K1

a) $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

b) $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$

c) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{3\cdot 3} = \dfrac{1}{9}$

d) $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{(-3)\cdot(-3)} = \dfrac{1}{9}$

K2

a) $\frac{(5a^4)^2}{5a^3} = \frac{5^2 \cdot (a^4)^2}{5a^3} = \frac{5^{\cancel{2}} \cdot a^{4\cdot 2}}{\cancel{5}a^3} = 5 \cdot \frac{a^8}{a^3} = 5a^{8-3} = 5a^5$

b) $\frac{(-b)^3 b}{(-b)^2 b^4} = \frac{-b^3 \cdot b}{b^2 \cdot b^4} = -\frac{b^{3+1}}{b^{2+4}} = -\frac{b^4}{b^6} = -b^{4-6} = -b^{-2} = -\frac{1}{b^2}$

c)

$$\left(\frac{c^2}{2c^{-1}}\right)^5 = \frac{(c^2)^5}{(2c^{-1})^5} = \frac{c^{2\cdot 5}}{2^5 \cdot (c^{-1})^5} = \frac{c^{10}}{32 \cdot c^{(-1)\cdot 5}} = \frac{1}{32} \cdot \frac{c^{10}}{c^{-5}} = \frac{1}{32} \cdot c^{10-(-5)} = \frac{c^{15}}{32}$$

K3

a) $81^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{81} = \sqrt{81} = 9$

b) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $5^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{5^3} = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

d) $2^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{2^{\frac{4}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^4}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{16}}$

K4

a) $\sqrt[4]{3^7} = 3^{\frac{7}{4}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[2]{3}} = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

c) $3\sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt[2]{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{1+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{1}{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{-\frac{2}{3}}$

K5

a) $\left(\sqrt{k}\right)^3 = \left(\sqrt[2]{k}\right)^3 = \left(k^{\frac{1}{2}}\right)^3 = k^{\frac{1}{2}\cdot 3} = k^{\frac{3}{2}} = k \cdot k^{\frac{1}{2}} = k\sqrt[2]{k} = k\sqrt{k}$

b) $\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt[3]{k}} = \dfrac{\sqrt[2]{k}}{\sqrt[3]{k}} = \dfrac{k^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{3}}} = k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{k}$

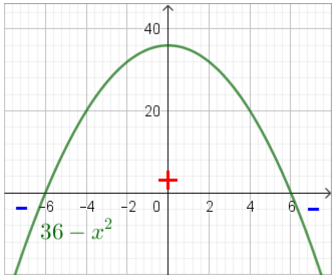
c) $\dfrac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{k}} = \dfrac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt[2]{k}} = \dfrac{k^{\frac{1}{4}}}{k^{\frac{1}{2}}} = k^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = k^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{k}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{k^3}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{k^3}} = \sqrt[3]{(k)^{\frac{3}{2}}} = \left(k^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{k} = \sqrt{k}$

K6

a) Parillinen juurifunktio on määritelty juurrettavan epänegatiivisille arvoille. Saadaan siis määrittelyehto $36-x^2 \geq 0$. Ratkaistaan epäyhtälö määrittämällä nollakohdat, ja hahmottelemalla kuvaaja.

$$36-x^2=0$$
$$x^2=36$$
$$x=\pm\sqrt{36}=\pm 6$$



Määrittelyehdoksi saadaan

$$-6 \leq x \leq 6$$

Lasketaan funktion arvo kohdassa 4.

$$f(4)=\sqrt{36-4^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

b) Parillinen juurifunktio on määritelty juurrettavan epänegatiivisille arvoille, joten lausekkeesta $\sqrt{x}$ saadaan ehto $x \geq 0$.
Lausekkeesta $\sqrt{x-3}$ saadaan ehto $x-3 \geq 0$ eli $x \geq 3$.

Toisaalta funktio ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa.
Nimittäjän nollakohdat saadaan yhtälöstä

$$\sqrt{x-3} = 0 \text{ eli } x-3=0 \text{ eli } x=3.$$

On siis oltava $x \neq 3$.

Yhdistämällä ehdot saadaan funktion määrittelyehdoksi $x > 3$.

Lasketaan funktion arvo kohdassa 4.

$$f(4) = \frac{\sqrt[3]{4+2\sqrt{4}}}{\sqrt{4-3}} = \frac{\sqrt[3]{4+2\cdot 2}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{1} = 2$$

Vastaus

a) $-6 \leq x \leq 6$, $f(4) = 2\sqrt{5}$

b) $x > 3$, $f(4) = 2$

K7

a) Parillinen juurifunktio on määritelty juurrettavan epänegatiivisilla arvoilla, joten saadaan yhtälölle määrittelyehto $x \geq 0$.

$$2\sqrt{x} = 1 \quad \Big| :2$$
$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, niin voidaan korottaa puolittain potenssiin 2.

$$\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq 0} \qquad \Big| (\,)^2$$
$$(\sqrt{x})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$x = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

b) Yhtälön määrittelyehto $x \geq 0$. Muokataan yhtälöä.

$$\sqrt{x} + 2 = 0$$
$$\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0} = \underbrace{-2}_{<0}$$

Parillinen juurifunktio $\sqrt{x}$ saa vain epänegatiivisia arvoja. Täten yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

c) Pariton juurifunktio on määritelty juurrettavan kaikilla reaalilukuarvoilla. Ratkaistaan yhtälö korottamalla puolittain potenssiin 3.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x}+2&=0 \\ \sqrt[3]{x}&=-2 \qquad \Big|\,(\ )^3 \\ (\sqrt[3]{x})^3&=(-2)^3 \\ x&=-8 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $x=\dfrac{1}{4}$

b) ei ratkaisua

c) $x=-8$

K8

a) Parillinen juurifunktio on määritelty juurrettavan epänegatiivisille reaalilukuarvoille, joten yhtälölle saadaan määrittelyehto

$$
\begin{aligned}
9-5x &\geq 0 \\
-5x &\geq -9 \quad \Big| :(-5) \\
x &\leq \frac{9}{5}
\end{aligned}
$$

Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, niin yhtälö voidaan ratkaista korottamalla puolittain potenssiin 2.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{9-5x}}_{\geq 0} &= \underbrace{7}_{\geq 0} \quad \Big| (\ )^2 \\
(\sqrt{9-5x})^2 &= 7^2 \\
9-5x &= 49 \\
-5x &= 40 \quad \Big| :(-5) \\
x &= -8
\end{aligned}
$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon $x \leq \dfrac{9}{5}$.

b) Funktio $\sqrt{x}$ on määritelty, kun $x \geq 0$.
Toisaalta funktio on määritelty, kun $1+x \geq 0$ eli $x \geq -1$.

Yhdistämällä ehdot saadaan yhtälön määrittelyehto $x \geq 0$.

Koska yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, niin yhtälö voidaan ratkaista korottamalla puolittain potenssiin 2.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}_{\geq 0} &= \underbrace{1}_{\geq 0} \qquad \Big|\,(\ )^2 \\
(\sqrt{x}\sqrt{1+x})^2 &= 1^2 \\
(\sqrt{x})^2(\sqrt{1+x})^2 &= 1 \\
x(1+x) &= 1 \\
x + x^2 &= 1 \\
x^2 + x - 1 &= 0
\end{aligned}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}6 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}6$$

Näistä ratkaisuista vain

$x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ toteuttaa määrittelyehdon $x \geq 0$.

Vastaus

a) $x = -8$

b) $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

K9

Voidaan käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä, kun $x > 0$.

a) $\mathrm{D}\sqrt{x} = \mathrm{D}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $\mathrm{D}\sqrt[6]{x} = \mathrm{D}x^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}-1} = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}\frac{1}{x^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

c) $\mathrm{D}x\sqrt{x} = \mathrm{D}x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = \mathrm{D}x^{1+\frac{1}{2}} = \mathrm{D}x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Vastaus

a) $\mathrm{D}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $\mathrm{D}\sqrt[6]{x} = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

c) $\mathrm{D}x\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

K10

a) Juurrettava $6-3x>0$, kun $x<2$. Voidaan siis käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}\sqrt[4]{6-3x} \\
&= \mathrm{D}(6-3x)^{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{4}(6-3x)^{\frac{1}{4}-1}\cdot \mathrm{D}(6-3x) \\
&= \frac{1}{4}(6-3x)^{-\frac{3}{4}}\cdot(-3) \\
&= -\frac{3}{4}\frac{1}{(6-3x)^{\frac{3}{4}}} \\
&= \frac{-3}{4\sqrt[4]{(6-3x)^3}}
\end{aligned}
$$

b) Juurrettava $4x^2 - 16 \neq 0$, kun $x \neq \pm 2$. Voidaan siis käyttää murtopotenssimuotoa ja potenssin derivointisääntöä.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D\sqrt[3]{4x^2 - 16} \\
&= D(4x^2 - 16)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3}(4x^2 - 16)^{\frac{1}{3}-1} \cdot D(4x^2 - 16) \\
&= \frac{1}{3}(4x^2 - 16)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4 \cdot 2x) \\
&= \frac{8x}{3} \frac{1}{(4x^2 - 16)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{8x}{3\sqrt[3]{(4x^2 - 16)^2}}
\end{aligned}
$$

Vastaus

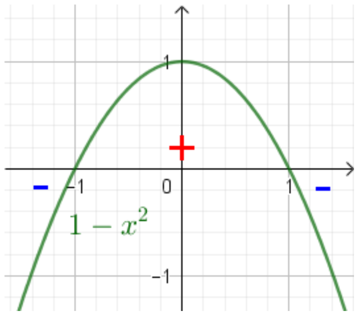
a) $f'(x) = \dfrac{-3}{4\sqrt[4]{(6-3x)^3}}$, kun $x < 2$

b) $g'(x) = \dfrac{8x}{3\sqrt[3]{(4x^2 - 16)^2}}$, kun $x \neq \pm 2$

K11

a) Funktio $\sqrt{1-x^2}$ on määritelty juurrettavan $1-x^2$ epänegatiivisilla reaalilukuarvoilla, mistä saadaan ehto $1-x^2 \geq 0$. Ratkaistaan epäyhtälö määrittämällä nollakohdat ja hahmottelemalla kuvaaja.

$$1-x^2=0$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm 1$$



Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio $1-x^2$ on positiivinen nollakohtiensa välissä. Saadaan ehto $-1 \leq x \leq 1$.

Toisaalta funktio f ei ole määritelty nimittäjän $3x$ nollakohdassa $x=0$, joten saadaan toinen ehto $x \neq 0$.

Yhdistämällä ehdot saadaan funktion f määrittelyehdoksi $-1 \leq x \leq 1$ ja $x \neq 0$.

b) Osoittajan raja-arvo: $\lim\limits_{x\to 0} 1-\sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{1-0^2} = 1-1=0$.

Nimittäjän raja-arvo: $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 3\cdot 0 = 0$.

Täytyy muokata funktion f lauseketta raja-arvon laskemiseksi.

$$
\begin{aligned}
{}^{1+\sqrt{1-x^2})}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x} &= \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{3x(1+\sqrt{1-x^2})} \\
&= \frac{1^2-(\sqrt{1-x^2})^2}{3x(1+\sqrt{1-x^2})} \\
&= \frac{1-(1-x^2)}{3x(1+\sqrt{1-x^2})} \\
&= \frac{x^2}{3x(1+\sqrt{1-x^2})}{}^{(x} \\
&= \frac{x}{3(1+\sqrt{1-x^2})}
\end{aligned}
$$

Lasketaan raja-arvo.

$$
\lim_{x\to 0}\frac{x}{3(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{0}{3(1+\sqrt{1-0^2})} = \frac{0}{3(1+\sqrt{1})} = \frac{0}{6} = 0
$$

Vastaus

a) $-1 \le x \le 1$ ja $x \ne 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

K12

a) Yhtälö on määritelty, kun murtopotenssin kantaluku $x-1>0$.
Saadaan määrittelyehto $x>1$.

Yhtälön molemmat puolet ovat positiiviset, joten voidaan korottaa puolittain potenssiin $\frac{3}{2}$ yhtälön ratkaisemiseksi.

$$\begin{aligned}
\underbrace{(x-1)^{\frac{2}{3}}}_{>0} &= \underbrace{4}_{>0} \qquad \Big|\, (\ )^{\frac{3}{2}} \\
((x-1)^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} &= 4^{\frac{3}{2}} \\
(x-1)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} &= (\sqrt{4})^3 \\
(x-1)^1 &= 2^3 \\
x-1 &= 8 \\
x &= 9
\end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa yhtälön määrittelyehdon.

b) Yhtälö on määritelty, kun $x > 0$. Muokataan yhtälöä.

$$-4x^{\frac{3}{2}} + 32 = 0$$

$$-4x^{\frac{3}{2}} = -32 \quad \Big| :(-4)$$

$$x^{\frac{3}{2}} = 8$$

Yhtälön molemmat puolet ovat positiiviset, joten voidaan korottaa puolittain potenssiin $\dfrac{2}{3}$.

$$\underbrace{x^{\frac{3}{2}}}_{>0} = \underbrace{8}_{>0} \quad \Big| (\ )^{\frac{2}{3}}$$

$$(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}$$

$$x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2$$

$$x^1 = 2^2$$

$$x = 4$$

Ratkaisu toteuttaa yhtälön määrittelyehdon $x > 0$.

Vastaus

a) $x = 9$

b) $x = 4$

K13

Muokataan yhtälöä.

$$\sqrt{12-4x}-2=6x$$
$$\sqrt{12-4x}=6x+2$$

Yhtälö on määritelty, kun juurrettava $12-4x$ on epänegatiivinen. Ratkaistaan määrittelyehto.

$$\begin{aligned} 12-4x &\ge 0 \\ -4x &\ge -12 \quad \big| :(-4) \\ x &\le 3 \end{aligned}$$

Koska yhtälön vasen puoli on aina epänegatiivinen, niin myös yhtälön oikean puolen $6x+2$ on oltava epänegatiivinen.

$$\begin{aligned} 6x+2 &\ge 0 \\ 6x &\ge -2 \quad \big| :6 \\ x &\ge -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Yhdistämällä ehdot saadaan yhtälön määrittelyehto $-\frac{1}{3} \le x \le 3$.

Ratkaistaan yhtälö korottamalla puolittain potenssin 2.

$$\underbrace{\sqrt{12-4x}}_{\geq 0} = \underbrace{6x+2}_{\geq 0} \qquad \Big|\ (\ )^2$$

$$(\sqrt{12-4x})^2 = (6x+2)^2$$

$$12-4x = (6x)^2 + 2\cdot 6x\cdot 2 + 2^2$$

$$12-4x = 36x^2 + 24x + 4$$

$$36x^2 + 28x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4\cdot 36\cdot(-8)}}{2\cdot 36} = \frac{-28 \pm \sqrt{1936}}{72}$$

$$= \frac{-28 \pm 44}{72}^{(4} = \frac{-7 \pm 11}{18}$$

$$x = \frac{-7+11}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7-11}{18} = \frac{-18}{18} = -1$$

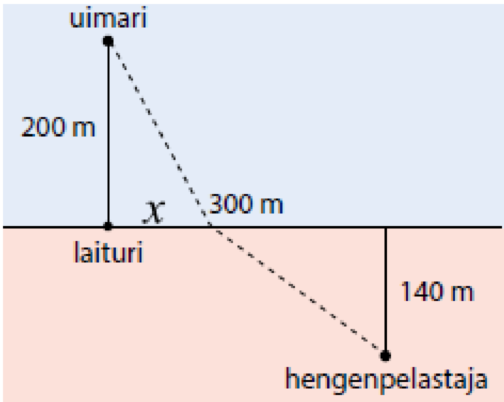
Näistä ratkaisuista vain $x = \frac{2}{9}$ toteuttaa ehdon $-\frac{1}{3} \leq x \leq 3$.

Vastaus

$x = \frac{2}{9}$

K14

Oletetaan, että hengenpelastaja ylittää rantaviivan x metriä laiturista oikealle. Pythagoraan lauseen nojalla pelastajan juoksema matka rannalla on tällöin $\sqrt{(300-x)^2+140^2}$ metriä, ja pelastajan vedessä uima matka $\sqrt{x^2+200^2}$ metriä. Selvästi on oltava $0 \le x \le 300$.



Pelastajan juoksuun käyttämä aika saadaan jakamalla pelastajan juoksema matka juoksunopeudella. Juoksuajalle sekunteina saadaan lauseke

$$\frac{1}{7}\sqrt{(300-x)^2+140^2}\,.$$

Vastaavasti pelastajan uimiseen käyttämälle ajalle sekunteina saadaan lauseke

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+200^2}\,.$$

Pelastajan käyttämä kokonaisaika sekunteina saadaan hänen juoksemiseen ja uimiseen käytettyjen aikojen summana.

Merkitään pelastajan käyttämää aikaa funktiolla f.

$$f(x)=\frac{1}{7}\sqrt{(300-x)^2+140^2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+200^2}\ \text{, missä } 0\le x\le 300$$

On etsittävä se muuttujan x arvo, jolla funktio f saa pienimmän arvonsa. Funktio f saa pienimmän arvonsa määrittelyvälin [0, 300] päätepisteessä tai tälle välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}
&f'(x)\\
&=\mathrm{D}(\frac{1}{7}\sqrt{(300-x)^2+140^2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+200^2})\\
&=\frac{7x\sqrt{x^2-600x+109\ 600}+2x\sqrt{x^2+40\ 000}-600\sqrt{x^2+40\ 000}}{14\sqrt{(x^2-600x+109\ 600)\cdot(x^2+40\ 000)}}
\end{aligned}$$

Määritetään derivaattafunktion nollakohdat laskimella.

$$f'(x)=0$$

$$x=51{,}408...\approx 51\ \ \text{(m)}$$

Lasketaan funktion f arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{7}\sqrt{(300-0)^2+140^2}+\frac{1}{2}\sqrt{0^2+200^2} \\
&= 147,29\ldots \text{ (s)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(300) &= \frac{1}{7}\sqrt{(300-300)^2+140^2}+\frac{1}{2}\sqrt{300^2+200^2} \\
&= 200,27\ldots \text{ (s)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(51,4\ldots) &= \frac{1}{7}\sqrt{(300-51,4..)^2+140^2}+\frac{1}{2}\sqrt{51,4..^2+200^2} \\
&= 144,00\ldots \text{ (s)} \quad \text{pienin}
\end{aligned}
$$

Ratkaisuksi löydetään $x \approx 51$ metriä.

Vastaus
Pelastajan kannattaa mennä uimaan kohdassa, joka on noin 51 metriä laiturista oikealle.

K15

a) Sijoitetaan $x^{12} = |x|^{12}$, jotta neliöjuurifunktiot säilyvät määriteltyinä, kun sievennetään lauseketta.

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x^{12}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{|x|^{12}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{(|x|^6)^2}}}$$
$$= \sqrt{\sqrt{|x|^6}} = \sqrt{\sqrt{(|x|^3)^2}} = \sqrt{|x|^3}$$
$$= \sqrt{|x|^2 \cdot |x|} = \sqrt{|x|^2}\sqrt{|x|} = |x|\sqrt{|x|}$$

b) Lasketaan funktion arvot kohdissa -4 ja 9.

$$f(-4) = |-4|\sqrt{|-4|} = 4\sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$$

$$f(9) = |9|\sqrt{|9|} = 9\sqrt{9} = 9 \cdot 3 = 27$$

Vastaus

a) $f(x) = |x|\sqrt{|x|}$

b) $f(9)$ on suurempi

K16

a) Pythagoraan lauseen avulla saadaan paraabelin pisteen $(x, y) = (x, x^2 + 1)$ etäisyydeksi origosta

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 + 1)^2} = \sqrt{f(x)}\,.$$

$x^2 + (x^2 + 1)^2 > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, joten funktio d on määritelty kaikilla muuttujan reaalilukuarvoilla.

Neliöjuurifunktio on aidosti kasvava, joten etäisyys d saa pienimmän arvonsa, kun funktio f saa pienimmän arvonsa. Tutkitaan polynomifunktiota $f(x) = x^2 + (x^2 + 1)^2$, missä $x \in \mathbf{R}$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\big(x^2 + (x^2 + 1)^2\big) \\ &= 2x + 2(x^2 + 1) \cdot 2x \\ &= 2x(1 + 2x^2 + 2) \\ &= 2x(2x^2 + 3) \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x(2x^2 + 3) &= 0 \\ x = 0 \ \text{ tai } \ 2x^2 + 3 &= 0 \\ \underbrace{x^2}_{\geq 0} &= \underbrace{-\frac{3}{2}}_{<0} \end{aligned}$$

ei ratkaisua

Muodostetaan funktion f kulkukaavio.

	0	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$
	min	

x	$f'(x)$
-1	-10
1	$+10$

Etäisyys on pienin, kun $x = 0$.

Lasketaan paraabelin etäisyys origosta kohdassa 0.

$$d(0) = \sqrt{0^2 + (0^2 + 1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Paraabelin $y = x^2 + 1$ pisteen y-koordinaatti kohdassa $x = 0$ on

$$y = 0^2 + 1 = 1$$

Origon lyhyin etäisyys paraabelista on siis 1, ja se saavutetaan paraabelin pisteessä $(0,1)$.

b) Pythagoraan lauseen avulla saadaan paraabelin pisteen $(x, y) = (x, 1 - x^2)$ etäisyydeksi origosta

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2} = \sqrt{f(x)}\ .$$

$x^2 + (1 - x^2)^2 > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, joten funktio d on määritelty kaikilla muuttujan reaalilukuarvoilla.

Neliöjuurifunktio on aidosti kasvava, joten etäisyys d saa pienimmän arvonsa, kun funktio f saa pienimmän arvonsa.
Tutkitaan polynomifunktiota $f(x) = x^2 + (1 - x^2)^2$, missä $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}(x^2 + (1 - x^2)^2) \\
&= 2x + 2(1 - x^2) \cdot (-2x) \\
&= 2x(1 - 2(1 - x^2)) \\
&= 2x(1 - 2 + 2x^2) \\
&= 2x(2x^2 - 1)
\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
2x(2x^2 - 1) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x^2 - 1 &= 0 \\
x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0{,}7 \quad \text{tai} \quad x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7
\end{aligned}$$

Muodostetaan funktion f kulkukaavio.

		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		min		maks		min	

x	$f'(x)$
-1	-1
$-0,5$	$+0,3$
$0,5$	$-0,3$
1	$+1$

Etäisyys origosta on pienin kohdassa $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ tai kohdassa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lasketaan paraabelin etäisyys origosta kohdissa $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$
\begin{aligned}
f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) &= \sqrt{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (1-(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} + (1-\frac{1}{2})^2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87
\end{aligned}
$$

Paraabelin pisteen y -koordinaatti kohdissa $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ on

$$
y = 1-(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1-\frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}.
$$

Origon lyhyin etäisyys paraabelista on siis $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ja se saavutetaan paraabelin pisteissä $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$ ja $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$.

Vastaus

a) lyhyin etäisyys 1, lähinnä on piste (0,1)

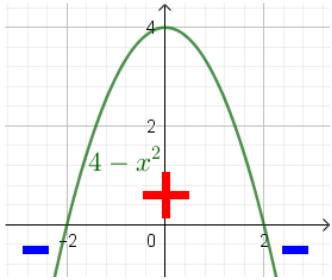
b) lyhyin etäisyys $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

lähinnä ovat pisteet $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$ ja $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$

K17

a) Epäyhtälö on määritelty, kun juurrettava $4-x^2$ on epänegatiivinen. Ratkaistaan määrittelyehto ratkaisemalla nollakohdat ja hahmottelemalla kuvaaja.

$$
\begin{aligned}
4-x^2 &= 0 \\
-x^2 &= -4 \quad \big| :(-1) \\
x^2 &= 4 \\
x &= \pm\sqrt{4} = \pm 2
\end{aligned}
$$



Saadaan määrittelyehto

$$-2 \le x \le 2$$

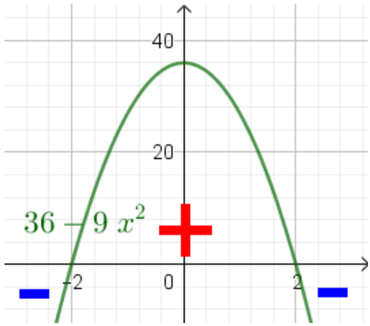
Epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten voidaan korottaa puolittain potenssiin 2.

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{\ge 0} &\le \underbrace{3}_{\ge 0} \qquad \big| (\ )^2 \\
(\sqrt{4-x^2})^2 &\le 3^2 \\
4-x^2 &\le 9 \\
-x^2 &\le 5 \qquad \big| :(-1)\ (<0) \\
\underbrace{x^2}_{\ge 0} &\ge \underbrace{-5}_{<0}
\end{aligned}
$$

Koska $x^2 \ge 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin tämä epäyhtälö toteutuu aina. Ratkaisuksi saadaan siis epäyhtälön määrittelyehto $-2 \le x \le 2$.

b) Juurilauseke on määritelty, kun juurrettava $36-9x^2$ on epänegatiivinen. Ratkaistaan epäyhtälö $36-9x^2 \geq 0$ määrittämällä nollakohdat ja hahmottelemalla kuvaaja.

$$
\begin{aligned}
36-9x^2 &= 0 \\
-9x^2 &= -36 \\
x^2 &= 4 \\
x &= \pm\sqrt{4} = \pm 2
\end{aligned}
$$



Saadaan ehdoksi

$$-2 \leq x \leq 2$$

Koska epäyhtälön vasen puoli on epänegatiivinen, niin tällä epäyhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, jos epäyhtälön oikea puoli on epänegatiivinen.

$$
\begin{aligned}
3x+6 &\geq 0 \\
3x &\geq -6 \\
x &\geq -2
\end{aligned}
$$

Yhdistämällä saadut ehdot $-2 \leq x \leq 2$ ja $x \geq -2$, saadaan epäyhtälön määrittelyehdoksi $-2 \leq x \leq 2$.

Korotetaan epäyhtälö puolittain potenssiin 2.

$$\underbrace{\sqrt{36-9x^2}}_{\geq 0} \leq \underbrace{3x+6}_{\geq 0} \qquad \Big|\ (\ )^2$$

$$(\sqrt{36-9x^2})^2 \leq (3x+6)^2$$

$$36-9x^2 \leq (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 6 + 6^2$$

$$36-9x^2 \leq 9x^2 + 36x + 36$$

$$-18x^2 - 36x \leq 0 \qquad \Big|\ :(-18)$$

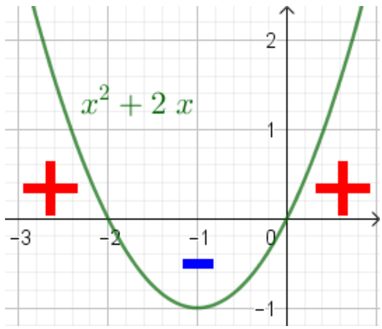
$$x^2 + 2x \geq 0$$

Ratkaistaan määrittämällä nollakohdat ja hahmottelemalla kuvaaja.

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = -2$$



Saadaan ratkaisuiksi

$$x \leq -2 \text{ tai } x \geq 0$$

Ratkaisuista määrittelyehdon $-2 \leq x \leq 2$ toteuttavat arvot

$$x = -2 \text{ tai } 0 \leq x \leq 2.$$

Vastaus

a) $-2 \leq x \leq 2$

b) $x = -2$ tai $0 \leq x \leq 2$

K18

a) Funktio f on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on $0{,}8$.
Koska kantaluku $0 < 0{,}8 < 1$, niin funktio f on aidosti vähenevä.

b) Funktio f on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 3.
Koska $3 > 1$, niin funktio f on aidosti kasvava.

c) Funktio f on logaritmifunktio, jonka kantaluku on 2.
Koska $2 > 1$, niin funktio f on aidosti kasvava.

d) Funktio f on logaritmifunktio, jonka kantaluku on $0{,}2$.
Koska $0 < 0{,}2 < 1$, niin funktio f on aidosti vähenevä.

Vastaus
a) aidosti vähenevä
b) aidosti kasvava
c) aidosti kasvava
d) aidosti vähenevä

K19

a) Funktio $2,5^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 2,5.
Koska 2,5 > 1, niin funktio $2,5^x$ on aidosti kasvava.

Täten koska 3 < 4, niin $2,5^3 < 2,5^4$.

b) Funktio $0,5^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 0,5.
Koska 0 < 0,5 < 1, niin funktio $0,5^x$ on aidosti vähenevä.

Täten koska 3 < 4, niin $0,5^3 > 0,5^4$.

c) Funktio $\log_{0,1} x$ on logaritmifunktio, jonka kantaluku on 0,1.
Koska 0 < 0,1 < 1, niin funktio $\log_{0,1} x$ on aidosti vähenevä.

Täten koska 4 < 5, niin $\log_{0,1} 4 > \log_{0,1} 5$.

d) Funktio $\log_6 x$ on logaritmifunktio, jonka kantaluku on 6.
Koska 6 > 1, niin funktio $\log_6 x$ aidosti kasvava funktio.

Täten koska 4 < 5, niin $\log_6 4 < \log_6 5$.

Vastaus a) $2,5^4$ b) $0,5^3$ c) $\log_{0,1} 4$ d) $\log_6 5$

K20

a) Funktio $f(x)=2^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 2. Koska $2>1$, niin funktio f on aidosti kasvava. Näin ollen funktio f saa suurimman arvonsa välin $[1,5]$ loppupisteessä $(x=5)$ ja pienimmän arvonsa alkupisteessä $(x=1)$.

Suurin arvo on $f(5)=2^5=32$.

Pienin arvo on $f(1)=2^1=2$.

b) Funktio $f(x)=0{,}1^x$ on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on 0,1. Koska $0<0{,}1<1$, niin funktio f on aidosti vähenevä. Näin ollen funktio f saa suurimman arvonsa välin $[1,5]$ alkupisteessä $(x=1)$ ja pienimmän arvonsa loppupisteessä $(x=5)$.

Suurin arvo on $f(1)=0{,}1^1=0{,}1$.

Pienin arvo on $f(5)=0{,}1^5=0{,}00001$.

Vastaus a) suurin arvo 32, pienin arvo 2

b) suurin arvo 0,1, pienin arvo 0,00001

K21

a) Koska $49 = 7^2$, niin $\log_7 49 = 2$.

b) Koska $7 = 7^1$, niin $\log_7 7 = 1$.

c) Koska $1 = 7^0$, niin $\log_7 1 = 0$.

d) Koska $\frac{1}{7} = 7^{-1}$, niin $\log_7 \frac{1}{7} = -1$.

e) Koska $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$, niin $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$.

f) Koska $7 = \sqrt{49} = 49^{\frac{1}{2}}$, niin $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$.

Vastaus	a) 2	b) 1	c) 0
	d) -1	e) $\frac{1}{2}$	f) $\frac{1}{2}$

K22

a) $4 = 2^2$

b) $4 = 16^{\log_{16} 4} = 16^{\frac{1}{2}}$

TAI $4 = \sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}}$

c) $4 = 8^{\log_8 4}$ Lasketaan $\log_8 4$ laskimella.

$= 8^{\frac{2}{3}}$

d) $4 = 5^{\log_5 4}$

Vastaus a) $4 = 2^2$ b) $4 = 16^{\frac{1}{2}}$

c) $4 = 8^{\frac{2}{3}}$ d) $4 = 5^{\log_5 4}$

K23

Muutetaan luvun kantaluvuksi ja sievennetään luku kymmenpotenssimuotoon.

$$
\begin{aligned}
18^{1872} &= (10^{\lg 18})^{1872} \\
&= 10^{1872\cdot\lg 18} \\
&= 10^{2349,8701\ldots} \\
&= 10^{2349+0,8701\ldots} \\
&= 10^{0,8701\ldots}\cdot 10^{2349} \\
&= 7,415\ldots\cdot 10^{2349}
\end{aligned}
$$

Luku $18^{1872} = 7,415\ldots\cdot 10^{2349}$ on kokonaisluku, jossa on numeron 7 jälkeen vielä 2349 numeroa. Luvussa on siis 2350 numeroa.

Vastaus 2350 numeroa

K24

a) Jos $\log_a 49 = 2$, niin logaritmin määritelmän nojalla $a^2 = 49$.

$$a^2 = 49$$
$$a = \sqrt{49} = 7 \quad \text{tai} \quad a = -\sqrt{49} = -7$$

Koska kantaluku $a > 0$, niin $a = 7$.

b) Jos $\log_a 64 = 3$, niin logaritmin määritelmän nojalla $a^3 = 64$.

$$a^3 = 64$$
$$a = \sqrt[3]{64} = 4$$

Kantaluku $a = 4$.

Vastaus a) $a = 7$ b) $a = 4$

K25

$f(x) = 4^x$ on määritelty kaikilla x.
$g(x) = \log_2 x$ on määritelty, kun $x > 0$.

a) $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\log_2 x) \\ &= 4^{\log_2 x} \\ &= (2^2)^{\log_2 x} = 2^{2\cdot\log_2 x} = 2^{\log_2 x^2} \\ &= x^2\end{aligned}$$

Funktion $f \circ g$ määrittelyehto on sama kuin funktion g määrittelyehto eli $x > 0$.

b) $$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(4^x) \\ &= \log_2 4^x \\ &= \log_2 (2^2)^x \\ &= \log_2 2^{2x} \\ &= 2x\end{aligned}$$

Koska sisäfunktio $f(x) > 0$ kaikilla x, niin $g \circ f$ on määritelty kaikilla x.

Vastaus a) $(f \circ g)(x) = x^2$, missä $x > 0$

b) $(g \circ f)(x) = 2x$

K26

a) $\log_5 30 - \log_5 6 = \log_5 \frac{30}{6} = \log_5 5 = 1$

b) $2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3 6^2 - \log_3 4 = \log_3 \frac{6^2}{4} = \log_3 9 = 2$

c) $$\begin{aligned}\log_4\left(\sqrt{20}+2\right)+\log_4\left(\sqrt{20}-2\right) &= \log_4\left(\left(\sqrt{20}+2\right)\left(\sqrt{20}-2\right)\right)\\ &= \log_4\left(\left(\sqrt{20}\right)^2-2^2\right)\\ &= \log_4\left(20-4\right)\\ &= \log_4 16\\ &= 2\end{aligned}$$

Vastaus a) 1 b) 2 c) 2

K27

Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}4\log_7 x - \log_7 2x^5 + \log_7 98x &= \log_7 x^4 - \log_7 2x^5 + \log_7 98x \\ &= \log_7 \frac{x^4}{2x^5} + \log_7 98x \\ &= \log_7 \frac{1}{2x} + \log_7 98x \\ &= \log_7 \left(\frac{1}{2x} \cdot 98x\right) \\ &= \log_7 \frac{98}{2} \\ &= \log_7 49 \\ &= 2\end{aligned}$$

Lausekkeen arvo on aina 2. On siis osoitettu, että lausekkeen arvo ei riipu muuttujan x arvosta. □

K28

a) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x-3>0$$
$$x>3$$

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_2(x-3)=4$$
$$x-3=2^4$$
$$x=16+3$$
$$x=19$$

Ratkaisu $x = 19$ toteuttaa määrittelyehdon.

b) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$4x - 2 > 0 \qquad \text{ja} \qquad x > 0$$

$$4x > 2 \quad \Big|: 4$$

$$x > \frac{1}{2}$$

Määrittelyehto on $x > \frac{1}{2}$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_3(4x-2) - \log_3 x = 0$$

$$\log_3(4x-2) = \log_3 x$$

$$4x - 2 = x$$

$$3x = 2 \qquad \Big|: 3$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Ratkaisu $x = \frac{2}{3}$ toteuttaa määrittelyehdon.

c) Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x+1>0 \qquad \text{ja} \qquad x+3>0 \qquad \text{ja} \qquad x>0$$
$$x>-1 \qquad\qquad\qquad x>-3$$

Määrittelyehto on $x > 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
2\log_9(x+1) &= \log_9(x+3) + \log_9 x \\
\log_9(x+1)^2 &= \log_9\left((x+3)\cdot x\right) \\
(x+1)^2 &= x(x+3) \\
x^2+2x+1 &= x^2+3x \\
-x &= -1 \qquad \big| \cdot(-1) \\
x &= 1
\end{aligned}$$

Ratkaisu $x = 1$ toteuttaa määrittelyehdon.

Vastaus a) $x = 19$ b) $x = \dfrac{2}{3}$ c) $x = 1$

K29

a)

$$4^x = 2^{x+1}$$

$$\left(2^2\right)^x = 2^{x+1}$$

$$2^{2x} = 2^{x+1}$$

$$2x = x + 1$$

$$x = 1$$

b)

$$4^{3x} = \frac{1}{32}$$

$$\left(2^2\right)^{3x} = \frac{1}{2^5}$$

$$2^{6x} = 2^{-5}$$

$$6x = -5 \qquad |: 6$$

$$x = -\frac{5}{6}$$

Vastaus a) $x = 1$ b) $x = -\frac{5}{6}$

K30

a)

$$
\begin{aligned}
5 \cdot 2^x &= 78 && \Big| :5 \\
2^x &= \frac{78}{5} \\
x &= \log_2 \frac{78}{5} \\
&= 3,96347... \\
&\approx 3,96
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
5,4 \cdot 1,4^x &= 108 && \Big| :5,4 \\
1,4^x &= 20 \\
x &= \log_{1,4} 20 \\
&= 8,90335... \\
&\approx 8,90
\end{aligned}
$$

Vastaus a) $x \approx 3{,}96$ b) $x \approx 8{,}90$

K31

a) Lasketaan pH-arvo.

$$\begin{aligned}\mathrm{pH} &= -\lg\left[\mathrm{H_3O^+}\right] \\ &= -\lg\left(3,2\cdot 10^{-3}\right) \\ &= 2,4948... \\ &\approx 2,5\end{aligned}$$

b) Appelsiinimehun oksoniumionin konsentraatio on siis $10\cdot 3,2\cdot 10^{-3} = 3,2\cdot 10^{-2}$ mol/l.

Lasketaan pH-arvo.

$$\begin{aligned}\mathrm{pH} &= -\lg\left[\mathrm{H_3O^+}\right] \\ &= -\lg\left(3,2\cdot 10^{-2}\right) \\ &= 1,4559... \\ &\approx 1,5\end{aligned}$$

c) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan $[H_3O^+]$.

$$pH = -\lg[H_3O^+]$$

$$5,5 = -\lg[H_3O^+]$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

$$\begin{aligned}
\lg[H_3O^+] &= -5,5 \\
\log_{10}[H_3O^+] &= -5,5 \\
[H_3O^+] &= 10^{-5,5} \\
&= 3,1622... \cdot 10^{-6} \\
&\approx 3,2 \cdot 10^{-6} \quad \text{(mol/l)}
\end{aligned}$$

Vastaus a) 2,5 b) 1,5 c) $3,2 \cdot 10^{-6}$ mol/l

K32

Väkiluku kasvaa vuodessa 2,5 % eli väkiluku tulee t vuodessa $1,025^t$ -kertaiseksi. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kuinka monen vuoden kuluttua väkiluku on 1 000 000.

$$
\begin{aligned}
40000 \cdot 1,025^t &= 1000000 \qquad \qquad \Big| : 40000 \\
1,025^t &= 25 \\
t &= \log_{1,025} 25 \\
&= 130,3578\ldots \text{ (vuotta)}
\end{aligned}
$$

Asukasmäärä ylittäisi miljoonan vuonna
1878 + 130,3578... = 2008,3578... . Mallin mukaan Helsingissä olisi 1 miljoonan asukasta vuoden 2008 aikana.

Vastaus vuonna 2008

K33

a) Merkitään I-131:n alkuperäistä määrää kirjaimella m.
8,02 vuorokauden kuluttua määrästä on jäljellä puolet eli $0,5m$.

Merkitään kirjaimella q kerrointa, joka ilmaisee I-131:n jäljellä olevan osuuden yhden vuorokauden kuluttua. 8,02 vuorokauden kuluttua isotoopin määrä on $q^{8,02}$ -kertainen.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kerroin q.

$$
\begin{aligned}
q^{8,02} \cdot m &= 0,5m \qquad \Big| : m \quad (\neq 0) \\
q^{8,02} &= 0,5 \\
q &= 0,917202...
\end{aligned}
$$

Yhden vuorokauden kuluttua I-131:n määrä on noin 0,917-kertainen, joten määrästä on jäljellä 91,7 %.

b) Kahden viikon eli 14 vuorokauden kuluttu I-131:n määrä on

$$
\begin{aligned}
0,9172^{14} \cdot m &= 0,2981... \cdot m \\
&\approx 0,298m.
\end{aligned}
$$

Alkuperäisestä määrästä jäljellä on siis 29,8 %.

c) Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, kuinka monen vuorokauden kuluttua määrästä on jäljellä alle $\frac{1}{10}$.

$$0{,}9172^t \cdot m < \frac{1}{10} \cdot m \qquad \left|: m \ (>0)\right.$$

$$0{,}9172^t < 0{,}1 \qquad \text{Ratkaistaan laskimella.}$$

$$t > 26{,}5411\ldots$$

I-131:n määrä on vähentynyt turvalliselle tasolle, kun aikaa on on kulunut vähintään 27 vuorokautta.

Vastaus a) 91,7 % b) 29,8 % c) 27 vuorokauden

K34

Luku $2\lg x$ on määritelty, kun $x > 0$.

Lukujono voi olla aritmeettinen, jos kahden peräkkäisen jäsenen erotus on aina yhtä suuri. Muodostetaan yhtälö.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$
$$2\lg x - \lg 2 = \lg 8 - 2\lg x$$
$$\lg x^2 - \lg 2 = \lg 8 - \lg x^2$$
$$\lg \frac{x^2}{2} = \lg \frac{8}{x^2}$$
$$\frac{x^2}{2} = \frac{8}{x^2} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$
$$x^4 = 16$$
$$x = \sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt[4]{16} = -2$$

Ratkaisuista vain $x = 2$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

Vastaus Luvut voivat olla aritmeettisen lukujonon kolme peräkkäistä jäsentä, kun $x = 2$.

K35

a) Ratkaistaan epäyhtälö.

$$
\begin{aligned}
4 \cdot 2^x &< 100 && \big| :4 \\
2^x &< 25 && \text{Funktio } \lg x \text{ on aidosti kasvava.} \\
\lg 2^x &< \lg 25 \\
x \cdot \lg 2 &< \lg 25 && \big| :\lg 2 \ (>0) \\
x &< \frac{\lg 25}{\lg 2} \\
x &< 4{,}6438\ldots
\end{aligned}
$$

Suurin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön on 4.

b) Ratkaistaan epäyhtälö.

$$
\begin{aligned}
0{,}8^{x+1} &\geq 3 && \text{Funktio } \lg x \text{ on aidosti kasvava} \\
\lg 0{,}8^{x+1} &\geq \lg 3 \\
(x+1) \cdot \lg 0{,}8 &\geq \lg 3 && \big| :\lg 0{,}8 \ (<0) \\
x+1 &\leq \frac{\lg 3}{\lg 0{,}8} \\
x &\leq \frac{\lg 3}{\lg 0{,}8} - 1 \\
x &\leq -5{,}9233\ldots
\end{aligned}
$$

Suurin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön on -6.

Vastaus a) 4 b) -6

K36

Jos lukujono $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ on aritmeettinen jono, niin sen kahden peräkkäisen jäsenen erotus on vakio d. Toisin sanoen $a_n - a_{n-1} = d$.

Lasketaan jonon $\mathrm{e}^{a_1}, \mathrm{e}^{a_2}, \mathrm{e}^{a_3}, \ldots$ kahden peräkkäisen termin suhde.

$$\frac{\mathrm{e}^{a_n}}{\mathrm{e}^{a_{n-1}}} = \mathrm{e}^{a_n - a_{n-1}} \qquad a_n - a_{n-1} = d$$

$$= \mathrm{e}^{d}$$

Koska lukujonon $\mathrm{e}^{a_1}, \mathrm{e}^{a_2}, \mathrm{e}^{a_3}, \ldots$ kahden peräkkäisen termin suhde on vakio e^{d}, niin lukujono on geometrinen. □

K37

Sievennetään alkuperäistä yhtälöä.

$$3+6\log a = 3\log b + \log c$$
$$3+6\lg a = 3\lg b + \lg c$$
$$3+\lg a^6 = \lg b^3 + \lg c$$
$$3+\lg a^6 = \lg(b^3 c)$$
$$3 = \lg(b^3 c) - \lg a^6$$
$$3 = \lg\frac{b^3 c}{a^6}$$
$$3 = \log_{10}\frac{b^3 c}{a^6}$$ Logaritmin määritelmä.

$$\frac{b^3 c}{a^6} = 10^3 \qquad \Big| \cdot a^6$$
$$b^3 c = 10^3 \cdot a^6 \qquad \Big| \sqrt[3]{} \qquad \sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$
$$b\sqrt[3]{c} = 10a^2$$
$$10a^2 = b\sqrt[3]{c}$$

On osoitettu, että luvut a, b ja c toteuttavat yhtälön $10a^2 = b\sqrt[3]{c}$. □

K38

a)

$$\begin{aligned} D(3e^x + e^{-x^4}) &= 3e^x + e^{-x^4} \cdot (-4x^3) \\ &= 3e^x - 4x^3 e^{-x^4} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} D(e^{3x} + \frac{1}{e^{5x}}) &= D(e^{3x} + e^{-5x}) \\ &= e^{3x} \cdot 3 + e^{-5x} \cdot (-5) \\ &= 3e^{3x} - \frac{5}{e^{5x}} \end{aligned}$$

Vastaus a) $3e^x - 4x^3 e^{-x^4}$

b) $3e^{3x} - \dfrac{5}{e^{5x}}$

K39

a) $D9^x = 9^x \cdot \ln 9$

b)

$$D\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\frac{1}{3}$$

$$= -\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 3$$

c)

$$D5^{-3x} = 5^{-3x} \ln 5 \cdot (-3)$$

$$= -3 \cdot 5^{-3x} \ln 5$$

Vastaus
a) $9^x \cdot \ln 9$
b) $-\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 3$
c) $-3 \cdot 5^{-3x} \ln 5$

K40

a)

$$\mathrm{D}e^{\sqrt{x}}\sqrt{x} = \left(e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot \sqrt{x} + e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}$$

b)

$$\mathrm{D}\frac{7^x}{x^7} = \frac{(7^x \ln 7) \cdot x^7 - 7^x \cdot 7x^6}{(x^7)^2}$$

$$= \frac{7^x x^6 (x \ln 7 - 7)}{x^{14}}$$

$$= \frac{7^x (x \ln 7 - 7)}{x^8}$$

Vastaus

a) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}$

b) $\dfrac{7^x (x \ln 7 - 7)}{x^8}$

K41

a)

$$\begin{aligned} e^{2x} - 5 &= 0 \\ e^{2x} &= 5 \\ 2x &= \ln 5 \quad |:2 \\ x &= \frac{\ln 5}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2e^{6x} - e^{3x} &= 0 \\ 2(e^{3x})^2 - e^{3x} &= 0 \\ e^{3x}(2e^{3x} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$e^{3x} = 0$ tai $2e^{3x} - 1 = 0$

ei ratkaisua

$$\begin{aligned} 2e^{3x} &= 1 \\ e^{3x} &= \frac{1}{2} \\ 3x &= \ln \frac{1}{2} \\ x &= \frac{\ln \frac{1}{2}}{3} = -\frac{\ln 2}{3} \end{aligned}$$

Vastaus a) $x = \frac{\ln 5}{2}$

b) $x = -\frac{\ln 2}{3}$

K42

a) Yhtälö on määritelty, kun $x > 0$. Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 2\ln x - 1 &= 0 \\ 2\ln x &= 1 \\ \ln x &= \frac{1}{2} \\ x &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

b) Yhtälö on määritelty, kun $x > 0$. Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 4\ln x - \ln x^2 &= 8 \\ 4\ln x - 2\ln x &= 8 \\ 2\ln x &= 8 \\ \ln x &= 4 \\ x &= \mathrm{e}^4 \end{aligned}$$

Vastaus a) $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$

b) $x = \mathrm{e}^4$

K43

a) Määrittelyehto $x > 0$.

$$\begin{aligned} D(5\ln x - \ln 5x) &= 5 \cdot \frac{1}{x} - \frac{5}{5x} \\ &= \frac{5}{x} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{4}{x} \end{aligned}$$

b) Määrittelyehto $x > 0$.

$$\begin{aligned} D(\ln x^3 + \ln \frac{3}{x}) &= D(3\ln x + \ln 3 - \ln x) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{x} + 0 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Vastaus a) $\frac{4}{x}$, kun $x > 0$

b) $\frac{2}{x}$, kun $x > 0$

K44

a) Määrittelyehto on $x > 0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\sqrt{x}\ln x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\\ &= \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\\ &= \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

b) Määrittelyehto on $x > 0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\frac{\ln 4x}{x^4} &= \frac{\frac{4}{4x}\cdot x^4 - \ln 4x \cdot 4x^3}{(x^4)^2}\\ &= \frac{x^3 - 4x^3\ln 4x}{x^8}\\ &= \frac{x^3(1-4\ln 4x)}{x^8}\\ &= \frac{1-4\ln 4x}{x^5}\end{aligned}$$

Vastaus a) $\dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$, kun $x > 0$

b) $\dfrac{1-4\ln 4x}{x^5}$, kun $x > 0$

K45

a) Määrittelyehto on $x > 0$.

$$\mathrm{D}\log_3 x = \frac{1}{x\ln 3}$$

b) Määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$\mathrm{D}\log_5 x^2 = \frac{2x}{x^2\ln 5} = \frac{2}{x\ln 5}$$

c) Määritelty kaikilla x:n arvoilla.

$$\mathrm{D}\lg(x^2+5) = \frac{2x}{(x^2+5)\ln 10}$$

Vastaus

a) $\frac{1}{x\ln 3}$, kun $x > 0$

b) $\frac{2}{x\ln 5}$, kun $x \neq 0$

c) $\frac{2x}{(x^2+5)\ln 10}$

K46

Funktio $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$ on määritelty kaikkialla.
Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-x}(-1)$$
$$= \mathrm{e}^{-x}(2x - x^2)$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\mathrm{e}^{-x}(2x - x^2) = 0$$
$x = 0$ tai $x = 2$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Selvitetään derivaattafunktion merkki testaamalla.

	0	2	
$f'(x)$	–	+	–
$f(x)$	↘	↗	↘

x	$f'(x)$	merkki
-1	$-3\mathrm{e}^{-3}$	$-$
1	e	+
3	$-3\mathrm{e}^{3}$	$-$

Funktion f minimikohta on $x = 0$ ja minimiarvo on $f(0) = 0$, maksimikohta on $x = 2$ ja maksimiarvo $f(2) = 4\mathrm{e}^{-2}$.

Vastaus minimiarvo on $f(0) = 0$, maksimiarvo $f(2) = 4\mathrm{e}^{-2}$.

K47

Funktio $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x^2}$ on määritelty, kun $x \neq 0$.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

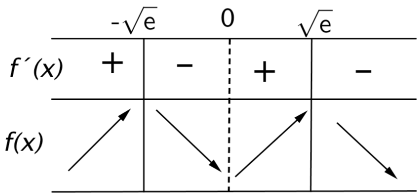
$$f'(x)=\frac{-2x\ln x^2+2x}{x^4}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{-2x\ln x^2+2x}{x^4}=0$$

$x=\sqrt{\mathrm{e}}$ tai $x=-\sqrt{\mathrm{e}}$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktiota ei ole määritelty kohdassa 0. Derivaattafunktion merkki voi vaihtua nollakohdissa tai kohdassa, jossa derivaattafunktiota ei ole määritelty. Selvitetään derivaattafunktion merkki testaamalla.



x	$f'(x)$	merkki
–3	0,088…	+
–1	–2	–
1	2	+
3	–0,088…	–

Kulkukaavion perusteella funktio on kasvava välillä $x \leq -\sqrt{\mathrm{e}}$ ja välillä $0 < x \leq \sqrt{\mathrm{e}}$.

Vastaus välillä $x \leq -\sqrt{\mathrm{e}}$ ja $0 < x \leq \sqrt{\mathrm{e}}$

K48

Funktio $g(x)=\ln(x^2+1)-x^2+x$ on määritelty välillä [–2,2].

Funktio g saa suljetulla välillä [–2, 2] suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille]–2, 2[kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Määritetään funktion g derivaattafunktio.

$$g'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-2x+1$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{2x}{x^2+1}-2x+1=0$$
$$x=1$$

Derivaatan nollakohta $x = 1$ kuuluu välille $x > 0$.

Lasketaan funktion g arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$g(-2)=\ln 5-6=-4,390...$$
$$g(-2)= \quad g(2)=\ln 5-2=-0,390...$$
$$g(1)=\ln 2=0,693...$$

Funktion g pienin arvo on $g(-2)=\ln 5-6$ ja suurin arvo on $g(1)=\ln 2$.

Vastaus suurin arvo $\ln 2$, pienin arvo $\ln 5-6$

K49

Funktio $f(x) = x \cdot 10^{-x}$ on määritelty kaikkialla.
Määritetään funktion f derivaattafunktio.

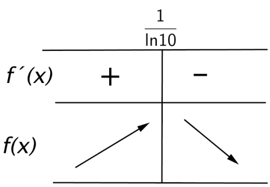
$$f'(x) = 10^{-x} - x \cdot 10^{-x} \ln 10$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$10^{-x} - x \cdot 10^{-x} \ln 10 = 0$$

$$x = \frac{1}{\ln 10} = 0,434...$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Selvitetään derivaattafunktion merkki testaamalla.



x	$f\,'(x)$	merkki
0	1	–
1	–1,302…	+

Funktiolla f ei ole minimikohtia, joten sillä ei ole pienintä arvoa.

Funktio f saa suurimman arvonsa maksimikohdassa $x = \frac{1}{\ln 10}$.

Funktion suurin arvo on

$$f\left(\frac{1}{\ln 10}\right) = \frac{1}{\ln 10} \cdot 10^{-\frac{1}{\ln 10}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{\ln 10}} \cdot \ln 10}$$

Vastaus suurin arvo $f(\frac{1}{\ln 10}) = \frac{1}{\ln 10} \cdot 10^{-\frac{1}{\ln 10}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{\ln 10}} \cdot \ln 10}$,

ei pienintä arvoa

K50

a) Funktio $f(t)=\dfrac{1200}{1+599\mathrm{e}^{-0{,}2t}}$ on määritelty, kun $t\geq 0$.

Populaation kasvunopeuden määrittää funktion f derivaattafunktio.

Määritetään funktion f derivaattafunktio.

$$f'(t)=143760\frac{\mathrm{e}^{-0{,}2t}}{(1+599\mathrm{e}^{-0{,}2t}+1)^2}$$

Populaation kasvunopeuden muutosnopeuden ilmaisee funktion f toinen derivaatta.

Määritetään funktion f toinen derivaattafunktio f''.

$$f''(t)=-28752\cdot\frac{\mathrm{e}^{-0{,}2x}}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}2x})^2}+34444896\cdot\frac{(\mathrm{e}^{-0{,}2x})^2}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}2x})^3}$$

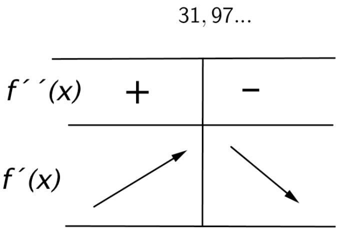
Kasvunopeus pienenee, kun $f''(t)<0$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-28752\cdot\frac{\mathrm{e}^{-0{,}2t}}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}2t})^2}+34444896\cdot\frac{(\mathrm{e}^{-0{,}2t})^2}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}2t})^3}=0$$

$$t=5\ln 599=31{,}97...$$

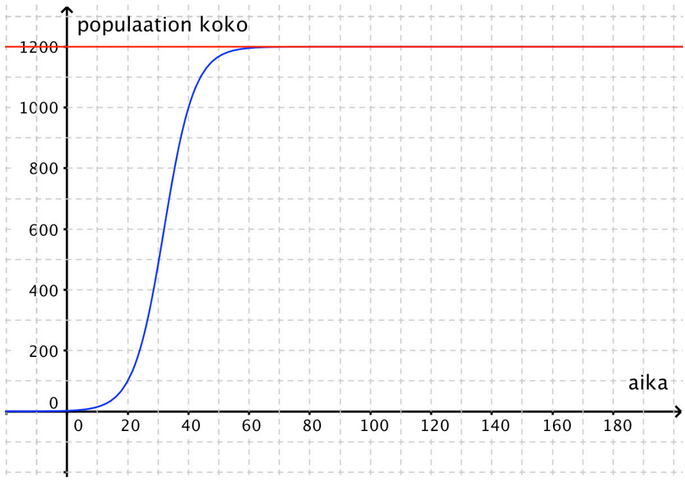
Laaditaan funktion $f\,'$ kulkukaavio. Toinen derivaattafunktio on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Selvitetään toisen derivaattafunktion merkki testaamalla.



x	$f\,''(x)$	merkki
0	0,0796	+
1	–4,4496…	–

Kasvunopeus alkaa pienentyä 32 vuoden jälkeen.

b) Piirretään funktion f kuvaaja.



Suurin eläinmäärä on noin 1200 yksilöä.

Vastaus a) 32 vuoden jälkeen
b) 1200 yksilöä

M1

a) $\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}} \neq 7^{\frac{3}{5}}$

b) $\sqrt[5]{7^3} = 7^{\frac{3}{5}}$

c) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^5 = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 7^{\frac{1}{3}\cdot 5} = 7^{\frac{5}{3}} \neq 7^{\frac{3}{5}}$

Vastaus b

M2

a) $-\sqrt{3} = -\sqrt[2]{3} = -3^{\frac{1}{2}} \neq 3^{-\frac{1}{2}}$

b) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt[2]{3}} = -\dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = -3^{-\frac{1}{2}} \neq 3^{-\frac{1}{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt[2]{3}}{3} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{3} = 3^{\frac{1}{2}-1} = 3^{-\frac{1}{2}}$

Vastaus c

M3

Vaihtoehto b on oikein, sillä

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[2]{2^3}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}.$$

Lukua $\sqrt[3]{16}$ voidaan sieventää kuitenkin edelleen, eli myös vaihtoehto a on oikein.

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

Vastaus a, b

M4

Vaihtoehto c ei voi olla oikein, sillä kuvan perusteella $f\left(0\right)=1,$
mutta c -kohdan funktion mukaan $f(0)=\sqrt[3]{0-1}=\sqrt[3]{-1}=-1.$

Vaihtoehto a ei myöskään voi olla oikein, sillä kuvan perusteella

$f\left(2\right)=-1,$ mutta a -kohdan funktion mukaan
$f(2)=1-\sqrt[3]{2}\approx -0,26.$

Vaihtoehto b näyttää kuvan perusteella pätevältä.

Vastaus b

M5

Selvitetään funktion f määrittelyehto.

$$\begin{aligned} 2 - x &\geq 0 \qquad \text{ja} \qquad & x - 2 &> 0 \\ x &\leq 2 & x &> 2 \end{aligned}$$

Siis funktio ei ole määritelty millään x:n arvolla.

Vastaus c

M6

Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$$x \geq 0 \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned} x + 1 &> 0 \\ x &> -1 \end{aligned}$$

Määrittelyehto on $x \geq 0$, siis ainakaan vaihtoehto a ei kelpaa.

Vaihtoehto b ei kelpaa, sillä

$$\left(\sqrt{0} - 1\right) \cdot \sqrt{0 + 1} = (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Vaihtoehto c:n ratkaisu on oikein, sillä

$$\left(\sqrt{1} - 1\right) \cdot \sqrt{1 + 1} = 0 \cdot \sqrt{2} = 0.$$

Vastaus c

M7

Selvitetään yhtälön $\sqrt{x} = 2 - x$ määrittelyehdot. Yhtälön vasen puoli on epänegatiivinen, joten myös oikean puolen on oltava epänegatiivinen.

$$x \geq 0 \qquad \text{ja} \qquad 2 - x \geq 0$$
$$x \leq 2$$

Kun ehdot yhdistetään, saadaan $0 \leq x \leq 2$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0} = \underbrace{2 - x}_{\geq 0} \qquad \left|\left(\ \right)^2\right.$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (2 - x)^2$$

$$x = 4 - 4x + x^2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Ratkaisuista vain $x = 1$ toteuttaa määrittelyehdon $0 \leq x \leq 2$.

Ratkaisu $x = 4$ toteuttaa a- ja b -kohdan yhtälöt, joten niillä on eri ratkaisut kuin yhtälöllä $\sqrt{x} = 2 - x$.

Sen sijaan c -kohdan yhtälön $x - 1 = 0$ ainoa ratkaisu on $x = 1$, eli sen ratkaisut ovat samat kuin annetulla yhtälöllä.

Vastaus c

M8

Eksponentti $\frac{3}{5}$ ei ole kokonaisluku, joten funktio on määritelty vain, kun kantaluku on positiivinen.

$$\begin{aligned} 7 + x &> 0 \\ x &> -7 \end{aligned}$$

Funktion määrittelyjoukko on siis $\left]-7,\ \infty\right[$.

Vastaus c

M9

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}\frac{8}{\sqrt{x}} \\
&= \mathrm{D}\ 8x^{-\frac{1}{2}} \\
&= 8\cdot \mathrm{D}\ x^{-\frac{1}{2}} \\
&= 8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}} \\
&= -4\cdot x^{-\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{4}{x^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{x^3}}
\end{aligned}
$$

Vastaus a

M10

Koska $3+x^2 \geq 0$ kaikilla x:n arvoilla, eli funktio on kaikkialla määritelty, on funktio kaikkialla jatkuva.

Funktio ei ole aidosti kasvava, sillä jos se olisi, täytyisi esimerkiksi päteä $f(-1) < f(1)$, koska $-1 < 1$, mutta näin ei ole, sillä $f(-1) = f(1)$.

Funktio f on neliöjuurifunktion ja polynomin yhdistettynä funktiona derivoituva kaikkialla, missä juurrettava on positiivinen. Siis f on derivoituva koko reaalilukujen joukossa eli f on derivoituva kaikkialla

Vastaus a, c

M11

Eksponenttifunktio $f(x)=a^x$ on aidosti kasvava, kun kantaluku $a>1$.

a) Funktion $f(x)=0,7^x$ kantaluku $0,7<1$. Funktio ei ole aidosti kasvava.

b) Funktion $f(x)=1,3^x$ kantaluku $1,3>1$. Funktio on aidosti kasvava.

c) Funktion $f(x)=3,1^x$ kantaluku $3,1>1$. Funktio on aidosti kasvava.

Vastaus b, c

M12

Eksponenttifunktio $f(x) = a^x$ on aidosti kasvava, kun $a > 1$ ja aidosti vähenevä, kun $0 < a < 1$.

Koska $2 < 3$, mutta $f(2) > f(3)$, on kyseinen eksponenttifunktio aidosti vähenevä. Siis $0 < a < 1$.

Vastaus a

M13

Koska $2^5 = 32$, niin $\log_2 32 = 5$.

Vastaus b

M14

Logaritmi on määritelty vain positiivisille luvuille, joten määrittelyehto on

$$x - 5 > 0$$
$$x > 5.$$

Vastaus c

M15

Sievennetään logaritmilauseke.

$$
\begin{aligned}
&3\log_2 a - \log_2 b \\
&= \log_2 a^3 - \log_2 b \\
&= \log_2 \frac{a^3}{b}
\end{aligned}
$$

Vastaus b

M16

Logaritmin kantaluvun vaihtaminen tehtiin kaavalla

$$\log_a x = \frac{\log_k x}{\log_k a}.$$

Nyt jokainen vastausvaihtoehto on oikein, sillä kaavan mukaan ne kaikki ovat sama lauseke kuin alkuperäinen logaritmi.

$$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3}$$

$$\log_3 4 = \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} = \frac{\lg 4}{\lg 3}$$

$$\log_3 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 3} = \frac{1}{\log_4 3}$$

Vastaus a, b, c

M17

Yhtälön määrittelyehto on $x > 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\log_3 x = 2$$
$$x = 3^2$$
$$x = 9$$

Vastaus c

M18

Selvitetään yhtälön määrittelyehto.

$x > 0,$ $\qquad x - 3 > 0 \qquad$ ja $\qquad 2x > 0$

$\qquad\qquad x > 3 \qquad\qquad x > 0$

Yhtälön määrittelyehto on $x > 3$.

Määrittelyehto sulkee jo vastausvaihtoehdot a ja c pois, sillä $x = 0$ ei toteuta yhtälön määrittelyehtoa.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
\lg x + \lg\left(x - 3\right) &= \lg 2x \\
\lg\left(x(x - 3)\right) &= \lg 2x \\
x(x - 3) &= 2x \\
x^2 - 3x &= 2x \\
x^2 - 5x &= 0 \\
x(x - 5) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{tai} \quad x &= 5
\end{aligned}$$

Ratkaisuista vain $x = 5$ toteuttaa määrittelyehdon.

Vastaus b

M19

Ratkaistaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 3^x &= 8 \qquad \Big|: 2 \\
3^x &= 4 \\
x &= \log_3 4
\end{aligned}
$$

Vastaus c

M20

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$
\begin{aligned}
0,8^n &> 0,5 \\
\lg 0,8^n &> \lg 0,5 \\
n \cdot \lg 0,8 &> \lg 0,5 && \Big| : \lg 0,8 \ (< 0) \\
n &< \frac{\lg 0,5}{\lg 0,8} \\
n &< 3,10638...
\end{aligned}
$$

Suurin kokonaisluku, joka on pienempi kuin $3,10638...$ on 3.

Vastaus b

M21

Jos mopoauton arvo laskee vuodessa $20\ \%$, sen arvo vuoden kuluttua on $0,8$ -kertainen. Jos sen arvo nyt on a euroa, sen arvon x vuoden kuluttua ilmaisee funktio

$$f(x) = a \cdot 0,8^x.$$

Vastaus a

M22

Ratkaistaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2x} &= 6 \\
2x &= \log_{\mathrm{e}} 6 \\
2x &= \ln 6 \qquad \Big|:2 \\
x &= \frac{\ln 6}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln 6 = \ln 6^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

Vastaus c

M23

Yhtälön määrittelyehto on $x > 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} \ln x &= 10 \\ \log_e x &= 10 \\ x &= e^{10} \end{aligned}$$

Vastaus b

M24

$$\mathrm{D}\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{D}\ \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x} \cdot \left(-2\right) = -2\mathrm{e}^{-2x} = -\frac{2}{\mathrm{e}^{2x}}$$

Vastaus c

M25

$D\ 12^x = 12^x \ln 12$

Vastaus b

M26

$$\mathrm{D}\ \ln(3x+1) = \frac{1}{3x+1} \cdot 3 = \frac{3}{3x+1}$$

Vastaus b

M27

$$\mathrm{D}\ \log_2 x^4 = \mathrm{D}\ 4\log_2 x = 4\cdot\frac{1}{x\ln 2} = \frac{4}{x\ln 2}$$

Vastaus a

M28

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \mathrm{e}^{-3x} + x^3 \cdot \left(\mathrm{e}^{-3x} \cdot (-3)\right)$$
$$= 3x^2\mathrm{e}^{-3x} - 3x^3\mathrm{e}^{-3x}$$
$$= 3x^2\mathrm{e}^{-3x}(1-x)$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 \cdot \mathrm{e}^{-3x}(1-x) = 0$$
$$3x^2 = 0 \qquad \text{tai} \qquad 1 - x = 0 \qquad \left(e^{-3x} > 0\right)$$
$$x = 0 \qquad\qquad\qquad x = 1$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio f' on kaikkialla jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa 0 ja 1. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

x	$f'(x)$	merkki
-1	$0,298...$	$+$
0,5	$0,083...$	$+$
2	$-0,029...$	$-$

		0		1	
$f'(x)$	+		+		-
$f(x)$	↗		↗		↘

Funktiolla on yksi ääriarvokohta, maksimikohta $x = 1$.

Vastaus a

M29

Funktion määrittelyehto on $x \neq 0$.

$$g'(x) = 2x \cdot \ln x^2 + x^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} \cdot 2x\right)$$
$$= 2x \ln x^2 + 2x$$
$$= 2x\left(\ln x^2 + 1\right)$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$2x\left(\ln x^2 + 1\right) = 0$$

$2x = 0$ tai $\ln x^2 + 1 = 0$

$x = 0$ $\qquad \ln x^2 = -1$

$$x^2 = \mathrm{e}^{-1}$$
$$x = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{-1}}$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

Koska derivaattafunktiota ei ole määritelty kohdassa $x = 0$, derivaatan nollakohtia ovat vain $x = \pm\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$. Derivaatalla on siis 2 nollakohtaa.

Vastaus b

M30

$$f'(x) = 5^{x^3-3x} \cdot \ln 5 \cdot (3x^2 - 3)$$
$$= (3x^2 - 3)5^{x^3-3x} \ln 5$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat. Koska $5^{x^3-3x} > 0$ ja $\ln 5 > 0$, tulon nollasäännön perusteella derivaatta on nolla, kun $3x^2 - 3$ on nolla.

$$3x^2 - 3 = 0$$
$$3x^2 = 3$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio f' on kaikkialla jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdissa -1 ja 1. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

x	$f'(x)$	merkki
-2	$0,579...$	$+$
0	$-4,828...$	$-$
2	$362,1...$	$+$

	-1		1	
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Funktio on siis kasvava, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 1$.

Vastaus a, c

A1

a)

$$\left(\sqrt{8}\right)^3=\left(\sqrt{2^3}\right)^3=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^3=2^{\frac{3}{2}\cdot 3}=2^{\frac{9}{2}}=2^{4+\frac{1}{2}}=2^4\cdot 2^{\frac{1}{2}}=16\sqrt{2}$$

b)

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}}=\frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{2}}}=5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{6}-\frac{3}{6}}=5^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5^{\frac{1}{6}}}=\frac{1}{\sqrt[6]{5}}$$

c)

$$\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\sqrt{2^{\frac{1}{3}}}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2}$$

Vastaus

a) $16\sqrt{2}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}}$ c) $\sqrt[6]{2}$

A2

a) Ilmaistaan funktion lauseke murtopotenssimuodossa.

$$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$$

Derivoidaan.

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x\neq 0$.

b) Ilmaistaan funktion lauseke murtopotenssimuodossa.

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=x^{-\frac{3}{2}}$$

Derivoidaan.

$$f'(x)=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{2+\frac{1}{2}}}=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x > 0$.

c) Ilmaistaan funktion lauseke murtopotenssimuodossa.

$$f(x)=\sqrt{3x-1}=(3x-1)^{\frac{1}{2}}$$

Derivoidaan.

$$f'(x)=\frac{1}{2}(3x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(3x-1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun

$$\begin{aligned} 3x-1&>0 \\ 3x&>1 \qquad \Big|:3\ (>0) \\ x&>\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vastaus

a) $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, kun $x\neq 0$

b) $f'(x)=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$, kun $x>0$

c) $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$, kun $x>\dfrac{1}{3}$

A3

TAPA 1: Ei selvitetä ehtoja, mutta tarkistetaan vastaus.

$$x + \sqrt{x+10} = 2$$
$$\sqrt{x+10} = 2 - x \quad \left|(\ )^2\right.$$
$$x + 10 = (2-x)^2$$
$$x + 10 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot(-x) + (-x)^2$$
$$x + 10 = 4 - 4x + x^2$$
$$0 = x^2 - 5x - 6$$
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$
$$x = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6 \ \text{ tai } \ x = \frac{5-7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Tarkistetaan.

$$x + \sqrt{x+10} = 2$$
$$6 + \sqrt{6+10} = 2$$
$$10 = 2$$
epätosi

$$x + \sqrt{x+10} = 2$$
$$-1 + \sqrt{-1+10} = 2$$
$$2 = 2$$
tosi

Yhtälön ratkaisu on $x = -1$.

TAPA 2: Selvitetään määrittelyehto ja neliöönkorotusehto.

$$x+\sqrt{x+10}=2$$
$$\sqrt{x+10}=2-x$$

Neliöjuuren määrittelyehto:

$$x+10\geq 0$$
$$x\geq -10$$

Yhtälön neliöönkorotusehto:

$$2-x\geq 0$$
$$2\geq x$$
$$x\leq 2$$

Siis tulee olla $-10\leq x\leq 2$.

$$\underbrace{\sqrt{x+10}}_{\geq 0}=\underbrace{2-x}_{\geq 0} \qquad |(\ )^2$$
$$x+10=4-4x+x^2$$
$$0=x^2-5x-6$$
$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{5\pm 7}{2}$$
$$x=6 \text{ tai } x=-1$$

Vain juuri $x=-1$ toteuttaa ehdon $-10\leq x\leq 2$.

Vastaus

$x=-1$

A4

a) $\log_4 16 = 2$, koska $4^2 = 16$.

b) $\lg 0{,}001 = \log_{10} 0{,}001 = -3$, koska $10^{-3} = 0{,}001$.

c) $\ln \sqrt{e} = \log_e \sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$, koska $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Vastaus

a) 2 b) –3 c) $\dfrac{1}{2}$

A5

a) Ratkaistaan yhtälö.

$$2^{3x} = \frac{1}{32}$$
$$2^{3x} = \frac{1}{2^5}$$
$$2^{3x} = 2^{-5}$$
$$3x = -5$$
$$x = -\frac{5}{3}$$

b) Ratkaistaan yhtälö.

$$5^{3x} - 8 = 0$$
$$5^{3x} = 8$$
$$3x = \log_5 8$$
$$x = \frac{\log_5 8}{3}$$
$$= \frac{\log_5 2^3}{3}$$
$$= \frac{\cancel{3}\log_5 2}{\cancel{3}}$$
$$= \log_5 2$$

c) Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} e^x - 25 &= 0 \\ e^x &= 25 \\ x &= \ln 25 \end{aligned}$$

Vastaus voidaan esittää myös muodossa

$$\begin{aligned} x &= \ln 25 \\ &= \ln 5^2 \\ &= 2\ln 5. \end{aligned}$$

Vastaus

a) $x = -\dfrac{5}{3}$ b) $x = \log_5 2$ c) $x = \ln 25$

A6

Selvitetään yhtälön $2\lg x = 1 + \lg(x+1)$ määrittelyehto.

$x > 0$ ja $\begin{aligned} x+1 &> 0 \\ x &> -1 \end{aligned}$

Molemmat ehdot toteutuvat, kun $x > 0$.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
2\lg x &= 1 + \lg(x+1) \\
2\lg x &= \lg 10 + \lg(x+1) \\
\lg x^2 &= \lg\bigl(10(x+1)\bigr) \\
x^2 &= 10(x+1)
\end{aligned}$$

$$x^2 - 10x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{140}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{35}}{2} = \frac{\cancel{2}(5 \pm \sqrt{35})}{\cancel{2}}$$

$$x = 5 + \sqrt{35} \approx 10{,}9 \quad \text{tai} \quad x = 5 - \sqrt{35} \approx -0{,}9$$

Vain juuri $x = 5 + \sqrt{35}$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

Vastaus

$x = 5 + \sqrt{35}$

A7

a) $D(x^2 e^x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2)e^x$

b) $D\dfrac{1}{6e^{x^2}} = D(\dfrac{1}{6} \cdot e^{-x^2}) = \dfrac{1}{\cancel{6}_{3}} \cdot e^{-x^2} \cdot (-\cancel{2}^{1} x) = -\dfrac{1}{3} x \cdot e^{-x^2} = -\dfrac{x}{3e^{x^2}}$

c) $D\,6^{x^2} = D\,(e^{\ln 6})^{x^2} = D\,e^{x^2 \cdot \ln 6} = e^{x^2 \cdot \ln 6} \cdot 2x \cdot \ln 6 = 6^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 6$

Vastaus

a) $(2x + x^2)e^x$ b) $-\dfrac{x}{3e^{x^2}}$ c) $6^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 6$

A8

a) Selvitetään funktion $\ln(3-x)$ määrittelyehto.

$$\begin{aligned} 3-x &> 0 \\ 3 &> x \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Derivoidaan.

$$\mathrm{D}\ln(3-x)=\frac{1}{3-x}\cdot(-1)=-\frac{1}{3-x}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x<3$.

b) Funktion $\ln\sqrt{3-x}$ on määritelty, kun $x<3$.

Derivoidaan.

$$\begin{aligned}
D\ln\sqrt{3-x} &= D\ln(3-x)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(3-x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}(3-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1) \\
&= \frac{-1}{2(3-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(3-x)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{-1}{2(3-x)^{1}} \\
&= -\frac{1}{6-2x}
\end{aligned}$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x<3$.

c) Funktion $\ln\sqrt[3]{3-x}$ on määritelty, kun $x<3$.

Derivoidaan.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\ln\sqrt[3]{3-x} &= \mathrm{D}\ln(3-x)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{(3-x)^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{3}(3-x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-1) \\
&= \frac{-1}{3(3-x)^{\frac{1}{3}}\cdot(3-x)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{-1}{3(3-x)^{1}} \\
&= -\frac{1}{9-3x}
\end{aligned}
$$

Derivaattafunktio on määritelty, kun $x<3$.

Vastaus

a) $-\dfrac{1}{3-x}$, kun $x<3$

b) $-\dfrac{1}{6-2x}$, kun $x<3$

c) $-\dfrac{1}{9-3x}$, kun $x<3$

A9

Funktio $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ on määritelty, kun $x>0$.

Derivoidaan.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot x^{\cancel{2}^{1}}-\ln x\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{\cancel{x}(1-2\ln x)}{x^{\cancel{4}^{3}}}=\frac{1-2\ln x}{x^3},\ \text{kun}\ x>0.$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\frac{1-2\ln x}{x^3}=0 \quad \Big|\cdot x^3 \ (>0)$$

$$1-2\ln x=0$$

$$-2\ln x=-1 \quad \Big|:(-2)$$

$$\ln x=\frac{1}{2}$$

$$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

Funktio f saa suljetulla välillä $[1, \mathrm{e}]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille $]1, \mathrm{e}[$ kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f(1) = \frac{\ln 1}{1^2} = 0 \qquad \text{pienin}$$

$$f(\mathrm{e}) = \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2} \approx 0{,}14$$

$$f(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}) = \frac{\ln \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^1} = \frac{1}{2\mathrm{e}} \approx 0{,}18 \qquad \text{suurin}$$

Vastaus

Suurin arvo on $\frac{1}{2\mathrm{e}}$ ja pienin arvo 0.

A10

Funktio $f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 2x$ on määritelty kaikilla x.

Derivoidaan.

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4e^{x} + 2$$

Sievennetään derivaattafunktion lauseketta.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} - 4e^{x} + 2 \\ &= 2\left(e^{2x} - 2e^{x} + 1\right) \\ &= 2\left(\left(e^{x}\right)^{2} + 2 \cdot e^{x} \cdot (-1) + (-1)^{2}\right) \\ &= 2(e^{x} - 1)^{2} \end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ e^{x} - 1 &= 0 \\ e^{x} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Siis $f'(x) = 0$ vain kohdassa $x = 0$. Muualla $f'(x) > 0$.

Funktio f on siten kaikkialla aidosti kasvava.

B1

Funktio $f(x)=\frac{x}{2}-5\sqrt{x}$ on määritelty, kun $x \geq 0$.

Määritetään derivaattafunktio.

$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2\sqrt{x}}$, kun $x > 0$. Derivoidaan laskimella.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

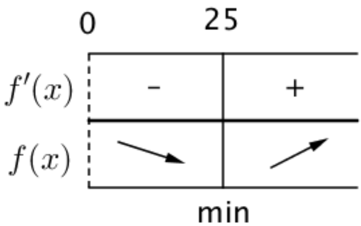
$$\frac{1}{2}-\frac{5}{2\sqrt{x}}=0$$

Ratkaistaan laskimella.

$$x=25$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio f' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

x	$f'(x)$	merkki
1	–2	–
100	0,25	+



Funktion pienin arvo on $f(25)=-12{,}5$.

Vastaus
–12,5

B2

Funktio $f(x) = xe^{-2x}$ on määritelty kaikilla x.

Määritetään derivaattafunktio.

$f'(x) = (1-2x)e^{-2x}$ Derivoidaan laskimella.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

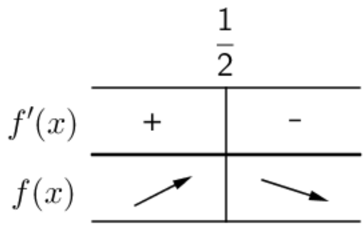
$$(1-2x)e^{-2x} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Ratkaistaan laskimella.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio f' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

x	$f'(x)$	merkki
0	1	+
1	–0,135...	–



Funktion f on kasvava välillä $x \leq \frac{1}{2}$ ja vähenevä välillä $x \geq \frac{1}{2}$.

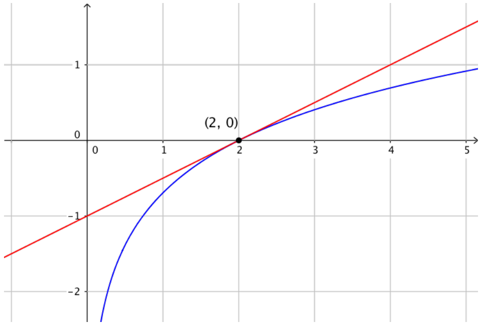
Vastaus

kasvava välillä $x \leq \frac{1}{2}$, vähenevä välillä $x \geq \frac{1}{2}$

B3

a) Funktion $f(x) = \ln \frac{x}{2}$ kuvaaja leikkaa x-akselin pisteessä $(2, 0)$, koska

$$f(2) = \ln \frac{2}{2} = \ln 1 = 0\,.$$



Tangentin kulmakerroin on derivaattafunktion arvo kohdassa $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Derivoidaan laskimella.

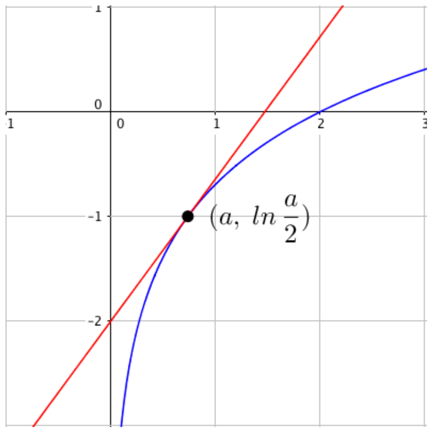
$$f'(2) = \frac{1}{2}$$

Määritetään tangentin yhtälö.

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

b) Funktion $f(x) = \ln \frac{x}{2}$ kuvaajalle piirretään tangentti pisteeseen $(a, \ln \frac{a}{2})$.



Tangentin kulmakerroin on derivaattafunktion arvo kohdassa $x = a$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(a) = \frac{1}{a}$$

Määritetään tangentin yhtälö.

$$y - \ln \frac{a}{2} = \frac{1}{a}(x - a)$$

Tangentti kulkee pisteen $(0, -2)$ kautta. Ratkaistaan a.

$$-2 - \ln \frac{a}{2} = \frac{1}{a}(0 - a)$$

$$a = \frac{2}{e}$$

Ratkaistaan laskimella.

Lasketaan sivuamispisteen $(a, \ln \frac{a}{2})$ koordinaatit.

$$a = \frac{2}{e}$$

$$\ln \frac{a}{2} = \ln \frac{\frac{2}{e}}{2} = \ln \frac{1}{e} = -1$$

Sivuamispiste on $(\frac{2}{e}, -1)$.

Vastaus

a) $y = \frac{1}{2}x - 1$

b) $(\frac{2}{e}, -1)$

B4

Tehtävänä on osoittaa, että

$$\sqrt{x-1} > \ln x$$
$$\sqrt{x-1} - \ln x > 0$$

kaikilla $x > 1$.

Tutkitaan funktion $f(x) = \sqrt{x-1} - \ln x$ kulkua.

Funktio f on määritelty ja jatkuva, kun $x \geq 1$.

Määritetään derivaattafunktio.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{x}$, kun $x > 1$. Derivoidaan laskimella.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

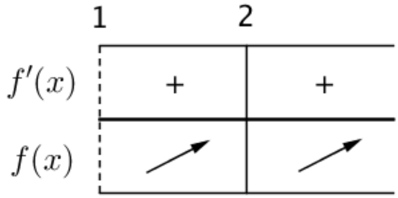
$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{x} = 0$$

Ratkaistaan laskimella.

$$x = 2$$

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio f' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

x	$f'(x)$	merkki
1,5	0,040...	+
3	0,020...	+



Koska funktio f on aidosti kasvava välillä $x > 1$ ja jatkuva välillä $x \geq 1$, niin funktion f pienin arvo on $f(1) = \sqrt{1-1} - \ln 1 = 0$.

Siten $f(x) = \sqrt{x-1} - \ln x > 0$ kaikilla $x > 1$.

Väite on näin todistettu.

B5

a) Vuonna 1990 norppia oli 190.
Vuonna 2015 norppia oli 320.
Aikaa kului 25 vuotta.

Merkitään vuotuista muutoskerrointa kirjaimella k.

$$k^{25} \cdot 190 = 320$$
$$k = 1{,}02107... \approx 1{,}021$$

Ratkaistaan laskimella.

Norppien lukumäärä kasvoi keskimäärin 2,1 % vuodessa.

b) Merkitään vuodesta 2015 kulunutta aikaa kirjaimella x.

$$(1{,}02107...)^{x} \cdot 320 > 400$$
$$x > 10{,}701...$$

Ratkaistaan laskimella.

Kanta ylittää 400 norpan rajan noin 11 vuoden kuluttua.

Vastaus
a) 2,1 % b) 11 vuoden kuluttua

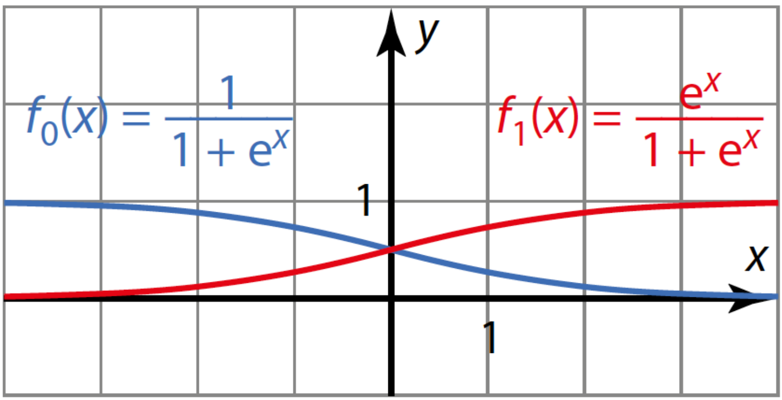
B6

a) $f_n(x) = \dfrac{e^{n\cdot x}}{1+e^x}$

Piirretään funktioiden f_0 ja f_1 kuvaajat laskimella.

$$f_0(x) = \frac{e^{0\cdot x}}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$$

$$f_1(x) = \frac{e^{0\cdot x}}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x}$$



b) Ristiin kertomalla nähdään, että

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= f_1(-x) \\
\frac{e^{0\cdot x}}{1+e^x} &= \frac{e^{1\cdot(-x)}}{1+e^{-x}} \\
\frac{1}{1+e^x} &= \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\
1\cdot(1+e^{-x}) &= (1+e^x)\cdot e^{-x} \\
1+e^{-x} &= e^{-x}+e^{x-x} \\
1+e^{-x} &= e^{-x}+e^{0} \\
1+e^{-x} &= e^{-x}+1 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

kaikilla x.

Koska arvot x ja $-x$ sijaitsevat yhtä kaukana origosta sen vastakkaisilla puolilla, niin yhtälöstä

$$f_0(x) = f_1(-x)$$

seuraa, että funktioiden f_0 ja f_1 kuvaajat ovat toistensa peilikuvia y-akselin suhteen.

c) Funktioiden f_0 ja f_1 kuvaajat näyttävät leikkaavan pisteessä $P=(0,\frac{1}{2})$.

Sijoitetaan pisteen P koordinaatit yhtälöön $y=f_n(x)$.

$$\frac{1}{2}=f_n(0)$$
$$\frac{1}{2}=\frac{e^{n\cdot 0}}{1+e^0}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$$
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Yhtälö toteutuu kaikilla n.

Siis piste $P=(0,\frac{1}{2})$ on kaikkien käyrien $y=f_n(x)$ yhteinen leikkauspiste.

d) Tutkitaan funktion $f_n(x) = \dfrac{e^{n \cdot x}}{1 + e^x}$ derivaattafunktion merkkiä.

$$
\begin{aligned}
f_n'(x) &= \frac{e^{nx} \cdot n \cdot (1 + e^x) - e^{nx} \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} \\
&= \frac{e^{nx} \cdot n + e^{nx} \cdot n \cdot e^x - e^{nx} \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} \\
&= \frac{e^{nx}(n + n \cdot e^x - e^x)}{(1 + e^x)^2} \\
&= \frac{e^{nx}(n + (n-1)e^x)}{(1 + e^x)^2}
\end{aligned}
$$

Jos $n \geq 1$, niin

$e^{nx} > 0$,

$n + (n-1)e^x \geq 1 + (1 - 1) \cdot e^x = 1 + 0 \cdot e^x = 1 > 0$ ja

$(1 + e^x)^2 > (1 + 0)^2 = 1 > 0$.

Siten $f_n'(x) > 0$ ja $f_n(x)$ on aidosti kasvava kaikilla $n \geq 1$.

B7

Oletus Geometrisen jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jäsenet ovat positiivisia lukuja.

Väite Jono $\ln a_1, \ln a_2, \ln a_3, \ldots$ on aritmeettinen.

Todistus Merkitään geometrisen jonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ suhdelukua kirjaimella q.

Tällöin $a_{n+1} = qa_n$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Koska jonon jäsenet ovat positiivisia lukuja, myös $q > 0$.

Lasketaan jonon $\ln a_1, \ln a_2, \ln a_3, \ldots$ kahden peräkkäisen jäsenen erotus.

$$\begin{aligned}\ln a_{n+1} - \ln a_n &= \ln(qa_n) - \ln a_n \\ &= \ln q + \ln a_n - \ln a_n \\ &= \ln q\end{aligned}$$

Koska luku $\ln q$ on vakio, niin jono $\ln a_1, \ln a_2, \ln a_3, \ldots$ on aritmeettinen. □

B8

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ yleinen jäsen on $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Merkitään $f(x) = \sqrt[x]{x}$, missä $x > 0$.

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jäsenet ovat funktion f arvoja.

$a_1 = f(1), a_2 = f(2), a_3 = f(3), \ldots$

Tutkitaan funktion $f(x) = \sqrt[x]{x}$ kulkua.

Määritetään derivaattafunktio.

$f'(x) = \dfrac{(1 - \ln x)\sqrt[x]{x}}{x^2}$, kun $x > 0$. Derivoidaan laskimella.

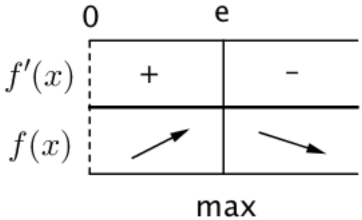
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} \frac{(1-\ln x)\sqrt[x]{x}}{x^2} &= 0 \qquad \left| \cdot \frac{x^2}{\sqrt[x]{x}} \right. \quad (>0) \\ 1 - \ln x &= 0 \\ \ln x &= 1 \\ x &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

Nollakohta $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

Laaditaan funktion f kulkukaavio. Derivaattafunktio f' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

x	$f'(x)$	merkki
1	1	+
3	–0,0158...	–



Funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa e = 2,718... .

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots$ suurin jäsen on joko a_2 tai a_3.

$$a_2 = \sqrt[2]{2} = 1{,}414...$$

$$a_3 = \sqrt[3]{3} = 1{,}442...$$

Lukujonon suurin jäsen on $a_3 = \sqrt[3]{3}$.

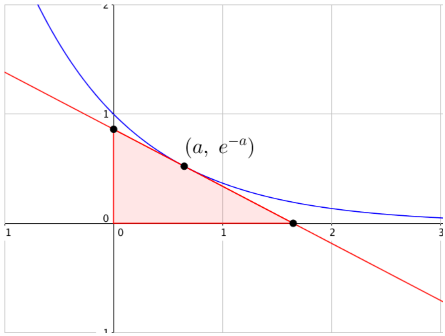
Vastaus

$a_3 = \sqrt[3]{3}$

B9

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$



Piirretään funktion kuvaajalle tangentti pisteeseen (a, e^{-a}).

Tangentin kulmakerroin on $f'(a) = -\mathrm{e}^{-a}$.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - \mathrm{e}^{-a} = -\mathrm{e}^{-a}(x - a)$$
$$y = -\mathrm{e}^{-a}x + \mathrm{e}^{-a}a + \mathrm{e}^{-a}$$

Tangentti leikkaa y-akselin pisteessä $(0,\ \mathrm{e}^{-a}a + \mathrm{e}^{-a})$.

Ratkaistaan tangentin ja x-akselin leikkauspiste.

$$0 = -\mathrm{e}^{-a} \cdot x + \mathrm{e}^{-a}a + \mathrm{e}^{-a}$$
$$x = a + 1$$

Ratkaistaan laskimella.

Tangentti leikkaa x-akselin pisteessä $(a + 1, 0)$.

Tangentti kulkee origon kautta, kun $a = -1$.

Kolmion pinta-alan ilmaisee funktio

$$A(a)=\frac{1}{2}(a+1)(\mathrm{e}^{-a}a+\mathrm{e}^{-a})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a}(a+1)^2\text{, missä } a>-1.$$

Määritetään derivaattafunktio.

$A'(a)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a}(a-1)(a+1)$, kun $a>-1$ Derivoidaan laskimella.

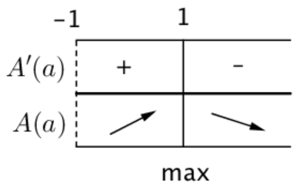
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a}(a-1)(a+1)=0$$
$$a=-1 \text{ tai } a=1$$

Nollakohta $a=1$ toteuttaa määrittelyehdon $a>-1$.

Laaditaan funktion A kulkukaavio. Derivaattafunktio A' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

a	$A'(a)$	merkki
0	0,5	+
2	–0,203...	–



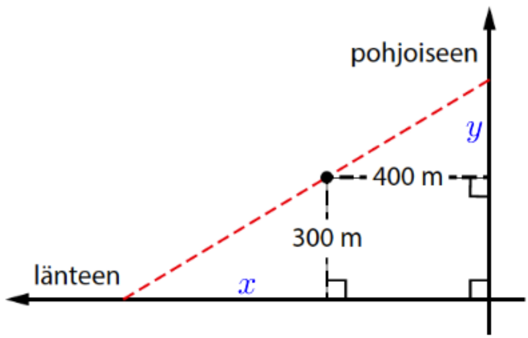
Funktio A suurin arvo on $A(1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}(1+1)^2=\frac{2}{\mathrm{e}}$.

Kolmion suurin mahdollinen pinta-ala on $\frac{2}{\mathrm{e}}$.

Vastaus

$\frac{2}{e}$

B10



Olkoon reitin länsipään etäisyys risteyksestä $x + 400$ (m)
ja pohjoispään etäisyys risteyksestä $y + 300$ (m).

Kuvioon muodostuu kaksi yhdenmuotoista suorakulmaista kolmiota, joista voidaan ratkaista y.

$$\frac{y}{300} = \frac{400}{x}$$

$$y = \frac{120\,000}{x}$$

Reitin pituuden ilmaisee funktio

$$f(x) = \sqrt{(400 + x)^2 + (300 + y)^2} = \sqrt{(400 + x)^2 + (300 + \frac{120\,000}{x})^2},$$

missä $x > 0$.

Koska neliöjuurifunktio on aidosti kasvava, funktio f saa pienimmän arvonsa samassa kohdassa kuin funktio

$$g(x) = (400 + x)^2 + (300 + \frac{120\,000}{x})^2, \text{ missä } x > 0.$$

Määritetään derivaattafunktio.

$$g'(x) = \frac{2(x+400)(x^3 - 36\,000\,000)}{x^3},$$ Derivoidaan laskimella.

kun $x > 0$.

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

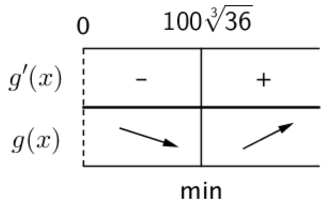
$$\frac{2(x+400)(x^3 - 36\,000\,000)}{x^3} = 0$$ Ratkaistaan laskimella.

$$x = -400 \text{ tai } x = 100\sqrt[3]{36} = 330{,}193...$$

Nollakohta $x = 100\sqrt[3]{36}$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 0$.

Laaditaan funktion g kulkukaavio. Derivaattafunktio g' on jatkuva, joten sen merkki voi vaihtua vain nollakohdassa. Päätellään derivaattafunktion merkit testaamalla.

x	$g'(x)$	merkki
100	–35 000	–
400	700	+



Funktio g saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = 100\sqrt[3]{36}$.

Funktion f pienin arvo on $f(100\sqrt[3]{36}) = 986,566...$.

Lyhin mahdollinen suora reitti on noin 990 metriä pitkä.

Kun $x = 100\sqrt[3]{36}$, niin $y = \dfrac{120\,000}{100\sqrt[3]{36}} = 363,424...$.

Reitti erkanee pohjoiseen kulkevalta polulta noin 660 metrin päässä risteyksestä.

Vastaus
pituus 990 m, erkanemiskohta 660 m