

Kotivaativa 3. (A-osio)

a) Laske $\int x\sqrt{x^2 - 3}$.

Esimerkkiratkaisu ja pisteet:

$$= \int \frac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{x^2 - 3}$$

1 p (sisäfunktion derivaatta)

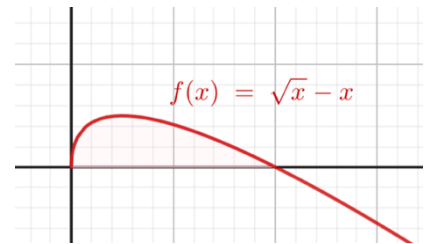
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 - 3)^{\frac{3}{2}} + C$$

1 p (integroitu)

$$= \frac{1}{3} (x^2 - 3)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (x^2 - 3)\sqrt{x^2 - 3} + C$$

1 p +1 p (vastaus ja integroimisvakio)

b) Määritä funktion $f(x) = \sqrt{x} - x$ kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala.



Esimerkkiratkaisu ja pisteet:

Määritetään kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteet

$$f(x) = 0$$

$$\sqrt{x} - x = 0$$

$$\sqrt{x} = x$$

$$x = x^2$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

tulon nollasääntö

$$x = 0 \text{ tai } x = 1$$

1 p (leikkauspisteet)

Integraali mittaa funktion ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa.
(tai muutoin ilmaistu pinta-alan yhteys integraaliin)

Lasketaan siis määrätty integraali välillä $[0,1]$ 1p

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x \, dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} - x \, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x} - x \, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1$$

1 p (integroitu)

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}$$

1 p (vastaus)

c) Osoita, että funktio $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ on funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ integraalifunktio.

Ratkaisuvaihtoehto 1)

Derivaatta on integraalin käänteinen toimenpide.

Jos funktion $F(x)$ on funktion $f(x)$ eräs integraalifunktio, niin $F'(x) = f(x)$ (1p ymmärrys)

Derivoidaan funktio

$$F(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \quad F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

(1p osannut laittaa funktion derivointi muotoon)

$$F'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1)$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \quad (1p derivoinnista)$$

$$F'(x) = x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (1p lopputuloksesta)$$

Ratkaisuvaihtoehto 2)

Voidaan osoittaa myös integroimalla funktio $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Eli $\int f(x) = F(x)$. (1p ymmärrys)

Integroidaan funktio $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ Integroinnista (1p)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + C \quad (1p integroitu oikein) + (1p siitä että ymmärtää, että kun C=0)$$

Niin funktio on funktion integraalifunktio.)

$$= \sqrt{x^2 + 1}$$