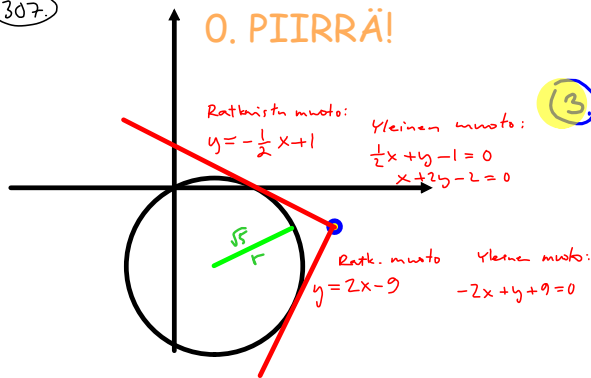


307. Määritä ympyrälle $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ pisteen $(4, -1)$ kautta piirrettyjen tangenttien yhtälöt.

307.



1.

Tutkitaan, onko piste $(4, -1)$ ympyrällä $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$.
 Sijoitetaan ympyrän yhtälöön $x = 4$ ja $y = -1$.

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y+2)^2 &= 5 \\ (4-1)^2 + (-1+2)^2 &= 5 \\ 18 &= 5 \\ \text{Epätosi}\end{aligned}$$

2.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$\begin{aligned}y - y_0 &= k(x - x_0) && \text{Sijoitetaan pisteen } (4, -1) \text{ koordinaatit} \\ y - (-1) &= k(x - 4) \\ y + 1 &= kx - 4k && \text{Muokataan yleiseen muotoon} \\ kx - y - 4k - 1 &= 0\end{aligned}$$

3.

Muodostetaan lauseke ympyrän keskipisteen $(1, -2)$ etäisyydelle tangentista $kx - y - 4k - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} && a = k, b = -1, c = -4k - 1, x_0 = 1, y_0 = -2 \\ &= \frac{|k \cdot 1 - 1 \cdot (-2) - 4k - 1|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|1 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}}\end{aligned}$$

4.

Ympyrän keskipisteen etäisyys tangentista on yhtä suuri kuin ympyrän säde $\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}\frac{|1 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} &= \sqrt{5} \quad | \cdot \sqrt{k^2 + 1} \quad (\neq 0) \\ |1 - 3k| &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{k^2 + 1} && \sqrt{a} = b, \text{ kun } b \geq 0 \text{ ja } a = b^2 \\ (1 - 3k)^2 &= (\sqrt{5} \cdot \sqrt{k^2 + 1})^2 \\ (1 - 3k)^2 &= 5(k^2 + 1) && \text{Ratkaistaan laskimella} \\ k &= -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad k = 2\end{aligned}$$

$$y - -1 = k(x - 4)$$

$$y + 1 = k(x - 4)$$

$$\begin{aligned}y + 1 &= kx - 4k \\ -kx + y + 4k + 1 &= 0 \quad (| \cdot (-1)) \\ kx - y - 4k - 1 &= 0\end{aligned}$$

$$a = k, b = -1, c = -4k - 1$$

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = -2$$

$$\begin{aligned}d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|k \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + (-4k - 1)|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|k + 2 - 4k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} \\ &= \frac{|-3k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}\end{aligned}$$

$$\text{solve}\left(\frac{|1 - 3 \cdot k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}, k\right)$$

$$k = \frac{-1}{2} \text{ or } k = 2$$

309. Ympyrälle $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ piirretään pisteen $(1, -1)$ kautta kulkevat tangentit. Piirrä tilanteesta mallikuva ja määritä tangenttien yhtälöt.

1.

Tutkitaan, onko piste $(1, -1)$ ympyrällä $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$. Sijoitetaan ympyrän yhtälöön $x=1$ ja $y=-1$.

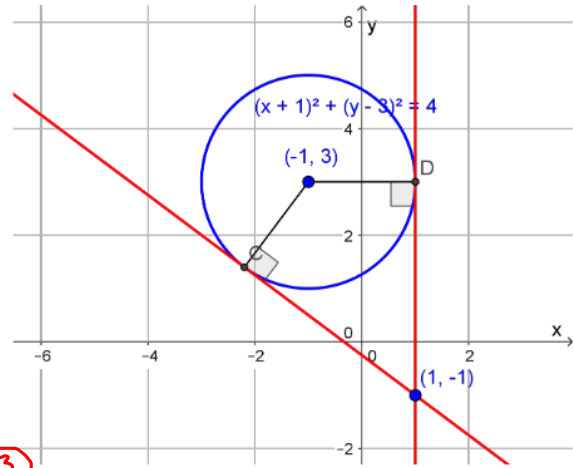
$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-3)^2 &= 4 \\ (1+1)^2 + (-1-3)^2 &= 4 \\ 20 &= 4 \\ \text{Epätosi}\end{aligned}$$

Koska $20 > 4$, piste $(1, -1)$ on ympyrän ulkopuolella ja sen kautta voidaan piirtää ympyrälle täsmälleen kaksi tangenttia.

2.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$\begin{aligned}y - y_0 &= k(x - x_0) && \text{Sijoitetaan pisteen } (1, -1) \text{ koordinaatit} \\ y - (-1) &= k(x - 1) \\ y + 1 &= kx - k && \text{Muokataan yleiseen muotoon} \\ kx - y - k - 1 &= 0\end{aligned}$$



3.

Muodostetaan lauseke ympyrän keskipisteen $(-1, 3)$ etäisyydelle tangentista $kx - y - k - 1 = 0$.

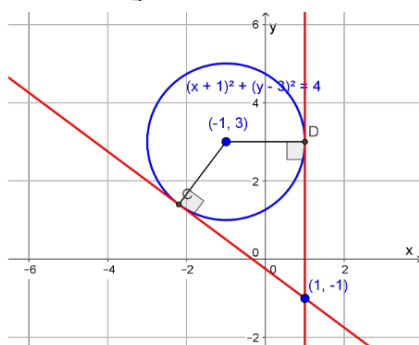
$$\begin{aligned}d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} && a = k, b = -1, c = -k - 1, x_0 = -1, y_0 = 3 \\ &= \frac{|k \cdot (-1) - 1 \cdot 3 - k - 1|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|-2k - 4|}{\sqrt{k^2 + 1^2}}\end{aligned}$$

4.

Muodostetaan yhtälö, josta voidaan ratkaista tangenttien kulmakertoimet.

Ympyrän keskipisteen etäisyys tangentista on yhtä suuri kuin ympyrän säde 2.

$$\begin{aligned}\frac{|-2k - 4|}{\sqrt{k^2 + 1^2}} &= 2 \quad | \cdot \sqrt{k^2 + 1} \quad (\neq 0) \\ |-2k - 4| &= 2 \cdot \sqrt{k^2 + 1} && \sqrt{a} = b, \text{ kun } b \geq 0 \text{ ja } a = b^2 \\ (-2k - 4)^2 &= (2 \cdot \sqrt{k^2 + 1})^2 \\ (-2k - 4)^2 &= 4(k^2 + 1) && \text{Ratkaistaan laskimella} \\ k &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$



5.

Sijoitetaan saatu kulmakerroin tangentin yhtälöön $kx - y - k - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}-\frac{3}{4}x - y - (-\frac{3}{4}) - 1 &= 0 \\ -\frac{3}{4}x - y - \frac{1}{4} &= 0 && | \cdot (-4) \\ 3x + 4y + 1 &= 0.\end{aligned}$$

6.

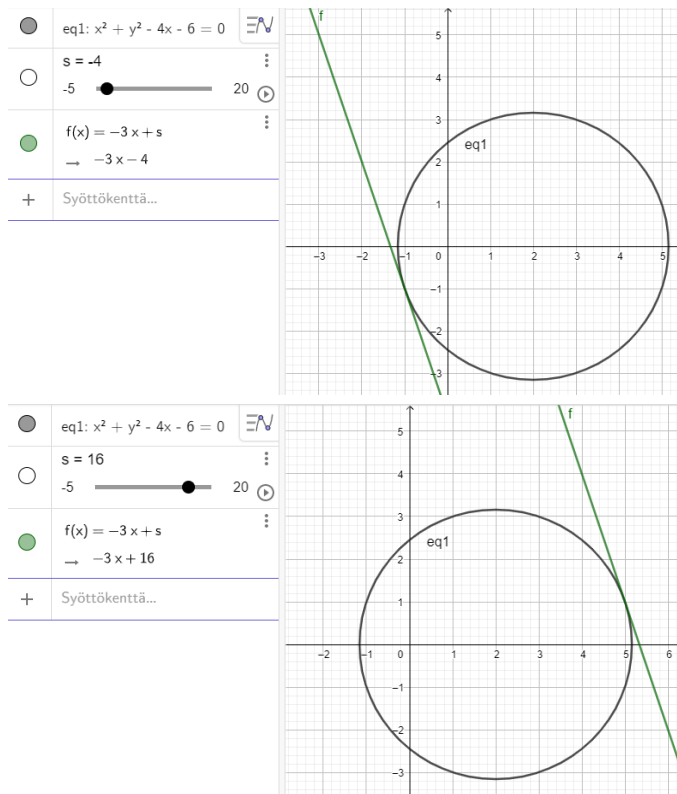
Saatiin vain yksi kulmakerroin, vaikka piste $(1, -1)$ on ympyrän ulkopuolella, jolloin tangentteja on täsmälleen kaksi. Koska toisella tangentista ei ole kulmakerrointa, sen on oltava pystysuora. Sama voidaan havaita mallikuvasta.

Pystysuora tangentti kulkee pisteen $(1, -1)$, joten sen yhtälö on $x = 1$.

Siis tangentit ovat $3x + 4y + 1 = 0$ ja $x = 1$.

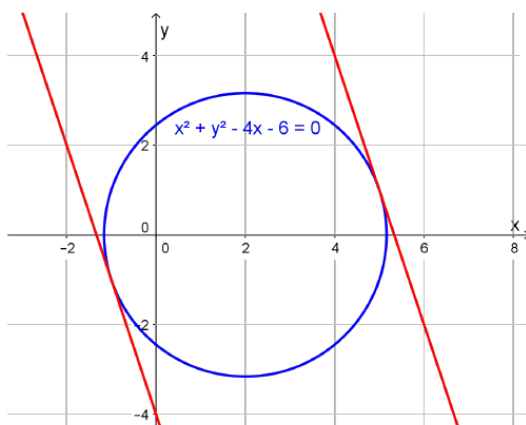
ks. kuva 9.

310.



310

Ratkaisua voidaan havainnollistaa kuvan avulla.



Muodostetaan tangentin yhtälö. Tangentti on suora, joten sen yhtälö on muotoa $y = kx + s$. Sijoitetaan yhtälöön tangentin kulmakerroin $k = -3$.

$$y = -3x + s$$

Ratkaistaan vakiotermin s arvo. Suoralla ja ympyrällä on yksi yhteinen piste, kun yhtälöparilla

$$\begin{cases} y = -3x + s \\ x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases}$$

on täsmälleen yksi ratkaisu.

$$\begin{cases} y = -3x + s \\ x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{Sijoitetaan } y\text{'n lauseke ympyrän yhtälöön.}$$

$$x^2 + (-3x + s)^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x^2 + 9x^2 - 6sx + s^2 - 4x - 6 = 0 \quad \text{Otetaan } x \text{ yhteiseksi tekijäksi.}$$

$$10x^2 + (-6s - 4)x + s^2 - 6 = 0$$

Yhtälöparilla on täsmälleen yksi ratkaisu, kun saadun toisen asteen yhtälön diskriminantti on nolla. Muodostetaan diskriminantin lauseke.

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$a = 10, b = -6s - 4, c = s^2 - 6$$

$$(-6s - 4)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (s^2 - 6) = 0$$

$$-4s^2 + 48s + 256 = 0$$

Ratkaistaan laskimella

$$s = -4 \quad \text{tai} \quad s = 16$$

Sijoitetaan saadut vakiotermin s arvot tangentin yhtälöön $y = -3x + s$.

Kun $s = -4$, tangentin yhtälö on $y = -3x - 4$

Kun $s = 16$, tangentin yhtälö on $y = -3x + 16$

Vastaus $y = -3x - 4$ tai $y = -3x + 16$

320

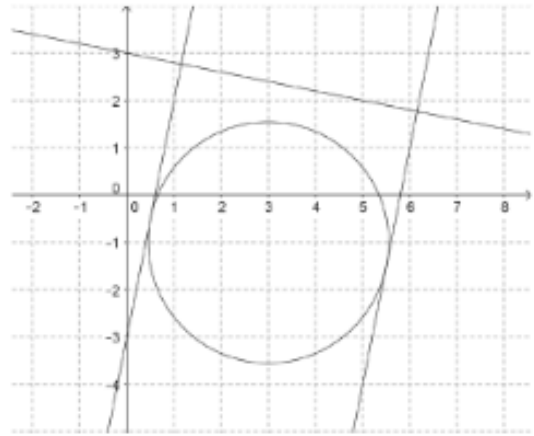
- ①. Muokataan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$x + 5y - 15 = 0$$

$$y = -\frac{1}{5}x + 3$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$k_2 = \frac{-1}{k_1} = \frac{-1}{-\frac{1}{5}} = 5$$



- ②. Tangenttisuoran yhtälö on siis muotoa $y = 5x + s$

Ratkaistaan vakiotermin s arvo. Suoralla ja ympyrällä on yksi yhteinen piste, kun yhtälöparilla

$$\begin{cases} y = 5x + s \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$$

on täsmälleen yksi ratkaisu.



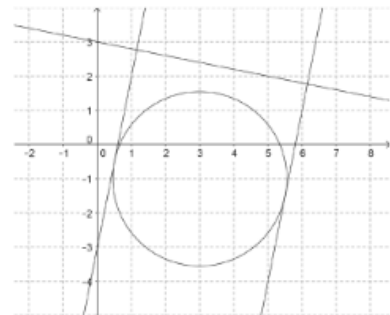
320 jatkuu ..

- ③. $\begin{cases} y = 5x + s \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$ Sijoitetaan y :n lauseke ympyrän yhtälöön.

$$x^2 + (5x + s)^2 - 6x + 2 \cdot (5x + s) + \frac{7}{2} = 0$$

$$x^2 + 25x^2 + 10sx + s^2 - 6x + 10x + 2s + \frac{7}{2} = 0$$
 Otetaan x yhteiseksi tekijäksi.

$$26x^2 + (10s + 4)x + s^2 + 2s + \frac{7}{2} = 0$$



④.

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0 \quad a = 26, \quad b = 10s + 4, \quad c = s^2 + 2s + \frac{7}{2}$$

$$(10s + 4)^2 - 4 \cdot 26 \cdot (s^2 + 2s + \frac{7}{2}) = 0$$

$$-4s^2 - 128s - 348 = 0$$

Ratkaistaan laskimella

$$s = -29 \quad \text{tai} \quad s = -3$$

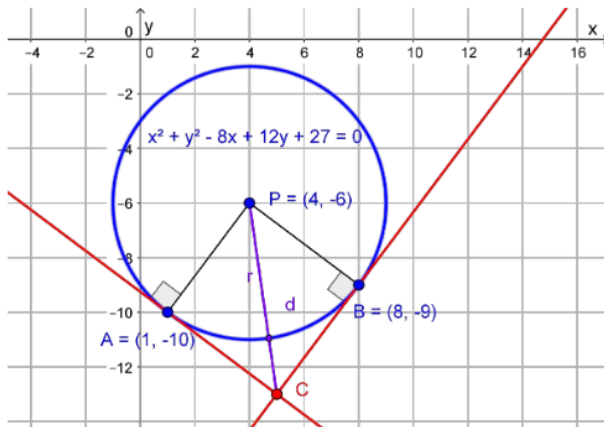
⑤. Muodosta tangentit sijoittamalla s :n arvot suoran $y = 5x + s$ yhtälöön.

$$y = 5x - 29 \quad \text{tai} \quad y = 5x - 3$$

322. Ympyrälle $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$ piirretään tangentit pisteisiin $(1, -10)$ ja $(8, -9)$. Laske tangenttien leikkauspisteen etäisyys ympyrästä.

1.

Ratkaisua voidaan havainnollistaa kuvan avulla.



2. Muokataan ympyrän $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$ yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 25$$

Ympyrän keskipiste on siis $P = (4, -6)$ ja säde $r = 5$.

3. Muodosta säteistä suorat
4. Määritä suorien normaalit eli ympyrän tangentit.
5. Laske tangenttien leikkauspiste ja määritä leikkauspisteen etäisyys ymp. kesk. pisteestä.
6. Anna vastaus