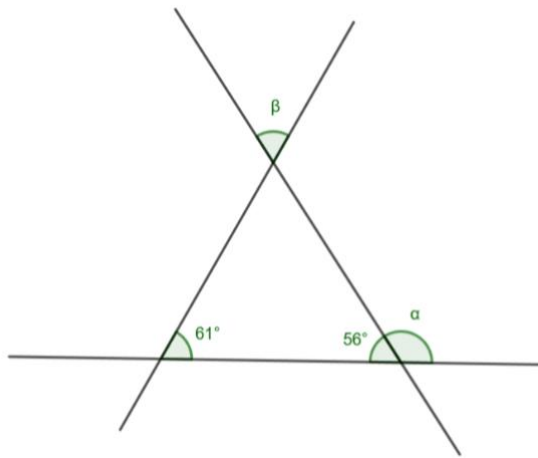


1.1

1.1 Ratkaise kulmien α ja β suuruus. Perustele vastauksesi. 4 p.



Kulma α

Kulma α on kulman 56° vieruskulma. Vieruskulmien summa on 180° eli

$$\alpha + 56^\circ = 180^\circ.$$

Kulman α suuruus on

$$\alpha = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ.$$

Kulma β

Kolmion kulmien summa on 180° , joten kolmion kolmas kulma on suuruudeltaan

$$180^\circ - 56^\circ - 61^\circ = 63^\circ.$$

Kulma β on kulman 63° ristikulma. Ristikulmat ovat yhtä suuret, joten

$$\beta = 63^\circ.$$

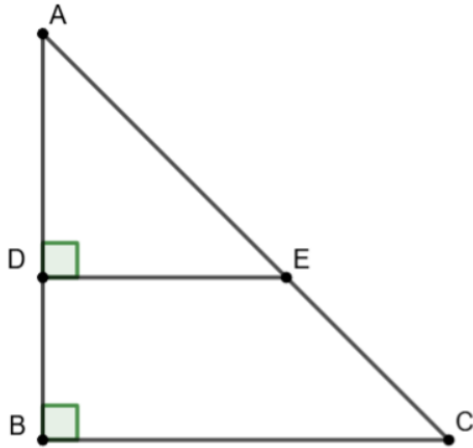
Vastaus: $\alpha = 124^\circ$ ja $\beta = 63^\circ$.

Pisteytys:

Kulma α on kulman 56° vieruskulma.	1
Kulman α suuruus laskettu oikein.	1
Kolmion kolmas kulma laskettu oikein.	1
Kulman β suuruus perusteltu ristikulman avulla.	1

1.2

1.2 Osoita, että kolmiot ABC ja ADE ovat yhdenmuotoisia. Tiedetään, että janat BC ja DE ovat yhdensuuntaiset. 4 p.



1. Kolmioilla on yhteinen kulma A.
2. Molemmissa kolmioissa on 90 asteen kulma.
2. (Vaihtoehtoinen tapa) Kulmat EDA ja CBA ovat samankohtaisia kulmia, koska niillä on yhteinen vasen kylki BA. Koska janat BC ja DE ovat yhdensuuntaisia, ovat samankohtaiset kulmat EDA ja CBA yhdensuuntaisuuslauseen nojalla yhtä suuria.
3. (Vaihtoehtoinen tapa) Kulmat AED ja ACB ovat samankohtaisia kulmia, koska niillä on yhteinen oikea kylki AC. Koska janat BC ja DE ovat yhdensuuntaisia, ovat samankohtaiset kulmat AED ja ACB yhdensuuntaisuuslauseen nojalla yhtä suuria.
4. Kolmioilla ABC ja ADE on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseen (kk-lause) nojalla kolmiot ABC ja ADE ovat yhdenmuotoisia.
4. (Vaihtoehtoinen tapa) Kolmioissa ABC ja ADE on kolme yhtä suurta kulmaa, joten ne ovat yhdenmuotoisia.

Pisteytys:

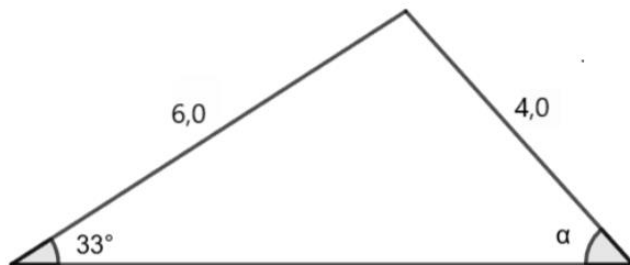
Kahden kulman yhtäsuuruudet perusteltu oikein.	2 (1p/kulma)
Kolmioissa kaksi yhtä suurta kulmaa, kk-lauseen nojalla kolmiot yhdenmuotoisia. TAI Kolmioissa kaksi yhtä suurta, joten kolmannet kulmat yhtä suuria. Kolmioissa kolme yhtä suurta kulmaa, joten kolmiot ovat yhdenmuotoisia.	2

TAI

Kolmen kulman yhtäsuuruudet perusteltu oikein.	3 (1p/kulma)
Kolmioissa kolme yhtä suurta kulmaa, joten kolmiot yhdenmuotoisia.	1

1.3

1.3 Ratkaise kulman α suuruus. 4 p.



Kolmiosta tiedetään tuntemattoman kulman α vastaisen sivun pituus sekä toisen sivun pituus ja sen vastaisen kulman suuruus. Kulman α ratkaisemiseen voidaan käyttää sinilausetta.

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} \\ \frac{6,0}{\sin(\alpha)} &= \frac{4,0}{\sin(33^\circ)} \\ 4,0 \cdot \sin(\alpha) &= 6,0 \cdot \sin(33^\circ) \\ \sin(\alpha) &= \frac{6,0 \cdot \sin(33^\circ)}{4,0} \\ \alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{6,0 \cdot \sin(33^\circ)}{4,0}\right) \\ \alpha &= 54,78148...^\circ \\ \alpha &\approx 55^\circ\end{aligned}$$

V. Kulman α suuruus on 55° .

VAIHTOEHTOISET TAVAT

Toiseksi ja kolmanneksi viimeisen välivaiheen laskusta voi korvata kuvakaappauksella laskimesta. Tuloksen pyöristys tulee kuitenkin tehdä lopuksi.

$$\begin{aligned}&\arcsind\left(\frac{6.0 \cdot \sin(33^\circ)}{4.0}\right) \\ &\approx \mathbf{54.7815^\circ}\end{aligned}$$

TAI

Yhtälön voi ratkaista CAS-laskimella. Kuvasta nähdään, että kulma α on terävä. Vastauksessa on tuotava esille, että ainoastaan toinen kulma kelpaa vastaukseksi. Vaihtoehtoisesti yhtälön ratkaisut rajoitetaan välille $]0^\circ, 90^\circ[$.

$$\text{Ratkaise} \left(\frac{6.0}{\sin(\alpha^\circ)} = \frac{4.0}{\sin(33^\circ)}, \alpha, 0 < \alpha < 180 \right)$$

$$\approx \{ \alpha = \mathbf{54.7815}, \alpha = \mathbf{125.2185} \}$$

Pisteytys:

Havainto/toteamus siitä, että kulman ratkaisemiseksi voidaan käyttää sinilausetta	1
Oikein tehty sijoitus kaavaan	1
Kulman suuruus laskettu oikein	1
Kahden merkitsevän numeron tarkkuudelle tehty pyöristys	1

2.1 Taulukoi tehtävänannossa annetut tiedot. (2 p.)

	<i>pienin</i>	<i>keskikokoinen</i>	<i>suurin</i>
<i>pituus</i>	8cm		
<i>leveys</i>	10cm		
<i>korkeus</i>	5cm		
<i>pohjan pinta – ala</i>			720cm ²
<i>tilavuus</i>	400cm ³	3200cm ³	

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

2.2 Laske pienimmän laatikon pohjan pinta-ala. (2 p.)

$$A_1 = 8\text{cm} \cdot 10\text{cm} = 80\text{cm}^2$$

Vastaus: Pienimmän laatikon pohjan pinta-ala 80cm².

Vastauksen pituus: 41 merkkiä.

2.3 Laske pienimmän ja keskikokoisen laatikon mittojen suhde eli mittakaava. (2 p.)

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{s}{t}\right)^3$$

$$\frac{400\text{cm}^3}{3200\text{cm}^3} = \left(\frac{s}{t}\right)^3$$

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{s}{t}\right)^3$$

$$\frac{s}{t} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$\frac{s}{t} = \frac{1}{2} = 1 : 2$$

Vastaus: Pienimmän ja keskikokoisen laatikon suhde on 1:2.

Vastauksen pituus: 51 merkkiä.

2.4 Laske keskikokoisen laatikon korkeus mittakaavan avulla. (2 p.)

$$\frac{s}{t} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5\text{cm}}{h_2}$$

$$1 \cdot h_2 = 2 \cdot 5\text{cm}$$

$$h_2 = 10\text{cm}$$

Vastaus: Keskikokoisen laatikon korkeus on 10cm.

Vastauksen pituus: 43 merkkiä.

2.5 Laske pienimmän ja suurimman laatikon mittojen suhde eli mittakaava. (2 p.)

$$\frac{A_1}{A_3} = \left(\frac{s}{u}\right)^2$$

$$\frac{80cm^2}{720cm^2} = \left(\frac{s}{u}\right)^2$$

$$\frac{1}{9} = \left(\frac{s}{u}\right)^2$$

$$\frac{s}{u} = \sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$\frac{s}{u} = \frac{1}{3} = 1 : 3$$

Vastaus: Pienimmän ja suurimman laatikon mittakaava on 1:3.

Vastauksen pituus: 52 merkkiä.

2.6 Laske suurimman laatikon tilavuus mittakaavan avulla. (2 p.)

$$\frac{V_1}{V_3} = \left(\frac{s}{u}\right)^3$$

$$\frac{400cm^3}{V_3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\frac{400cm^3}{V_3} = \frac{1}{27}$$

$$V_3 \cdot 1 = 400cm^3 \cdot 27$$

$$V_3 = 10800cm^3$$

Vastaus: Suurimman laatikon tilavuus on $10800cm^3$.

Vastauksen pituus: 36 merkkiä.

Pisteytys

2.1

Luotu taulukko, jossa on laatikoiden tietoja.	1
Taulukko on täytetty oikein.	1

2.2

Muodostettu pinta-alan lauseke valitsemalla pituus ja leveys.	1
Pinta-ala laskettu oikein. / Pinta-ala laskettu oikein valituilla luvuilla.	1

2.3

Tilavuuksien suhteen lauseke mittakaavan selvittämiseksi muodostettu oikein.	1
Mittakaava ratkaistu oikein.	1

2.4

Muodostettu verrantoyhtälö oikein.	1
------------------------------------	---

Korkeus laskettu oikein. / Korkeus laskettu oikein muodostetusta verrantoyhtälöstä.	1
---	---

2.5

Pinta-alojen suhteen lauseke muodostettu oikein.	1
Mittakaava ratkaistu oikein.	1

2.6

Muodostettu verrantoyhtälö oikein.	1
Tilavuus laskettu oikein. / Tilavuus laskettu oikein muodostetusta verrantoyhtälöstä.	1

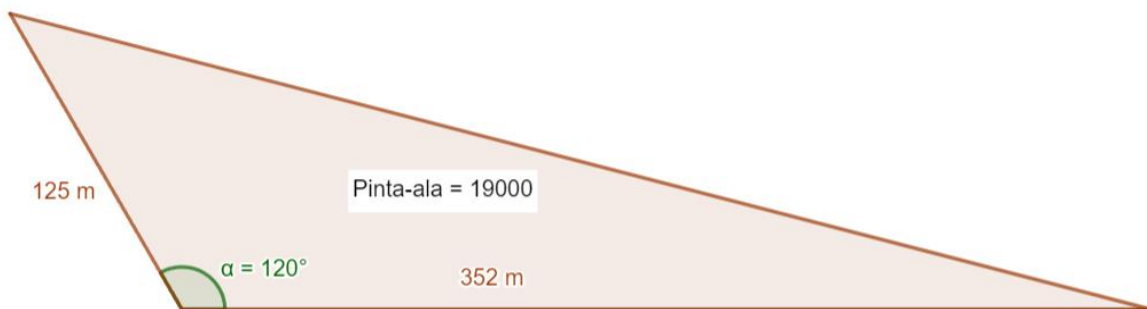
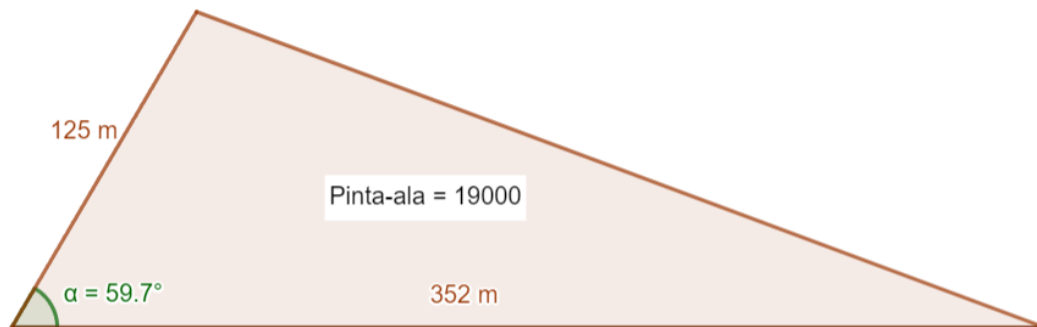
3. Laitumella 12 p.

Suvi rajaa kesäisin hevosilleen kolmion muotoisen laitumen, jonka pinta-ala on 1,90 ha. Laitumen kaksi sivua ovat pituudeltaan 125 m ja 352 m.

3.1

3.1 Määritä tunnettujen sivujen välinen kulma. 6 p.

Mallikuvat (ei vaadita)



Muutetaan laitumen pinta-ala neliömetreiksi (tai sivujen pituudet hehtometreiksi).

$$1,9 \text{ ha} = 19\,000 \text{ m}^2$$

Laitumen tunnettujen sivujen välinen kulma saadaan selville kolmion pinta-alan kautta.

$$A = \frac{1}{2}ac \sin \beta$$

Sijoitetaan tunnetut arvot lausekkeeseen

$$19\,000 = \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot 352 \cdot \sin \beta \quad || \cdot 2 \quad || : 125 \quad || : 352$$

$$\sin \beta = \frac{2 \cdot 19\,000}{125 \cdot 352}$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{2 \cdot 19\,000}{125 \cdot 352} \right)$$

$$\beta = 59,727...^\circ$$

TAI

Ratkaistaan ensin kulman lauseke ja sijoitetaan tunnetut arvot

$$A = \frac{1}{2}ac \sin \beta$$

$$ac \sin \beta = 2A$$

$$\sin \beta = \frac{2A}{ac}$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{2A}{ac} \right)$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{2 \cdot 19\,000 \text{ m}^2}{125 \text{ m} \cdot 352 \text{ m}} \right)$$

$$\beta = 59,727...^\circ$$

Koska $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$, niin toinen vaihtoehto kulmalle on

$$\beta = 180^\circ - 59,727...^\circ = 120,273...^\circ$$

Vaihtoehdot sivujen väliselle kulmalle ovat $\beta \approx 59,7^\circ$ tai $\beta \approx 120^\circ$.

V. Tunnettujen sivujen välinen kulma on $59,7^\circ$ tai 120° .

Pisteytys:

Pinta-alan yksikkömuunnos tehty oikein	1
Havainto, että kulma voidaan ratkaista kolmion pinta-alan kautta ja sijoitus kaavaan	1
Kulman ratkaiseminen	1
Suplementtikulman selvittäminen	1
Sivujen välisten kulmien ilmoittaminen oikein pyöristettynä	2 (1p/kulma)

TAI

Kulmien ratkaiseminen CAS-laskimella

$$\text{Ratkaise}(19000 = 0.5 \cdot 125 \cdot 352 \sin(\beta^\circ), \beta, 0 < \beta < 180)$$

$$\approx \{\beta = 59.7274, \beta = 120.2726\}$$

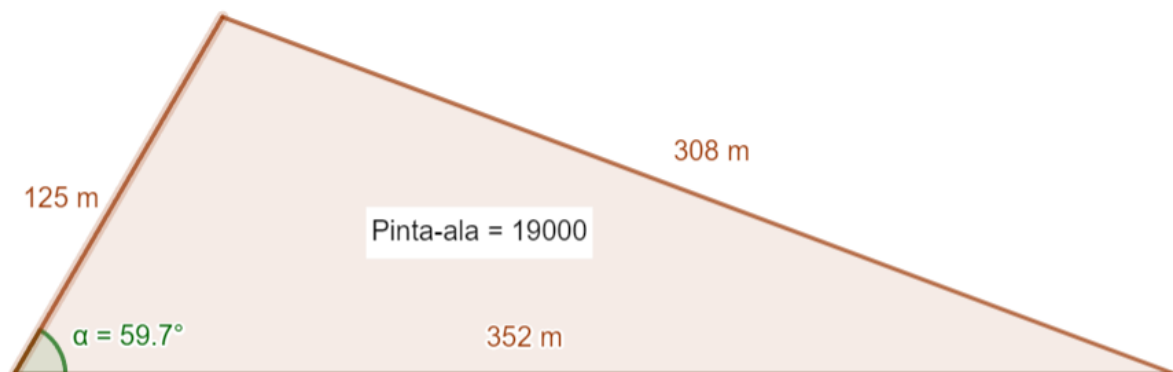
Pisteytys:

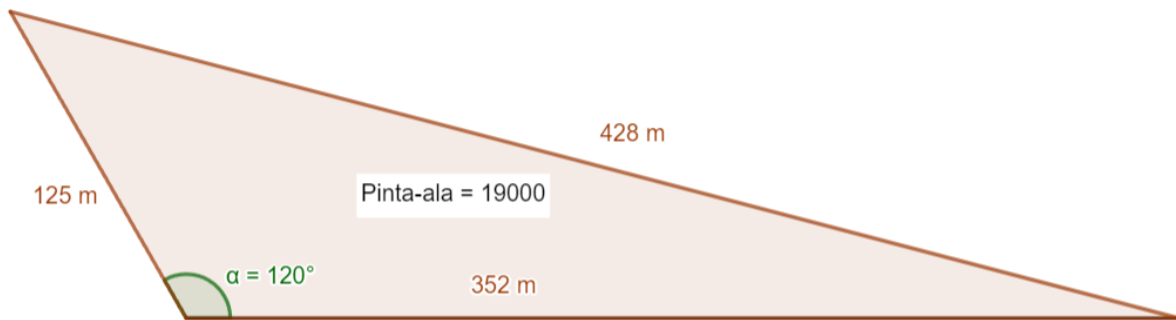
Pinta-alan yksikkömuunnos tehty oikein	1
Havainto, että kulma voidaan ratkaista kolmion pinta-alan kautta.	1
Kulmien ratkaiseminen CAS-laskimella ja toteamus molempien kulmien sopivuudesta	2
Sivujen välisten kulmien ilmoittaminen oikein pyöristettynä	2 (1p/kulma)

3.2

3.2 Määritä laitumen kolmannen sivun pituus. 6 p.

Mallikuvat (ei vaadita)





Kohdassa 3.1 saatiin tunnettujen sivujen välisen kulman suuruudeksi kaksi vaihtoehtoa: $\beta = 59,727\dots^\circ$ tai $\beta = 120,273\dots^\circ$. Täten kolmannen sivun pituudellekin on kaksi vaihtoehtoa. Koska kolmiosta tiedetään kulman suuruus sekä kulman vierekkäisten sivujen pituudet, laitumen kolmannen sivun pituus x (tunnetun kulman vastainen sivu) voidaan ratkaista kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$x^2 = 125^2 + 352^2 - 2 \cdot 125 \cdot 352 \cdot \cos 59,727^\circ$$

$$x = \pm \sqrt{125^2 + 352^2 - 2 \cdot 125 \cdot 352 \cdot \cos 59,727^\circ}$$

$$x = \pm 308,490\dots \text{ (m)}$$

TAI

$$x^2 = 125^2 + 352^2 - 2 \cdot 125 \cdot 352 \cdot \cos 120,273^\circ$$

$$x = \pm \sqrt{125^2 + 352^2 - 2 \cdot 125 \cdot 352 \cdot \cos 120,273^\circ}$$

$$x = \pm 428,825\dots \text{ (m)}$$

Sivun pituus on positiivinen, joten $x \approx 308 \text{ m}$ tai $x \approx 429 \text{ m}$.

V. Kolmannen sivun pituus on 308 m tai 429 m.

TAI

Ratkaisu CAS:n Ratkaise-komennolla.

$$\text{Ratkaise}(x^2 = 125^2 + 352^2 - 2 \cdot 125 \cdot 352 \cdot \cos(59.727^\circ), x)$$

$$\approx \{x = -308.4905, x = 308.4905\}$$

$$\text{Ratkaise}(x^2 = 125^2 + 352^2 - 2 \cdot 125 \cdot 352 \cdot \cos(120.273^\circ), x)$$

$$\approx \{x = -428.8259, x = 428.8259\}$$

Pisteytys:

Tunnistettu kosinilauseen sopivuus sivun ratkaisemiseksi	1
Arvot sijoitettu oikein kosinilauseeseen (pisteen saa, vaikka käyttää edellisestä kohdasta virheellistä kulman arvoa)	1
Pituus saatu ratkaistua lausekkeesta (huolimattomuusvirheet tai väärän kulman käyttö laskuvaiheissa eivät vaikuta pisteen saamiseen)	1
Oikean pituuden ratkaiseminen	1
Toisen mahdollisen sivun pituuden ratkaiseminen	2