

Polynomifunktion derivaatta

Esimerkki 1

- a)** Derivoi laskentaohjelmalla funktiot x^3 , x^4 ja x^5 .
- b)** Minkä säännönmukaisuuden havaitset derivaattafunktioissa?
- c)** Päättelä funktioiden x^{10} ja x^n derivaattafunktiot. Tarkista vastauksesi laskentaohjelmalla.

Ratkaisu

- a)** Laskentaohjelmalla saadaan:

$$Dx^3 = 3x^2$$

$$Dx^4 = 4x^3$$

$$Dx^5 = 5x^4.$$

- b)** Havaitaan, että alkuperäinen eksponentti siirtyy derivaattafunktiossa lausekkeen kertoimeksi ja muuttujan eksponentti pienenee yhdellä.

c) Jos sama säännönmukaisuus on voimassa funktion x^{10} derivaatafunktiolle, saadaan

$$Dx^{10} = 10x^9.$$

Funktion x^n derivaatafunktio on säännön perusteella

$$Dx^n = nx^{n-1}.$$

Laskentaohjelma antaa samat derivaatafunktiot.

Vastaus

a) $Dx^3 = 3x^2$, $Dx^4 = 4x^3$ ja $Dx^5 = 5x^4$ **c)** $Dx^{10} = 10x^9$ ja $Dx^n = nx^{n-1}$
- 1

Potenssifunktion derivaatta

Esimerkissä 1 havaittu säännönmukaisuus on voimassa kaikkien **potenssifunktioiden derivaatafunktioille**.

Potenssifunktion x^n derivoimissääntö on $Dx^n = nx^{n-1}$.

Sääntö antaa myös funktioiden x^2 ja x derivaatafunktiot, sillä

$$Dx^2 = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x \text{ ja}$$

$$Dx = Dx^1 = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Esimerkki 2

Derivoi funktiot.



$$f(x) = x^5 - 3x^4 + x - 2$$

$$\mathbf{b)} \ g(x) = x^{21} - 2x^{13}$$

Ratkaisu

Käytetään potenssifunktion derivoimissääntöä ja derivoidaan funktiot termi kerrallaan.

$$\mathbf{a)} \ f'(x) = 5x^{5-1} - 3 \cdot 4x^{4-1} + 1 - 0 = 5x^4 - 12x^3 + 1$$

$$\mathbf{b)} \ g'(x) = 21x^{21-1} - 2 \cdot 13x^{13-1} = 21x^{20} - 26x^{12}$$

Vastaus

$$\mathbf{a)} \ 5x^4 - 12x^3 + 1, \ \mathbf{b)} \ 21x^{20} - 26x^{12}$$

Esimerkki 3

Määritä funktion $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 7x + 3$ derivaatta sekä derivaatan arvo kohdassa $x = 2$.

Ratkaisu

Funktion $f(x)$ derivaatalla tarkoitetaan tässä derivaattafunktion lauseketta. Muodostetaan lauseke derivoimalla funktio $f(x)$ termeittäin.

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 4x^3 - 3x^2 - 12x + 7$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 2$.

$$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 7 = 3$$

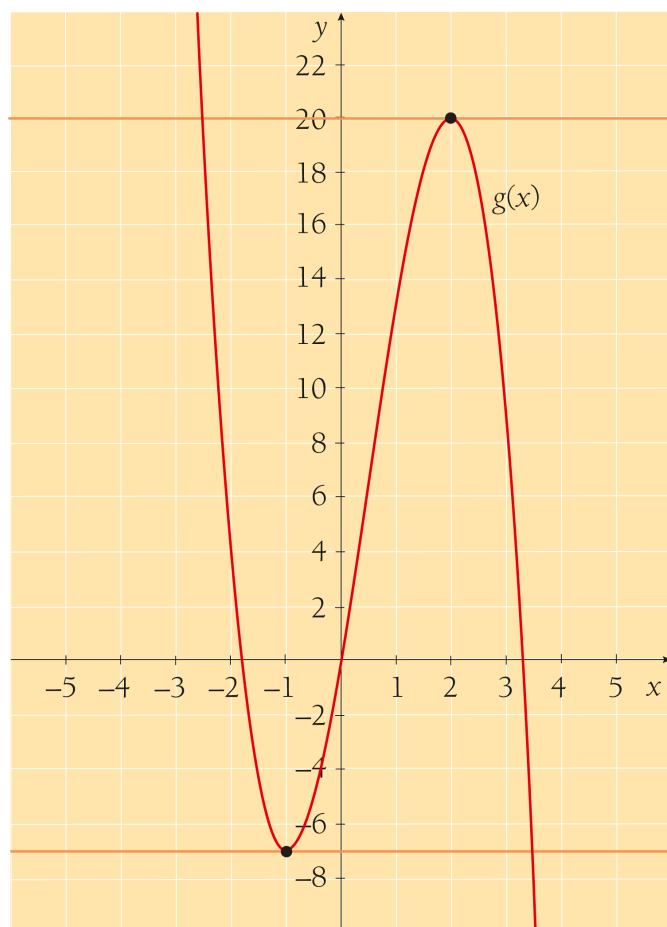
Vastaus

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 12x + 7, \ f'(2) = 3$$

Esimerkki 4

Määritä funktion $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ derivaatta ja määritä, missä x arvoilla funktion $g(x)$ derivaatta saa arvon 0? Miten derivaatan nollakohdat

näkee funktion $g(x)$ kuvaajasta?



Ratkaisu

Muodostetaan derivaattafunktion lauseke.

$$g'(x) = -2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x + 12 \cdot 1 = -6x^2 + 6x + 12$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$-6x^2 + 6x + 12 = 0$$

$$a = -6, b = 6, c = 12$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 12}}{2 \cdot (-6)} = \frac{-6 \pm \sqrt{324}}{-12}$$

$$x = \frac{-6 + 18}{-12} = -1 \text{ tai } x = \frac{-6 - 18}{-12} = 2$$

Yhtälön voi ratkaista myös laskentaohjelmalla.

Derivaatan nollakohdissa funktion $g(x)$ kuvaajalle piirretty tangentti on x -akselin suuntainen suora.

Vastaus

Derivaatta saa arvon nolla kohdissa $x = -1$ ja $x = 2$. Näissä kohdissa kuvaajalle piirretty tangentti on x -akselin suuntainen suora.

Esimerkki 5

Millä vakion a arvoilla funktiolle $f(x) = -2x^7 + 3ax + a^2$ on voimassa ehto $f'(-1) = 4$?

Ratkaisu

Ehto $f'(-1) = 4$ tarkoittaa, että funktion derivaatta kohdassa $x = -1$ on 4.

Funktion $f(x)$ muuttuja on x . Funktion lausekkeessa kirjain a on vakio, jota käsitellään derivoitaessa samalla tavalla kuin lukua. Termin a^2 derivaatta on siksi 0.

Derivoidaan funktio $f(x)$.

$$f'(x) = -2 \cdot 7x^6 + 3a \cdot 1 + 0 = -14x^6 + 3a$$

Jos derivoitavan funktion termissä on kahta eri kirjainta, kuten termissä $3ax$, laskentaohjelmalla derivoitaessa kirjainten väliin pitää syöttää kertomerkki. Muuten ohjelma tulkitsee lausekkeen väärin.

Lasketaan derivaatta kohdassa $x = -1$.

$$f'(-1) = -14 \cdot (-1)^6 + 3a = -14 + 3a$$

Selvitetään, millä vakion a arvolla $f'(x) = 4$.

$$f'(-1) = 4$$

$$-14 + 3a = 4$$

$$3a = 18 \quad | : 3$$

$$a = 6$$

Avainkäsitteet:

- potenssifunktion derivaattafunktio

