = 10\vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$6\vec{i} - 4\vec{j} + 30\vec{k}$$

$$P = (10, -10, 10)$$

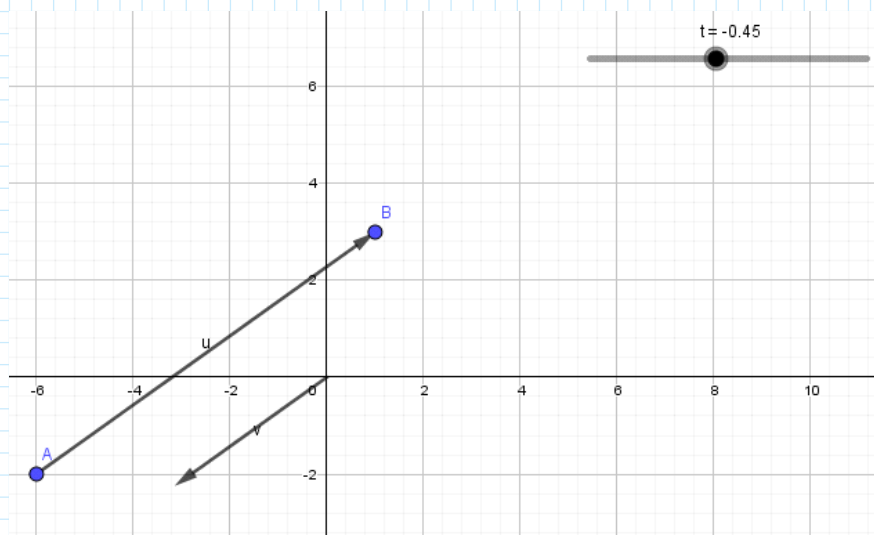
Vektoreiden yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus

- vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ^($\vec{a} \uparrow \vec{b}$) samaansuuntaiset jos $\vec{a}$:n $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ kertoimet saadaan $\vec{b}$:n kertoimista posit. vakiolla kertomalla



Otettu näyttöleike: 6.10.2017 8.35

- vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ^($\vec{a} \downarrow \vec{b}$) vastakk. suuntaiset jos $\vec{a}$:n $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ kertoimet saadaan $\vec{b}$:n kertoimista negat. vakiolla kertomalla



Otettu näyttöleike: 6.10.2017 8.36

$\Rightarrow$ vektorit $\vec{a} \parallel \vec{b}$ jos on olemassa luvun λ jolla $\vec{a}$:n $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:n kertoimet saadaan $\vec{b}$:n kertoimista

Esim. a) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $1 \quad -2 \quad \frac{1}{3}$

Ovatko $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ yhdensuuntaisia?

$1 \neq 1 \quad -2 \neq -1 \quad \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}$

Esim. a) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$
 $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$

Ovatko $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ yhdensuuntaisia?

Ovat koska kaikissa sama kerroin 3.

Positiiv. kerroin $\rightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}$

b) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$
 $\vec{c} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

Eivät ole yhdensuuntaisia koska eri kertoimet.

123. $\vec{u} = a\vec{i} - \vec{j}$
 $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

Oltava sama kerroin : $-3a = 2 \quad || : (-3)$

$$a = -\frac{2}{3}$$

Kerroin = -3 $\rightarrow \vec{u} \uparrow \downarrow \vec{v}$

Vektorien pistetulo

- vektorien kertolasku: piste- ja ristitulo, MAB8:ssä käsitellään vain pistetulo
- pistetulo tuottaa vastaukseksi luvun (= skalaarin.. pistetulo = skalaaritulo).
- merkitään pisteellä, joka on laitettava näkyviin

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Esim. $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 0 - 2 + 15 = 13$$

$$\vec{b} = \vec{j} + 5\vec{k}$$

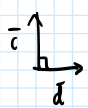
$\vec{a}$ ja $\vec{b}$ eivät kohtisuorassa.



- Jos $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kohtisuorassa $\Leftrightarrow$ pistetulo = 0.

Esim. $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

Ouko $\vec{c} \perp \vec{d}$?



$$\vec{d} = -8\vec{i} + \vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2} \cdot (-8) + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot \frac{3}{2} = -4 - 2 + 6 = 0$$

Vast: On ke kohtisuorassa.

129. $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + s\vec{k}$
 $\vec{v} = -\vec{i} - 2s\vec{j} - 6\vec{k}$

Ovat kohtisuorassa $\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2s) + s \cdot (-6) = 0$
 $-3 + 2s - 6s = 0 \quad || +3$
 $-4s = 3 \quad || : (-4)$
 $s = -\frac{3}{4}$

Vast: kun $s = -\frac{3}{4}$

S. 73: 113, 115, yhden suunt.
118, 119, 121 pistetulo

MAOL:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

135. Millä s :n arvoilla vektorit $\vec{a} = s\vec{i} - 2\vec{j} + s\vec{k}$ ja $\vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j} - s\vec{k}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa?

Otettu näyttöleike: 6.10.2017 9.15

$\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ovat kohtisuorassa $\rightarrow$ pistetulo $= 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7s - 6 - s^2 = 0$$

$$b=7 \quad c=-6 \quad a=-1$$

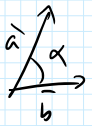
$$s = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-2} = \frac{-7 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \frac{-12}{-2} = 6 \\ \frac{-2}{-2} = 1 \end{cases}$$

Vast: $s=1$ tai $s=6$

Vektoreiden välinen kulma

vektoreiden $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$
 $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$

Esim. $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$
 $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k}$



Välinen kulma

1. Laske pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 2 = -2 + 0 + 6 = 4$

2. Laske pituudet

$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$
 $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$

2. $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

3. Ratkaise kulma yhtälöstä:

$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

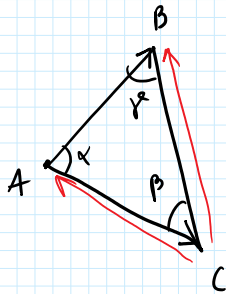
α välillä $0^\circ \dots 180^\circ$

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)$

3. $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} \approx 0,47809$

$\alpha = \cos^{-1}(0,47809) \approx 61,4^\circ$ DEG

148.



$$\vec{AB} = 7\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\vec{AC} = 8\vec{i} + \vec{j}$$

α :

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 7 \cdot 8 + (-4) \cdot 1 = 56 - 4 = 52$
- $|\vec{AB}| = \sqrt{7^2 + (-4)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$
- $|\vec{AC}| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$

$$\cos \alpha = \frac{52}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{65}} = 0,80000$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0,80000) \approx 36,9^\circ$$

β : $\vec{CA} = -\vec{AC} = -8\vec{i} - \vec{j}$

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} =$$

$$-8\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{i} - 4\vec{j} = -\vec{i} - 5\vec{j}$$

$$1. \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 8 + 5 = 13$$

$$2. |\vec{CA}| = \sqrt{65}$$

$$|\vec{CB}| = \sqrt{26}$$

$$3. \cos \beta = \frac{13}{\sqrt{65} \sqrt{26}} = 0,316228$$

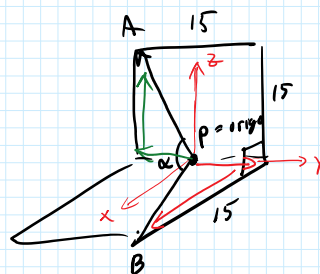
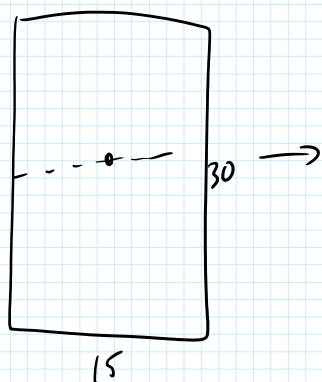
$$\beta = \cos^{-1}(0,316228) \approx 71,6^\circ$$

Kolmion kulmien summa = 180° :

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 71,5^\circ$$

$$S. 82: 138, 140, 142, 144$$

153.



$$\vec{PA} = 7,5\vec{j} + 15\vec{k}$$

$$\vec{PB} = -7,5\vec{j} + 15\vec{k}$$

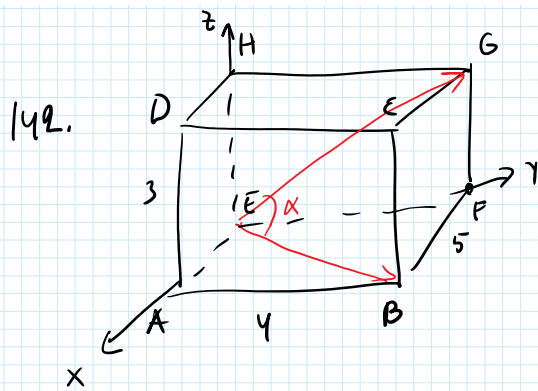
$$1. \vec{PB} \cdot \vec{PA} = 15 \cdot 0 + (7,5) \cdot (-7,5) + 0 \cdot 15 = -56,25$$

$$2. |\vec{PB}| = \sqrt{(-7,5)^2 + 15^2} \approx 16,77$$

$$|\vec{PA}| = \sqrt{7,5^2 + 15^2} \approx 16,77$$

$$3. \cos \alpha = \frac{-56,25}{16,77 \cdot 16,77} \approx -0,200$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-0,200) \approx 78,5^\circ$$



4) $\angle(\vec{EB}, \vec{EG})$

Origo E:ssä.

$$\vec{EB} = \vec{EA} + \vec{AB} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{EG} = \vec{EF} + \vec{FG} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

1. $\vec{EB} \cdot \vec{EG} = 0 + 16 + 0 = 16$

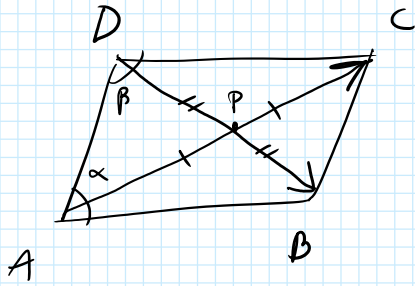
2. $|\vec{EB}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

$$|\vec{EG}| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

3. $\cos \alpha = \frac{16}{\sqrt{41} \cdot 5} = 0,49976$

$$\alpha = \cos^{-1}(0,49976) \approx 60^\circ$$

141.



$$\overrightarrow{DB} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AC} = 10\vec{i} - 4\vec{j}$$

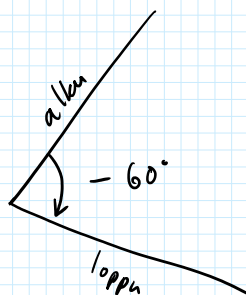
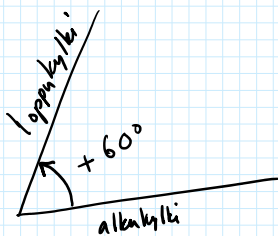
$$\boxed{\alpha + \beta = 180^\circ}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = 9\vec{i} + \vec{j}, \text{ pituus} = \sqrt{82}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \vec{i} - 5\vec{j}, \text{ pituus} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 9 - 5 = 4$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{82} \cdot \sqrt{26}} = 0,08663 \rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,08663) \approx 85^\circ \rightarrow \beta = 95^\circ$$

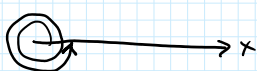


- vastapäivään plussaa
myötäpäivään miinusta

- ilmaise suunta joko nuolenkärjellä tai nimeämällä kuvion alku- ja loppukylki

- yli 360° kulma: piirrä täydet ympyrät näkyviin

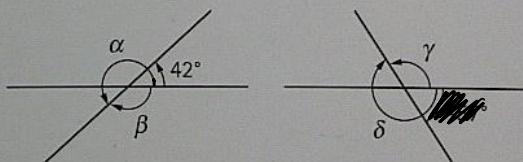
Esim. a) 720°



b) $-1330^\circ = -3 \cdot 360^\circ - 250^\circ$



165. Kuinka suuret suunnatut kulmat α , β , γ ja δ ovat?



Otettu näyttöleike: 12.10.2017 12.56

* β ja 42° ovat vieruskulmia (summa $= 180^\circ$)

$$\beta + 42^\circ = 180^\circ$$

$\beta = 138^\circ$, suunta myötäpäiv.

$$\rightarrow \beta = -138^\circ \quad (\text{täysi ympyrä})$$

$$* \alpha + |\beta| = 360^\circ$$

$$\rightarrow \alpha = +142^\circ \quad (\text{vastapäivään})$$

$$* \gamma + 57^\circ = 180^\circ$$

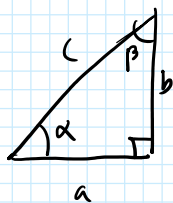
$$\gamma = 123^\circ$$

$$\rightarrow \gamma = +123^\circ \quad (\text{vastap.})$$

$$* \delta = 360^\circ - 123^\circ = 237^\circ$$

$$\rightarrow \delta = -237^\circ \quad (\text{myötäpäivään})$$

MAB2

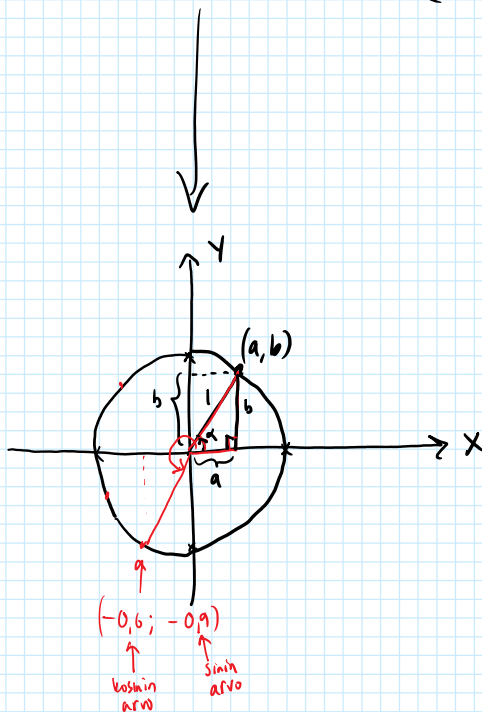


$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

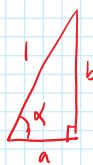
$$\cos \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{c}$$

$$(\tan \alpha = \frac{b}{a})$$



yksikköympyrä = keskipiste (0,0), säde=1

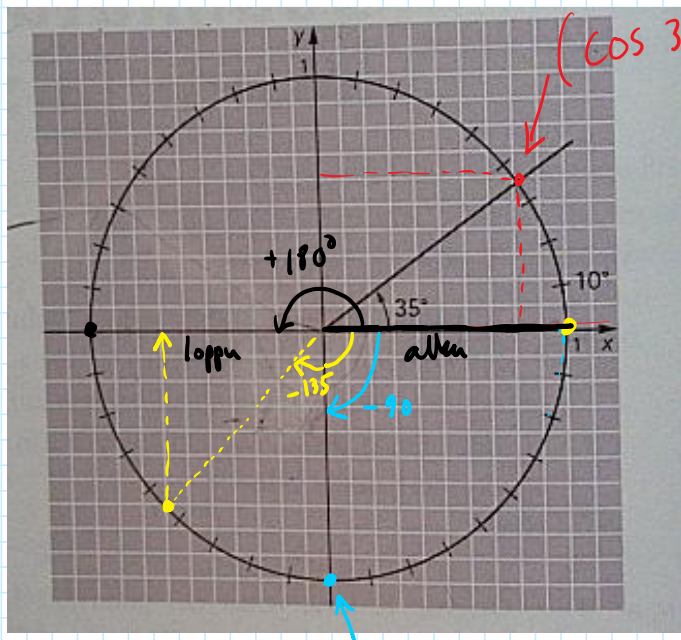


$$\sin \alpha = \frac{b}{1} \rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{1} \rightarrow$$

$$\sin \alpha = b = y\text{-koord.}$$

$$\cos \alpha = a = x\text{-koord.}$$



Otettu näyttöleike: 12.10.2017 13.10

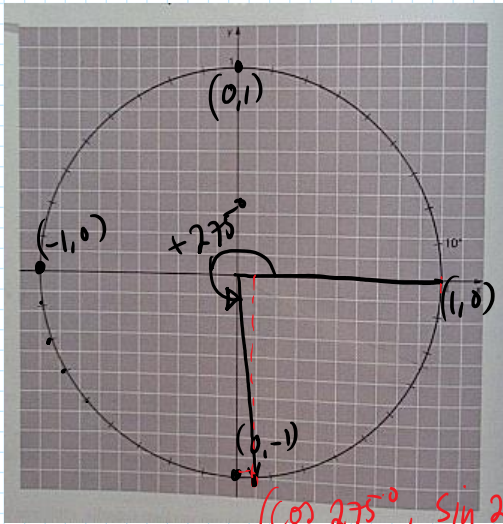
$$(\cos 35^\circ, \sin 35^\circ) \approx (0,8; 0,6)$$

$$\sin 180^\circ = y\text{-koord.} = 0$$

$$\sin (-90^\circ) = -1$$

$$\cos (-135^\circ) \approx -0,7$$

90 + 45



Otettu näyttöleike: 12.10.2017 13.17

174. a) $\cos \alpha = 0,87$ b) $\sin \alpha = 0,9$

$\alpha \approx 30^\circ$

$\alpha \approx -30^\circ$

$\alpha \approx 390^\circ$

$\alpha \approx -390^\circ$

$\alpha = 330^\circ$

$\alpha = 65^\circ$

$\alpha = 115^\circ$

$\alpha = -345^\circ$

$\alpha = -295^\circ$

$\alpha = 360^\circ + 65^\circ$
 $= 425^\circ$

$\alpha = -360^\circ - 295^\circ$

$(\cos 275^\circ, \sin 275^\circ) = (0,1; -0,95)$

183. $2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + \cos(3\alpha)$

a) $\alpha = 180^\circ \rightarrow 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 180^\circ\right) + \cos(3 \cdot 180^\circ) = 2 \cdot \underbrace{\sin 90^\circ}_{=1} + \underbrace{\cos 540^\circ}_{=-1}$
 $= 2 \cdot 1 - 1 = 1$

Kulman ratkaiseminen sin- ja cos-yhtälöstä

MA82: yksi ratkaisu suoraan laskimesta

Esim. a) $\cos \alpha = 0,7$

$$\alpha = \cos^{-1}(0,7) \approx 73^\circ$$



Otettu näyttöleike: 13.10.2017 8.21

https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_en.html

b) $2 \sin \alpha + 1 = 0 \quad || -1$

$$2 \sin \alpha = -1 \quad || :2$$

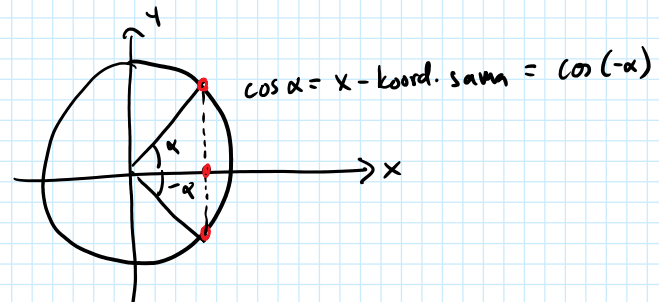
$$\sin \alpha = -0,5$$

$$\alpha = \sin^{-1}(-0,5) = -30^\circ$$

Laskimen yksi ratkaisu ei riitä tällä kurssilla:

Yhtälö $\cos \alpha = a$

1. Yksi ratkaisu laskimella
2. Muut ratkaisut kaavalla:



$$\alpha = \cos^{-1}(a) + n \cdot 360^\circ$$

tai

$$\alpha = -\cos^{-1}(a) + n \cdot 360^\circ$$

, n on kokonaisluku $(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

Esim. a) $\cos \alpha = 0,7$

$$\alpha = \cos^{-1}(0,7) = 73^\circ$$

Vast: $\alpha = 73^\circ + n \cdot 360^\circ$
tai

$$\alpha = -73^\circ + n \cdot 360^\circ$$

Yhtälö $\sin \alpha = b$

Yhtälö $\sin \alpha = b$

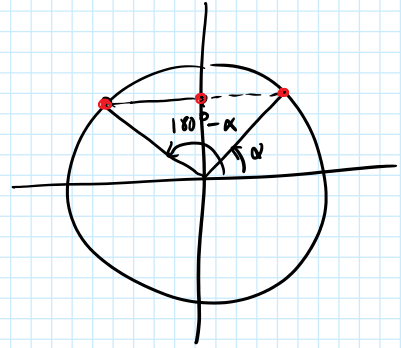
1. Yksi ratk. laskimella : $\alpha = \sin^{-1}(b)$

2. Muut ratkaisut

$$\alpha = \sin^{-1}(b) + n 360^\circ$$

tai

$$\alpha = 180^\circ - \sin^{-1}(b) + n 360^\circ$$



, $n = \text{kokonaisluku}$

Esim. b) $\sin \alpha = 0,5$
 $\alpha = 30^\circ$

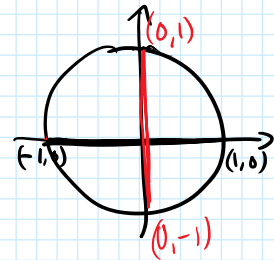
Vuor: $\alpha = 30^\circ + n 360^\circ$ tai

$$\alpha = 180^\circ - 30^\circ + n 360^\circ = 150^\circ + n 360^\circ$$

- $\cos \alpha =$ yksikköympyrän kehäpisteen x -koord.

$\sin \alpha =$ ————— // ————— y -koord.

Kumpikin $-1 \leq \begin{cases} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{cases} \leq 1$



Esim. $\sin \alpha = 1,5$ ei mahdollista
 $\alpha = \sin^{-1}(1,5)$ Math Error

$$191. \quad a) \quad 5 \sin \alpha = 1 \quad || : 5$$

$$\sin \alpha = 0,2$$

$$\text{Laskin: } \alpha = \sin^{-1}(0,2) = 11,537^\circ, \quad \text{viivuskulma } 180^\circ - 11,537^\circ = 168,463^\circ$$

$$\text{Vast: } \boxed{\begin{aligned} \alpha &= 11,54^\circ + n 360^\circ \\ &\text{tai} \\ \alpha &= 168,46^\circ + n 360^\circ \end{aligned}}$$

$$206. \quad a) \quad 4 \cos(\alpha - 25^\circ) = 3 \quad || : 4$$

$$\cos(\alpha - 25^\circ) = 0,75$$

$$\begin{aligned} \text{Laskin: } \alpha - 25^\circ &= \pm \cos^{-1}(0,75) \\ \alpha - 25^\circ &= \pm 41,41^\circ + n 360^\circ \quad || + 25^\circ \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \alpha - 25^\circ &= -41,41^\circ + n 360^\circ \quad || + 25^\circ \\ \alpha &= -16,41^\circ + n 360^\circ \end{aligned}$$

$$b) \quad 4 \sin(2\alpha + 15^\circ) + 1 = 0 \quad || -1$$

$$4 \sin(2\alpha + 15^\circ) = -1 \quad || : 4$$

$$\sin(2\alpha + 15^\circ) = -0,25$$

$$\sin^{-1}(-0,25) = -14,5^\circ$$

$$2\alpha + 15^\circ = -14,5^\circ + n 360^\circ \quad || -15^\circ$$

$$2\alpha = -0,5^\circ + n 360^\circ \quad || : 2$$

$$\alpha = -0,25^\circ + n 180^\circ$$

$$2\alpha + 15^\circ = 180^\circ - (-14,5^\circ) + n 360^\circ \quad || -15^\circ$$

$$2\alpha = 179,5^\circ + n 360^\circ \quad || : 2$$

$$\alpha = 89,75^\circ + n 180^\circ$$

s. 189: 189, 191 b, 192

$$\cos \alpha = a$$

$$\alpha = \cos^{-1}(a) + n360^\circ$$

$$\alpha = -\cos^{-1}(a) + n360^\circ$$

n on kokonaisluku

$$\sin \alpha = b$$

$$\alpha = \sin^{-1}(b) + n360^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \sin^{-1}(b) + n360^\circ$$

189. a) $\cos \alpha = 0,49$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,49 \approx 60,659^\circ$$

$$\alpha = 60,66^\circ + n360^\circ$$

$$\alpha = -60,66^\circ + n360^\circ$$

b) $\sin \alpha = 0,37$

$$\alpha = \sin^{-1}(0,37) \approx 21,716^\circ$$

$$\alpha = 21,72^\circ + n360^\circ$$

$$\alpha = 158,28^\circ + n360^\circ$$

203. $\sin(5\alpha) = 0,61$

$$5\alpha = \sin^{-1}(0,61) + n360^\circ$$

$$5\alpha = 37,5^\circ + n360^\circ \quad \parallel :5$$

$$\alpha = 7,5^\circ + n72^\circ$$

n	α
0	7,5° ✓
1	77,5° ✓
-1	-62,5° ✓
2	151,5° ✓
-2	✓
3	✓

$$5\alpha = \underbrace{180^\circ - \sin^{-1}(0,61)}_{142,4^\circ} + n360^\circ$$

$$\alpha = 28,5^\circ + n \cdot 72^\circ$$

n	α
0	28,5° ✓
1	100,5° ✓
-1	✓
2	172,5° ✓
3	✓

Vast: $7,5^\circ$; $28,5^\circ$; $77,5^\circ$; $100,5^\circ$; $151,5^\circ$; $172,5^\circ$

- kulmayksiköt, ihan niinkuin astekin
- ei merkkiä! Puhdas luku

esim. $360^\circ = 2\pi$ MAOL: $\pi = 180^\circ$

- muunnos aste $\leftrightarrow$ rad suoraan verrannolla:

Esim. Muuta

a) $48^\circ \rightarrow \text{rad}$

aste	rad
48°	x
360°	2π

$$\frac{48^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$$

$$360x = 48 \cdot 2\pi \quad || : 360$$

$$x = \frac{48 \cdot 2\pi}{360} \approx 0,8377 \text{ (rad)}$$

b) $1 \text{ rad} \rightarrow \text{asteiksi}$

aste	rad
x	1
180°	π

$$\pi x = 1 \cdot 180^\circ \quad || : \pi$$

$$x \approx 57,3^\circ$$

- Laskin rad-moodiin!



DRG = Degrees - Radians - Gradians,
tai Setup tai Mode

- $\sin$ - ja $\cos$ -yhtälöiden ratkaisut kuten ed. tunnilla:

Esim. a) $\cos \alpha = 0,8$

$$\alpha = \cos^{-1}(0,8) = 0,6435 \quad \text{radiania}$$

$$\alpha = 0,6435 + n2\pi \quad \text{tai} \quad \alpha = -0,6453 + n2\pi$$

$$\pi = 180^\circ$$

$$2\pi = 360^\circ$$

b) $2 \sin x = 0,7 \quad \parallel :2$

$$\sin x = 0,35$$

$$x = \sin^{-1}(0,35) = 0,3576 \quad (\text{rad})$$

$$x = 0,3576 + n2\pi$$

$$\text{tai} \quad x = \pi - 0,3576 + n \cdot 2\pi \\ = 2,7839 + n2\pi$$

226. Ratkaise kahden desimaalin tarkkuudella yhtälö

a) $5,82 \sin x = 3,19$

b) $9,14 \cos x + 7,22 = 0$.

Otettu näyttöleike: 24.10.2017 13.20

S. 120: 209, 210 $\pi = 180^\circ$

213, 215

217, 218

Laskin RAD-moodiin!

a) $5,82 \sin x = 3,19 \quad || : 5,82$

$\sin x = 0,5481$

$x = \sin^{-1}(0,5481) = 0,5801$



Vast: $x = 0,58 + n2\pi$ tai $x = \pi - 0,5801 + n2\pi$
 $x = 2,56 + n2\pi$

b) $9,14 \cos x + 7,22 = 0$

$9,14 \cos x = -7,22 \quad || : 9,14$

$\cos x = -0,7899$

$x = \cos^{-1}(-0,7899) = 0,6601$



Vast: $x = 0,66 + n2\pi$ tai $x = -0,66 + n2\pi$

218. Ratkaise kahden desimaalin tarkkuudella yhtälö $1,27 \cos(5x - 1,80) = 0,91$. $\parallel: 1,27$

Otettu näyttöleike: 24.10.2017 13.51

$$\cos(5x - 1,80) = 0,7165$$

$$(5x - 1,80) = \cos^{-1}(0,7165)$$

$$5x - 1,80 = 0,7720$$



$$5x - 1,80 = 0,7720 + n2\pi$$

tai

$$5x - 1,80 = -0,7720 + n2\pi$$

$$5x = 2,5720 + n2\pi \parallel: 5$$

$$5x = 1,028 + n2\pi \parallel: 5 \text{ Jos kaikki 5:llä}$$

$$x = 0,51 + \frac{n \cdot 2\pi}{5}$$

$$x = 0,21 + \frac{n \cdot 2\pi}{5}$$

214.

a) $6 \sin x + 1 = 0$

$6 \sin x = -1$

$\sin x = -\frac{1}{6} = -0,16667$

$x = \sin^{-1}(-0,16667) = -0,1674 \quad (\text{rad})$

$x = -0,17 + n2\pi$

tai

$x = \pi - (-0,1674) + n2\pi = 3,31 + n2\pi$

b) $7,1 \cos x - 3,2 = 0$

$7,1 \cos x = 3,2$

$\cos x = \frac{3,2}{7,1} = 0,4507$

$x = \cos^{-1}(0,4507) = 1,1032$

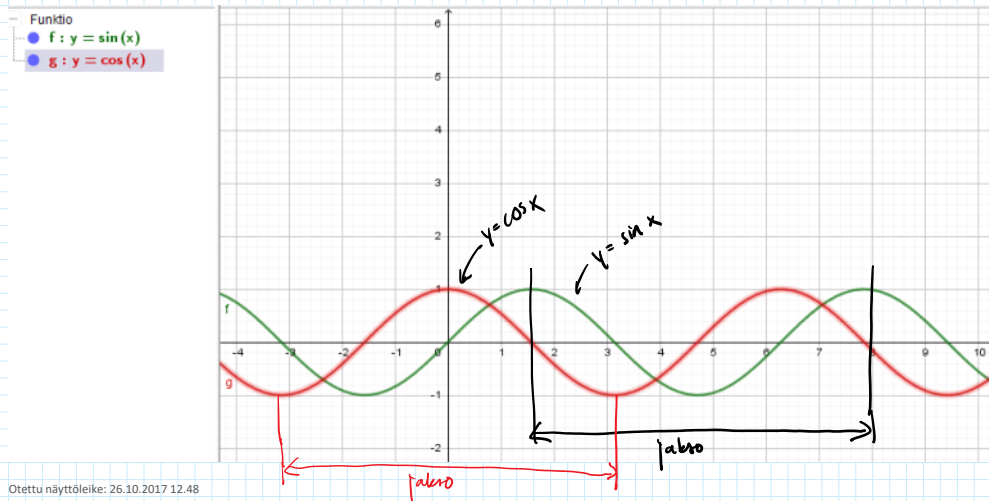
$x = 1,10 + n2\pi$

tai

$x = -1,10 + n2\pi$

Sin x- ja cos x -funktiot

- $\sin x / \cos x$: n kuvaajat jaksollisia, "aaltaja"



Otettu näyttöleike: 26.10.2017 12.48

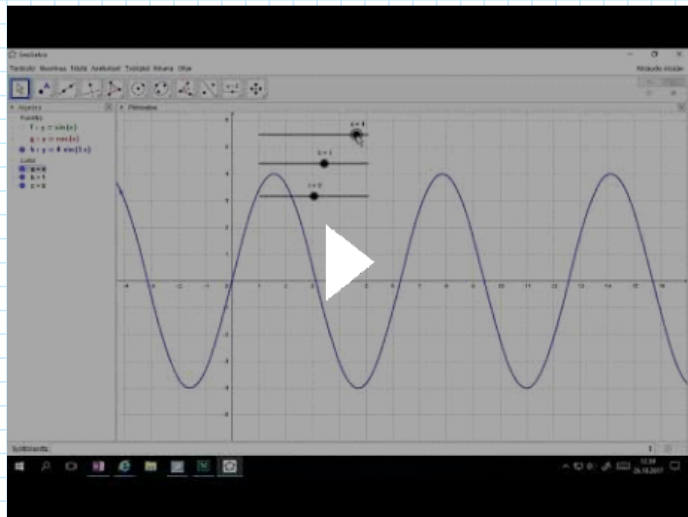
- jaksollinen funktio: kuvio toistuu tietyn jaksan välein, $\sin x / \cos x$:lle jaksan pituus $= 2\pi$
eli kun x (= kulma rad) kasvaa 2π (täysi ympyrä) niin palataan
samaan kehäpisteeseen

Kertoimien vaikutus

torstai 26. lokakuuta 2017 12.54

– esimerkkinä $\sin x$, $\cos x$ käyttäytyy samalla lailla:

<https://youtu.be/-69grrpWbEY>



– funktio $f(x) = \sin(kx)$ jakson pituus on $\frac{2\pi}{k}$

235. $y = 2,5 \sin(0,785x)$

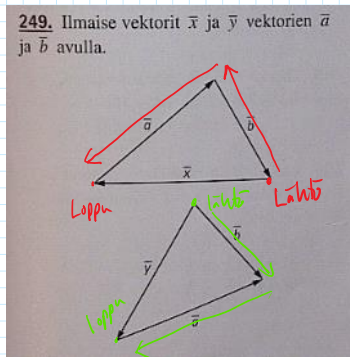
↑
aallon korke.

↑ jakso $\frac{2\pi}{0,785} = 2,55\pi \approx 8$



- kirjan loppuosa (Trig. funktiot): suunta kulma, radioanit, $\sin x / \cos x$ yhtälön-
ratkaisu, kertoimet a ja b kuvanpäässä
 $y = a \sin(bx)$
- kirjan alkuosa (Vektorit): nimitykset, vektorien summa ja erotus, vektorin pituus,
xyz-vektorit ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - muodot, pituus, paikanvektori,
vektori $\overline{AB}$, pistetulo, vekt. yhden suuntaisuus)

249.



Otettu näyttöleike: 26.10.2017 13.14

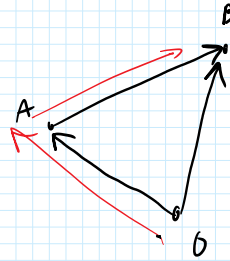
$$\bar{x} = -\bar{b} - \bar{a}$$

$$\bar{y} = \bar{b} - \bar{a}$$

262.

$$A = (-3, 1, -4)$$

$$\overline{AB} = 5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$$



$$\overline{OA} = -3\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$\overline{OB} = -3\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k} + 5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$$

$$\overline{OB} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}$$

$$B = (2, 3, -7)$$

$$265. a) \quad \begin{array}{l} \bar{a} = 42\bar{i} - 72\bar{j} \\ \quad \downarrow x \quad \downarrow y \\ \bar{b} = 27\bar{i} - 48\bar{j} \end{array}$$

$$42x = 27 \quad || : 42$$

$$x = \frac{27}{42} = \frac{9}{14}$$

$$-72y = -48 \quad || : (-72)$$

$$y = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$$

ei luăm $\rightarrow \bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt de yndensunt.

$$269. a) \quad \begin{array}{l} \bar{a} = \bar{i} - 5\bar{j} \\ \bar{b} = 3\bar{i} + 4\bar{j} \end{array}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot 3 + (-5) \cdot 4 = -17$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\cos \alpha = \frac{-17}{\sqrt{26} \cdot 5} = -0,6668 \rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0,6668) \approx 132^\circ$$

$$S. 151: \quad 247, 250, 253,$$

$257, 259, 263$

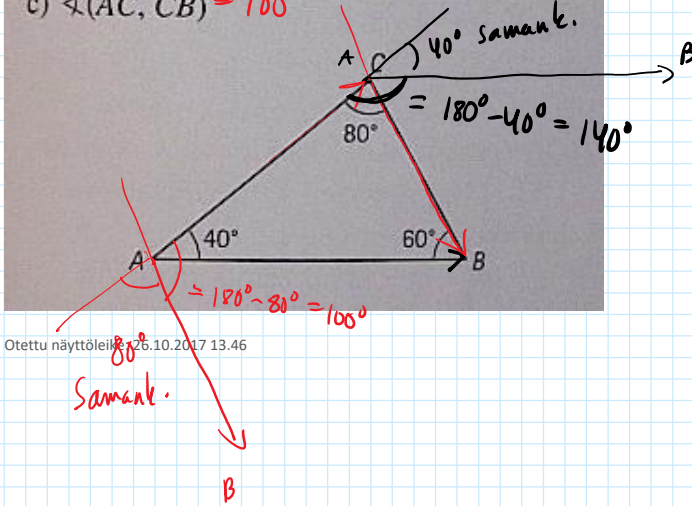
$$265b, 269b$$

247. Määritä kulman suuruus.

a) $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC}) = 40^\circ$

b) $\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{CA}) = 140^\circ$

c) $\sphericalangle(\overline{AC}, \overline{CB}) = 180^\circ$



Otettu näyttölehti 25.10.2017 13.46

253.

