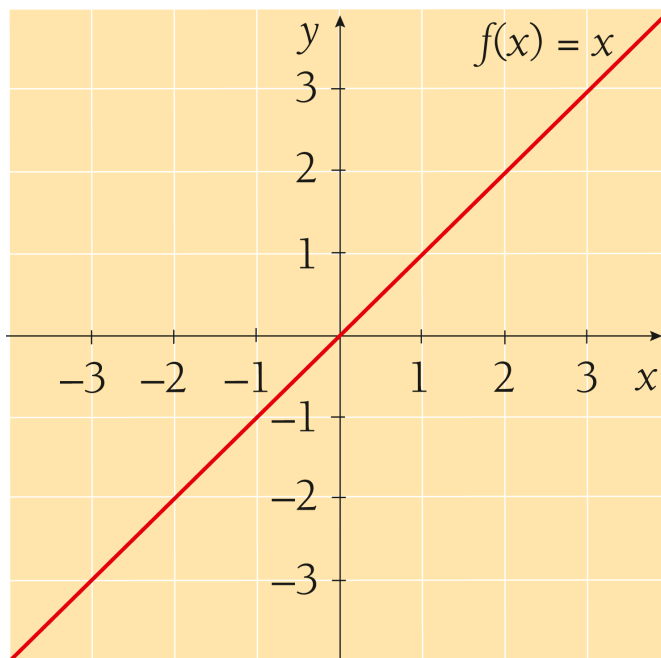


Derivaattafunktio

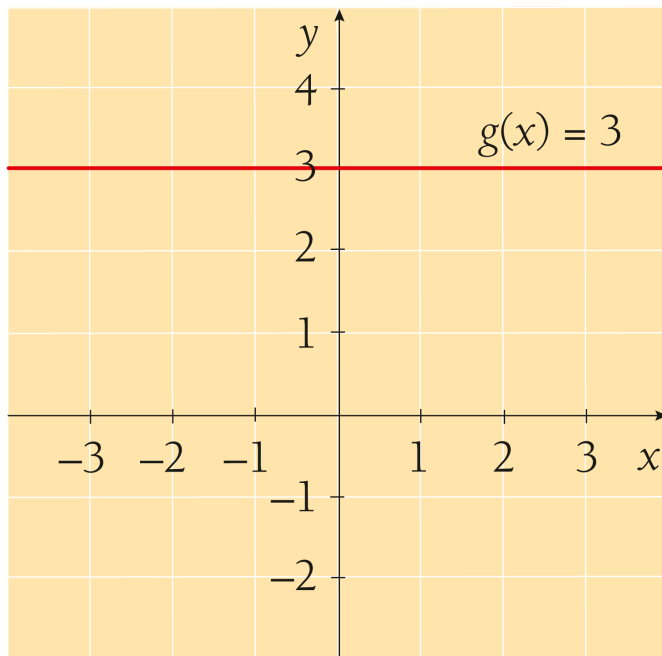
Esimerkki 1

Päättele kuvaajista funktion derivaatta kohdissa 1, 3, -2 ja x .

a) $f(x) = x$



b) $g(x) = 3$



Ratkaisu

Funktion derivaatta on sen kuvaajalle tutkittavaan kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin.

a) Funktion $f(x) = x$ kuvaaja on suora. Kuvaajan mihin tahansa kohtaan piirretty tangentti on suora itse. Suoran $y = x$ kulmakerroin on 1, joten funktion $f(x) = x$ derivaatta on 1 kaikissa kohdissa 1, 3, -2 ja x .

b) Funktion $g(x) = 3$ kuvaajalle mihin tahansa kohtaan piirretty tangentti on suora itse. Koska suoran $y = 3$ kulmakerroin on 0, funktion $g(x)$ derivaatta kohdissa 1, 3, -2 ja x on 0.

Vastaus

a) Derivaatta on kaikissa kohdissa 1.

b) Derivaatta on kaikissa kohdissa 0.

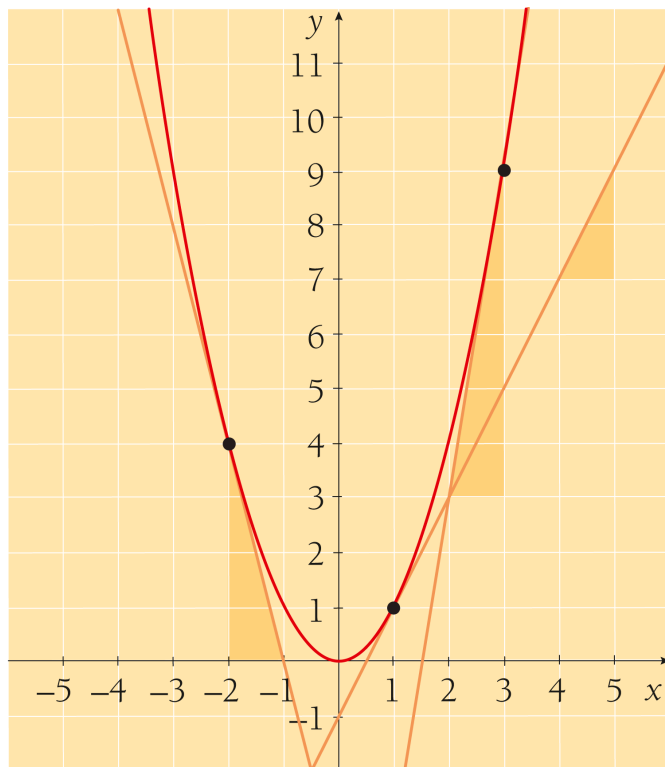
Esimerkki 2

funktion $f(x) = x^2$ kuvaaja ja määritä kuvaajan avulla

funktion derivaatta kohdissa 1, 3 ja -2. Vertaa derivaatan arvoja muuttujan x arvoihin ja päätele funktion derivaatta kohdassa x .

Ratkaisu

Piirretään geometriaohjelmalla funktion $f(x) = x^2$ kuvaaja ja sille tangentit kohtiin 1, 3 ja -2. Määritetään ohjelman avulla tangenttien kulmakertoimet.



Kohtaan 1 piirretyn tangentin kulmakerroin on 2, joten $f'(1) = 2$. Kohtiin 3 ja -2 piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat 6 ja -4, joten $f'(3) = 6$ ja $f'(-2) = -4$.

Sijoitetaan derivaatan arvot taulukkoon ja päätellään niiden avulla derivaatan arvo kohdassa x .

Taulukon perusteella havaitaan, että derivaatan arvo kaikissa kohdissa saadaan, kun muuttujan x arvo kerrotaan kahdella. Tämän säännön perusteella funktion derivaatta kohdassa x on $f'(x) = 2x$.

x	$f'(x)$
1	2
3	6
-2	-4

Kun halutaan tutkia tangentteja kuvaajan eri kohdissa, se voidaan tehdä muuttamalla sivuamispistettä liukusäätimen avulla. Kun kuvaajalle merkitään piste $(a, f(a))$, ohjelma luo luvulle a liukusäätimen.

Vastaus

a) $f'(1) = 2$, $f'(3) = 6$, $f'(-2) = -4$ ja $f'(x) = 2x$.

Derivaattafunktio ja derivoiminen

Derivaattafunktioksi kutsutaan funktiota, jonka avulla voidaan laskea funktion derivaatan arvo missä tahansa kohdassa x . Funktion $f(x)$ derivaattafunktiosta käytetään merkintää $f'(x)$. Derivaattafunktion lausekkeen määrittämistä kutsutaan **derivoimiseksi**. Sitä voidaan merkitä isolla D-kirjaimella: merkintä $Dx^2 = 2x$ tarkoittaa, että funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2x$.

Esimerkeissä 1 ja 2 saatiin kolme derivaattafunktiota.

Esimerkin 1 b-kohdan tulos on voimassa kaikille vakiofunktioille.

Derivaattafunktioita:

$Dc = 0$, kun c on vakio

$Dx = 1$

$Dx^2 = 2x$

Derivaattafunktion lausekkeen muodostamisessa voidaan käyttää seuraavia sääntöjä:

- Vakion saa siirtää derivointimerkin eteen.

$$D4x^2 = 4Dx^2 = 4 \cdot 2x = 8x$$

- Summa ja erotus voidaan derivoida termi kerrallaan.

$$D(x^2 + x) = Dx^2 + Dx = 2x + 1$$

$$D(1 - x^2) = D1 - Dx^2 = 0 - 2x = -2x$$

Säännöt voidaan esittää myös kaavoina.

$$D(k \cdot f(x)) = k \cdot Df(x), \text{ kun } k \text{ on vakio}$$

$$D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x)$$

$$D(f(x) - g(x)) = Df(x) - Dg(x)$$

Derivoimissääntöjen sijasta derivaattafunktion

lausekkeen voi määrittää laskentaohjelmalla. Esimerkiksi funktion $x^2 + x$ derivaattafunktio määritetään ohjelmasta riippuen joko toiminnolla

Derivaatta($x^2 + x$, x), Diff($x^2 + x$) tai

$$\frac{d}{dx}(x^2 + x).$$

Esimerkki 3

Derivoi funktiot.

a) $x^2 + x - 4$

b) $-3(x^2 + 18x)$

c) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3}$

Ratkaisu

a) Derivoidaan termi kerrallaan.

$$D(x^2 + x - 4) = Dx^2 + Dx - D4 = 2x + 1 - 0 = 2x + 1$$

b) Suoritetaan ensin kertolasku, jotta funktion lauseke saadaan polynomin muotoon.

$$-3(x^2 - 18x) = -3x^2 + 54x$$

Derivoidaan termit erikseen ja siirretään kummankin termin kerroin derivointimerkin eteen.

$$D(-3x^2 + 54x) = D(-3x^2) + D54x = -3Dx^2 + 54Dx =$$

$$-6x + 54 \cdot 1 = -6x + 54$$

c) Muutetaan funktion lauseke ensin sellaiseen muotoon, josta termien kertoimet on helpompi nähdä.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x$$

$$D\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{4}Dx^2 - \frac{1}{3}Dx = \frac{1}{4} \cdot 2x - \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$$

Vastaus

a) $2x + 1$, **b)** $-6x + 54$, **c)** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

Esimerkki 4

Tutkitaan funktiota $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$.

a) Mikä on funktion kuvaajalle kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin?

b) Mihin kohtaan funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on -13 ?

Ratkaisu

a) Kysytty tangentin kulmakerroin on funktion $f(x)$ derivaatta kohdassa $x = 3$.

Muodostetaan derivaattafunktion lauseke.

$$f'(x) = 4 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 8x - 5$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $x = 3$.

$$f'(3) = 8 \cdot 3 - 5 = 19$$

b) Selvitetään yhtälön avulla, millä muuttujan x arvoilla derivaattafunktio saa arvon -13 .

$$8x - 5 = -13$$

$$8x = -8 \quad | : 8$$

$$x = -1$$

Tangentin kulmakertoimeen ja derivaattaan liittyvät tehtävät pitää ratkaista laskennallisesti, ellei tehtävänannossa nimenomaan pyydetä ratkaisua graafisesti tai kuvaajan avulla. Derivoinnissa ja muissa laskujen välivaiheissa voi käyttää apuna ohjelmien CAS-toimintoja.

Vastaus

a) Kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 19.

b) Tangentin kulmakerroin on -13 kohdassa $x = -1$.

Avainkäsitteet:

- derivaattafunktio
- derivointi
- derivoimissäännöt

