

# Calculus<sup>Lukion</sup>

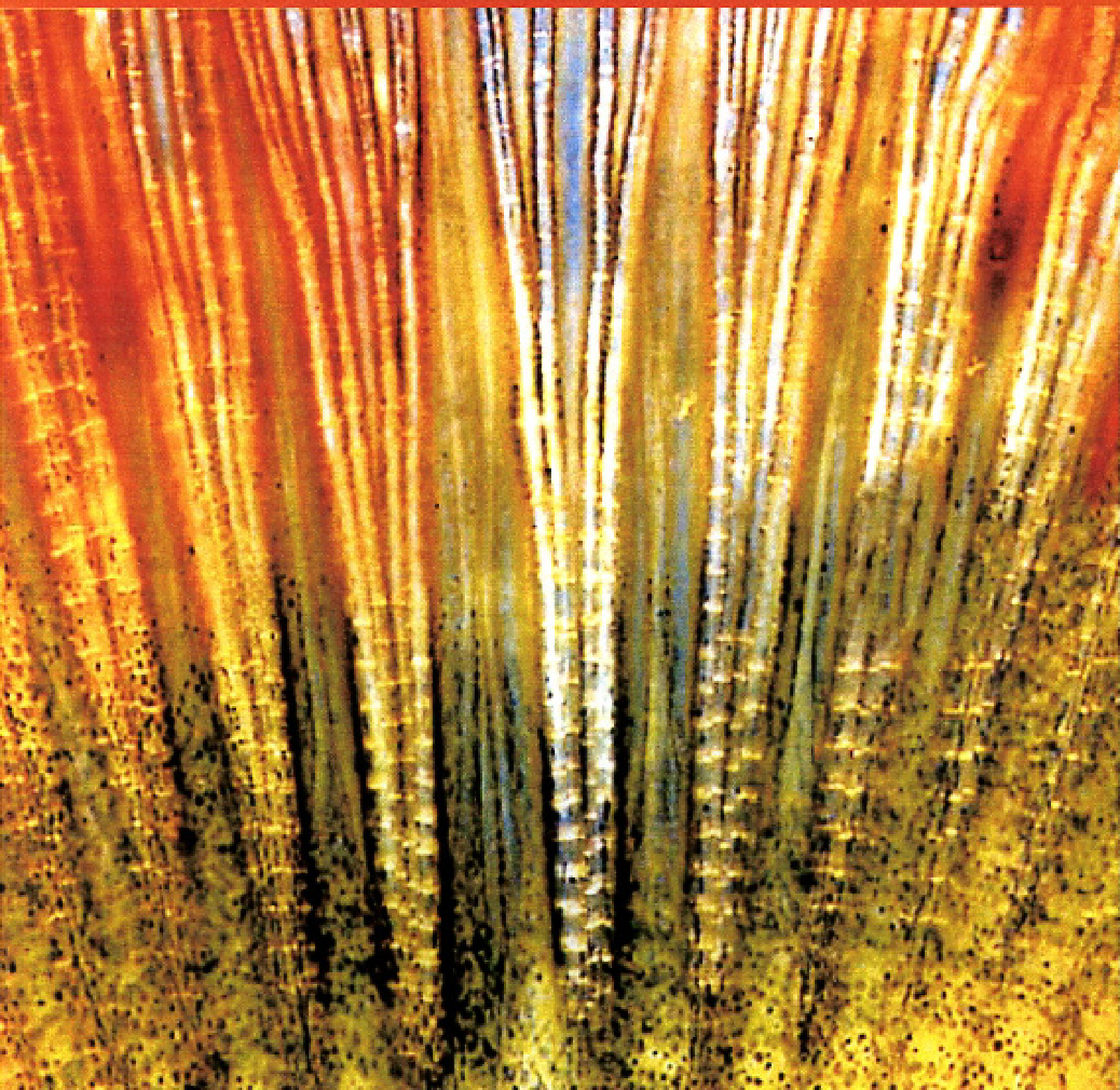
5

MAA9 TRIGONOMETRISET FUNKTIOT JA LUKUJONOT

MAA10 INTEGRAALILASKENTA

Paavo Jäppinen Alpo Kupiainen Matti Räsänen Otava

OPETTAJAN AINEISTO



# Sisällys

## Alkusanat

### Tehtävien ratkaisuja

#### Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9)

Trigonometriset funktiot 3

Lukujonot 24

Lisätehtäviä, trigonometria 46

Lisätehtäviä, lukujonot 52

#### Integraalilaskenta (MAA10)

Integraalifunktio 65

Määrätty integraali 74

Lisätehtäviä 96

1. painos

© 2006 Paavo Jäppinen, Alpo Kupiainen,  
Matti Räsänen ja Kustannusosakeyhtiö Otava

Taitto: Paavo Jäppinen

#### Kopiointiehdot:

Tämä teos on opettajan opas/opettajan kirja. Teos on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61). Tekstisivujen valokopioiminen on kielletty, ellei valokopiointiin ole hankittu lupaa. Tarkista, onko oppilaitoksellanne voimassaoleva valokopiointilupa.

Lisätietoja luvista ja niiden sisällöstä antaa Kopiosto ry, [www.kopiosto.fi/](http://www.kopiosto.fi/).

Teoksen kaikkien kalvopohjien ja kokeiden valokopiointi opetuskäyttöön on sallittua, mikäli oppilaitoksellanne on voimassaoleva valokopiointilupa.

Teoksen tai sen osan digitaalinen kopioiminen tai muuntelu on ehdottomasti kielletty.

#### Painopaikka:

Otavan Kirjapaino Oy

Keuruu 2006

ISBN-13: 978-951-1-20312-4

ISBN-10: 951-1-20312-6

# Alkusanat

Tämä aineisto liittyy pitkän matematiikan oppikirjaan **Lukion Calculus 5**:een, ja se on tarkoitettu helpottamaan opettajan työtä ja nopeuttamaan tehtäviin tutustumista. Aineisto sisältää kurssien **Trigonometriset funktiot ja lukujonot** ja **Integraalilaskenta** tehtävien ratkaisuja.

Lähes kaikkien tehtävien ratkaisut on esitetty. Mukaan ei kuitenkaan ole otettu aivan kaikkein helpoimpia tehtäviä, joissa harjoitellaan vain käsitteiden käyttöä ja jotka ovat melko mekaanisia. Sitä vastoin kaikki soveltamista, analysointia tai todistamista edellyttävät tehtävät on ratkaistu.

Tehtävien ratkaisuihin on pyritty liittämään sanallista selvitystä ja havainnollistavia piirroksia. Tavoitteena on, että myös oppilaat tottuvat esittämään tarpeelliset perustelut ja laatimaan vastauksensa niin, että siitä käy ilmi, miten ratkaisu on ajateltu. Tämä edellyttää usein juuri täydentävän sanallisen selvityksen ja selkeiden piirrosten käyttöä.

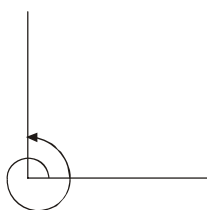
*Kesäkuussa 2006*  
*Tekijät*

# Tehtävien ratkaisuja

## Trigonometriset funktiot

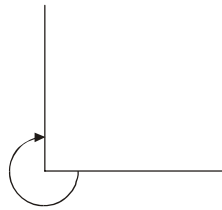
### 1 Suunnattu kulma

1. a)



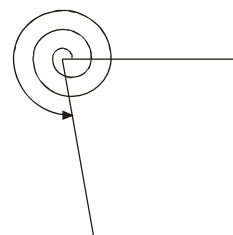
$$450^\circ = 360^\circ + 90^\circ$$

b)



$$-270^\circ$$

c)



$$1\,000^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 280^\circ$$

2. a)  $400^\circ = 360^\circ + \underline{40^\circ}$

b)  $-1\,234^\circ = 4 \cdot (-360^\circ) + \underline{206^\circ}$

c)  $4\,500^\circ = 12 \cdot 360^\circ + \underline{180^\circ}$

d)  $-270^\circ = -360^\circ + \underline{90^\circ}$

3. Sekuntiviisari kiertää 1440 ( $= 24 \cdot 60$ ) kertaa täyden ympyrän negatiiviseen kiertosuuntaan eli  $-1\,440 \cdot 360^\circ = -518\,400^\circ$ .

4. Positiiviset kulmat: esimerkiksi  $315^\circ$  ja  $675^\circ$   
Negatiiviset kulmat: esimerkiksi  $-405^\circ$  ja  $-765^\circ$

5.  $\alpha = -180^\circ + 30^\circ = \underline{-150^\circ}$ ,  $\beta = 180^\circ + 30^\circ = \underline{210^\circ}$ ,  $\gamma = -90^\circ + 30^\circ = \underline{-60^\circ}$

6. a)  $\beta = -\alpha + n \cdot 360^\circ$     b)  $\beta = 180^\circ - \alpha + n \cdot 360^\circ$     c)  $\beta = \alpha + 180^\circ + n \cdot 360^\circ$

7. Kun ratas  $R$  kiertyy  $-180^\circ$ , siihen yhteydessä oleva pieni ratas ja samalla siihen kytketty isompi ratas kiertävät  $\frac{30}{5} \cdot (+180^\circ) = +1080^\circ$ . Alempi pienistä rattaista kiertyy tällöin  $-\frac{15}{5} \cdot 1080^\circ = -3\,240^\circ$ . Ratas  $S$  kiertyy positiiviseen kiertosuuntaan kulman  $\frac{5}{10} \cdot 3\,240^\circ = 1620^\circ$  verran.

### 2 Radiaani

9. a)  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$     b)  $-150^\circ = -150 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{5\pi}{6}$     c)  $495^\circ = 495 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{4}$

d)  $28,65^\circ = 28,65 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,500$     e)  $-1044^\circ = -1044 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{29\pi}{5}$

$$10. \text{ a) } \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$$

$$\text{c) } \frac{7\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 105^\circ$$

$$\text{e) } 10 = 10 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 573^\circ$$

$$\text{b) } \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 72^\circ$$

$$\text{d) } -\frac{23\pi}{12} = -\frac{23\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -345^\circ$$

$$11. \text{ a) } 150^\circ = 150^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{c) } -540^\circ = -540^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = -3\pi$$

$$\text{e) } 1080^\circ = 1080^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 6\pi$$

$$\text{b) } -255^\circ = -255^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = -\frac{17\pi}{12}$$

$$\text{d) } 157,5^\circ = 157,5^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{8}$$

$$12. \text{ a) } -\frac{4\pi}{3} = -2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{d) } 14 \approx 2 \cdot 2\pi + \underline{1,43}$$

$$\text{b) } \frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{e) } -25 \approx 4 \cdot (-2\pi) + \underline{0,133}$$

$$\text{c) } 5\pi = 2 \cdot 2\pi + \pi$$

$$13. \text{ a) } b = \frac{5\pi}{6} \cdot 72,6 \text{ cm} \approx 190 \text{ cm}$$

$$\text{c) } b = 240 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 72,6 \text{ cm} \approx 304 \text{ cm}$$

$$\text{b) } b = 0,987 \cdot 72,6 \text{ cm} \approx 71,7 \text{ cm}$$

$$\text{d) } b = \frac{\pi}{4} \cdot 72,6 \text{ cm} \approx 57,0 \text{ cm}$$

$$14. \alpha = \frac{8}{12} \text{ rad} = \frac{2}{3} \text{ rad} \approx 38,2^\circ$$

$$15. \text{ a) } 62^\circ 32' = 62^\circ + \frac{32'}{60} = 62,53^\circ \text{ ja } 125^\circ 7' 30'' = 125^\circ + \frac{7'}{60} + \frac{30''}{3600} = 125,125^\circ$$

$$\text{b) } 114^\circ 14' = 114,23^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx 1,99 \text{ ja } 27^\circ 27' 27'' = 27,4575^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0,48$$

$$16. \text{ a) } b = 1 \cdot 1,00 \text{ km} = 1,00 \text{ km}$$

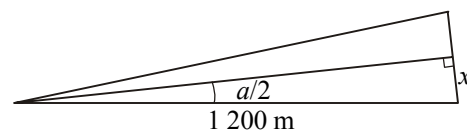
$$\text{c) } b = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 1,00 \text{ km} \approx 0,29 \text{ m}$$

$$\text{b) } b = \frac{\pi}{180} \cdot 1,00 \text{ km} \approx 0,017 \text{ km}$$

$$\text{d) } b = \frac{1}{3600} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 1,00 \text{ km} \approx 0,48 \text{ cm}$$

17. Oheisen kuvan merkinnöin poikkeama on  $2x$  ja

$$\alpha = \frac{92}{6000} \cdot 360^\circ = 5,52^\circ. \text{ Suorakulmaisesta}$$



kolmiosta saadaan  $\frac{x}{1200} = \sin 2,76^\circ$ , josta  $x \approx 57,8$  ja näin ollen  $2x \approx 115,6$ . Poikkeama on noin 120 metriä. Koska kulma on pieni, voidaan poikkeama laskea myös

kaaren pituutena. Tällöin saadaan  $\frac{92}{6000} \cdot 2\pi \cdot 1200 \text{ m} \approx 115,6 \text{ m} \approx 120 \text{ m}$ .

18. Säde  $r = \frac{b}{\alpha} = \frac{75\pi}{5\pi/4} = 60$ .
19. Aiemmin geometriassa (ks. MAA3 s. 21) on osoitettu, että sektorin pinta-ala  $A = \frac{1}{2}br$ , kun  $b$  tarkoittaa kaaren pituutta ja  $r$  sädettä. Ottamalla huomioon, että  $b = \alpha r$ , saadaan  $A = \frac{1}{2}\alpha \cdot r^2$ .
- a)  $A = 2,8 \cdot 11,4^2 \text{ cm}^2 \approx 182 \text{ cm}^2$
- b)  $\alpha = \frac{2 \cdot 12}{4^2} = 1,5 \text{ rad} \approx 85,9^\circ$ , ja kaaren pituus  $b = 1,5 \cdot 4 = 6$ .
20. Lähin etäisyys on tarkkailusektorin säde eli  $r = \frac{52,7}{145 \cdot \frac{\pi}{180}} \text{ m} \approx 21 \text{ m}$ .

### 3 Kulma yksikköympyrässä

22. a)  $\cos 70^\circ \approx 0,34$       b)  $\sin(-50^\circ) \approx -0,77$       c)  $\cos \frac{\pi}{9} \approx 0,94$       d)  $\tan \frac{5\pi}{4} = 1,00$
23. a)  $u = 60^\circ$       b)  $u = 225^\circ$       c)  $u = 180^\circ$
24. a)  $\sin \frac{3\pi}{4} = d$       b)  $\cos \frac{\pi}{6} = a$       c)  $\sin(-\frac{\pi}{3}) = h$   
d)  $\cos \frac{7\pi}{6} = e$       e)  $\cos(-\frac{5\pi}{4}) = c$       f)  $\sin \frac{13\pi}{6} = b$
25. a)  $2 \sin(-\alpha) + \sin(180^\circ - \alpha) + \sin(\alpha + 180^\circ) = -2 \sin \alpha + \sin \alpha - \sin \alpha = -2 \sin \alpha$   
b)  $\cos(-\alpha) + \cos(\alpha + 180^\circ) + \cos(\alpha + 360^\circ) = \cos \alpha - \cos \alpha + \cos \alpha = \cos \alpha$
26. a)  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -\frac{3}{5}$       b)  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha = -\frac{4}{5}$   
c)  $\sin(-\alpha) \cos(-\alpha) = -\frac{3}{5} \cdot (-\frac{4}{5}) = \frac{12}{25}$       d)  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5}$
27. a)  $\alpha \approx 159,82^\circ$       b)  $\alpha \approx 107,74^\circ$       c)  $\alpha \approx 177,44^\circ$
28.  $\sin 165^\circ = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ = a$   
 $\sin 345^\circ = \sin(360^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ = -a$   
 $\sin 195^\circ = \sin(180^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ = -a$   
 $\sin 885^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 165^\circ) = \sin 165^\circ = a$
29. a)  $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$       b)  $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$       c)  $\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$   
d)  $\tan 225^\circ = 1$       e)  $\tan 1200^\circ = \tan(120^\circ + 6 \cdot 180^\circ) = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

$\alpha$	$0^\circ \rightarrow 90^\circ$	$90^\circ \rightarrow 180^\circ$	$180^\circ \rightarrow 270^\circ$	$270^\circ \rightarrow 360^\circ$
$\sin \alpha$	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$
$\cos \alpha$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$
$\tan \alpha$	$0 \rightarrow \infty$	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow \infty$	$-\infty \rightarrow 0$

31. a)  $P(x, y) = P(\cos 59^\circ, \sin 59^\circ) \approx P(0,52; 0,86)$   
 b)  $P(x, y) = P(\cos 160^\circ, \sin 160^\circ) \approx P(-0,94; 0,34)$   
 c)  $P(x, y) = P(\cos 310^\circ, \sin 310^\circ) \approx P(0,64; -0,77)$
32. a) Loppukylki on kolmannessa neljänneksessä. Sini ja kosini ovat negatiivisia, tangentti on positiivinen.  
 b) Loppukylki on kolmannessa neljänneksessä. Sini ja kosini ovat negatiivisia, tangentti on positiivinen.  
 c) Loppukylki on negatiivisella  $x$ -akselilla.  $\sin(-15\pi) = \tan(-15\pi) = 0$  ja  $\cos(-15\pi) = -1$   
 d) Loppukylki on neljännessä neljänneksessä. Sini ja tangentti ovat negatiivisia, kosini on positiivinen.
33. Esimerkiksi a)  $89,95^\circ$ , b)  $90,005^\circ$ .

34. a) Esimerkiksi  $\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha$ .

Vastaavalla tavalla saadaan

$$\begin{aligned}\tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \tan(180^\circ + \alpha) &= \tan \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha.\end{aligned}$$

b) Tangentti on pariton funktio.

35.  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \pm \frac{5}{13}$ . Koska kulma  $\alpha$  on kolmannessa neljänneksessä, sen sini on negatiivinen. Siksi tuloksena on  $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ .

*Toisin:* Määrittäessä voidaan käyttää apuna suorakulmaista kolmiota, jonka sivut ovat 5, 12 ja 13.

36.  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Koska kulma  $\alpha$  on kolmannessa neljänneksessä, sen kosini on negatiivinen. Siksi tuloksena on  $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ . Kulman tangentti  $\tan x = \frac{1}{2}$  saadaan sinin ja kosinin suhteena.

*Toisin:* Määrittäessä voidaan käyttää apuna suorakulmaista kolmiota, jonka sivut ovat 1, 2 ja  $\sqrt{5}$ .

37. Kosinin suurin arvo on 1, joten funktion  $f(x) = 5 - 3 \cos x$  pienin arvo on 2. Vastavasti suurin arvo on 8, sillä kosinin pienin arvo on  $-1$ .
38. a)  $\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \sin \alpha(1 - \cos^2 \alpha) = \sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \sin^3 \alpha$
- b)  $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$
- c)  $\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha + 1 + \sin \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$
39. Yhtälöstä  $x + 2x + 3x = 180^\circ$  saadaan  $x = 30^\circ$ . Tällöin  $(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2 =$   
 $(\sin 30^\circ + \sin 60^\circ + \sin 90^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{4} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2}$ .

## 4 Trigonometrinen funktioiden kuvaajat

40. a) Sinin arvojoukosta saadaan kaksoisepäyhtälö  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , josta kolmella kertomalla  $-3 \leq 3 \sin x \leq 3$ . Saatu tulos tarkoittaa, että funktion  $f(x) = 3 \sin x$  suurin arvo on 3 ja pienin arvo  $-3$ .
- b) Kosinin arvojoukosta saadaan kaksoisepäyhtälö  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , josta kertomalla  $-\frac{1}{2}$ :lla saadaan  $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \cos x \leq \frac{1}{2}$ . Funktion suurin arvo on  $\frac{1}{2}$  ja pienin  $-\frac{1}{2}$ .
- c) Tulon  $-2 \sin x$  arvot vaihtelevat  $-2$ :n ja  $2$ :n välillä mainitut arvot mukaan lukien. Näin ollen funktion  $5 - 2 \sin x$  suurin arvo on 7 ja pienin 3.
- d) Koska  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ , saa nimittäjä kaikki arvot väliltä  $[2, 3]$  ja funktio vastaavasti kaikki arvot väliltä  $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ . Funktion suurin arvo on siis  $\frac{1}{2}$  ja pienin  $\frac{1}{3}$ .
41. a) Sinin arvojoukosta saadaan kaksoisepäyhtälö  $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$ , joten funktion  $f(x) = 1 + 2 \sin x$  suurin arvo on 3 ja pienin arvo  $-1$ .
- b) Koska  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , on  $0 \leq 2 \sin x \leq 2$ , jolloin  $1 \leq 1 + 2 \sin x \leq 3$ . Funktion suurin arvo on 3 ja pienin arvo 1.
- c) Koska  $x \in \left[\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$ , on  $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$  jolloin  $-1 \leq 1 + 2 \sin x \leq 3$ . Funktion suurin arvo on 3 ja pienin arvo  $-1$ .
42. a) Koska tangenttifunktion arvojoukkona on  $\mathbf{R}$ , ei funktiolla  $f(x) = 3 + 2 \tan x$  ole suurinta eikä pienintä arvoa.
- b) Kun  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\tan x \geq 0$ , jolloin funktion  $f(x) = 3 + 2 \tan x$  pienin arvo on 3. Suurinta arvoa funktiolla ei ole.

43. a)  $y = 1 + \sin x$       b)  $y = -\sin x$       c)  $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$

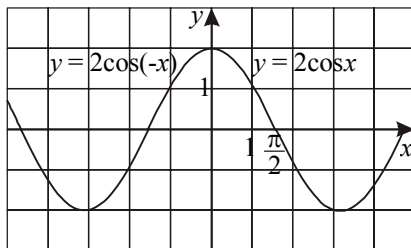
44. Kuvaajasta nähdään, että

a)  $\sin 3x$ : n perusjakso on  $\frac{2\pi}{3}$       b)  $\sin \frac{x}{3}$ : n perusjakso on  $6\pi$   
 c)  $\tan 2x$ : n perusjakso on  $\frac{\pi}{2}$       d)  $\tan \frac{x}{2}$ : n perusjakso on  $2\pi$ .

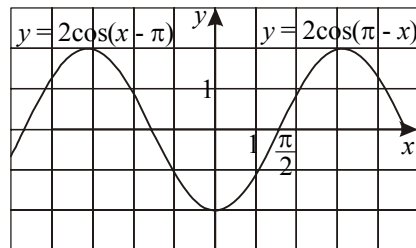
45. Kuvaajan perusteella

a)  $\sin^2 x$ : n perusjakso on  $\pi$       b)  $4\sin x \cos x$ : n perusjakso on  $\pi$   
 c)  $\sin x + \sin 2x$  perusjakso on  $2\pi$ .

46. a) Annetut käyrät yhtyvät.

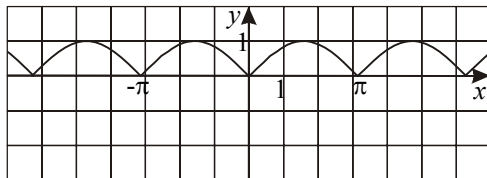


b) Annetut käyrät yhtyvät

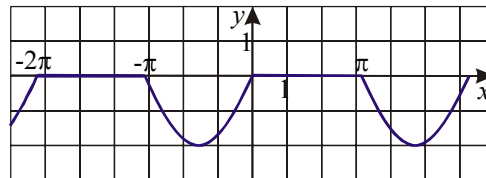


Kohdan a käyrät ja vastaavasti kohdan b käyrät ovat samat, koska kosini on parillinen funktio.

47. a)  $y = |\sin x|$



b)  $y = \sin x - |\sin x|$



48. a) Koska  $-1 \leq \cos 3x \leq 1$ , saadaan yhtälöt  $9 = 2 - a \cdot (-1)$  ja  $9 = 2 - a \cdot 1$ , joista  $a = \pm 7$ .

b) Kullakin  $a$ :n arvolla funktio  $f(x) = 3\cos 5x + 2a$  saa suurimman arvonsa kun  $\cos 5x$  saa suurimman arvonsa 1. Funktion suurin arvo on 9, kun  $a = 3$ .

49. Kuvaajasta nähdään jaksollisuus.

a) jakso  $\pi$       b) jakso  $2\pi$       c) jakso  $2\pi$   
 d) jakso  $2\pi$       e) jakso  $2\pi$       f) jakso  $\pi$

50. a) jakso  $2\pi$

b) Funktio  $g$  ei ole jaksollinen.

c) Funktio  $h$  ei ole jaksollinen.

## 5 Trigonometriset yhtälöt

### 5.1 Perusyhtälöitä

51. a) asteina  $x = n \cdot 360^\circ$  tai  $x = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$   
radiaaneina  $x = n \cdot 2\pi$  tai  $x = \pi + n \cdot 2\pi$
- b) asteina  $x = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$ , radiaaneina  $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$
- c) asteina  $x = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$ , radiaaneina  $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$
- d) asteina  $x = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$  tai  $x = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$   
radiaaneina  $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$  tai  $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$
- e) asteina  $x = n \cdot 360^\circ$ , radiaaneina  $x = n \cdot 2\pi$
- f) asteina  $x = 180^\circ + n \cdot 360^\circ$ , radiaaneina  $x = \pi + n \cdot 2\pi$
52. a) asteina  $x = n \cdot 180^\circ$ , radiaaneina  $x = n\pi$
- b) asteina  $x = 45^\circ + n \cdot 180^\circ$ , radiaaneina  $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$
- c) asteina  $x = 135^\circ + n \cdot 180^\circ$ , radiaaneina  $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$
53. a)  $x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$  tai  $x = \frac{11\pi}{6} + n \cdot 2\pi$       b)  $x = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$
- c)  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$
54. a)  $x \approx 20,2^\circ + n \cdot 360^\circ$  tai  $x \approx 159,8^\circ + n \cdot 360^\circ$       b)  $x \approx \pm 97,1^\circ + n \cdot 360^\circ$
- c)  $x \approx 72,3^\circ + n \cdot 180^\circ$       d) ei ratkaisua
55. a)  $x \approx 0,34 + n \cdot 2\pi$  tai  $x \approx 2,8 + n \cdot 2\pi$       b)  $x \approx \pm 1,9 + n \cdot 2\pi$
- c)  $x \approx 1,2 + n\pi$
56. a)  $x \approx 81,9^\circ + n \cdot 180^\circ$
- b) Ratkaistaan aluksi kulma  $2x$ . Sini on 0,5, kun kulma  $2x = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$  tai  $2x = 150^\circ + n \cdot 360^\circ$ . Tästä  $x = 15^\circ + n \cdot 180^\circ$  tai  $x = 75^\circ + n \cdot 180^\circ$ .
- c) Ratkaistaan ensin kulma  $\frac{2x}{3}$ . Kosini on  $\frac{1}{2}$ , kun  $\frac{2x}{3} = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$ . Tästä  $x = \pm 90^\circ + n \cdot 540^\circ$ .
57. a) Ratkaistaan aluksi kulma  $3x$ . Sini on  $\frac{3}{4}$ , kun  $3x \approx 48,6^\circ + n \cdot 360^\circ$  tai  $3x \approx 131,4^\circ + n \cdot 360^\circ$ . Tästä ratkaisuna  $x \approx 16,2^\circ + n \cdot 120^\circ$  tai  $x \approx 43,8^\circ + n \cdot 120^\circ$ .
- b) Yhtälöstä  $\tan 2x = 1$  saadaan  $2x = 45^\circ + n \cdot 180^\circ$  ja edelleen  $x = 22,5^\circ + n \cdot 90^\circ$ .

c) Aluksi siirretään  $\frac{1}{4}$  oikealle puolelle, jolloin yhtälö saa muodon  $\sin \frac{x}{4} = \frac{3}{4}$ . Yhtälö toteutuu, kun  $\frac{x}{4} \approx 48,6^\circ + n \cdot 360^\circ$  tai  $\frac{x}{4} \approx 131,4^\circ + n \cdot 360^\circ$ . Tästä edelleen  $x \approx 194,4^\circ + n \cdot 1440^\circ$  tai  $x \approx 525,6^\circ + n \cdot 1440^\circ$ .

58. a) Ratkaistaan aluksi kulma  $2x - \frac{\pi}{6}$ . Tangentti on  $-1$ , kun  $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ . Tästä ratkeaa  $2x = \frac{11\pi}{12} + n\pi$  ja edelleen  $x = \frac{11\pi}{24} + n \frac{\pi}{2}$ .

b) Siirretään  $\sqrt{3}$  oikealle puolelle, jolloin saadaan yhtälö  $\sin(\frac{\pi}{3} - x) = -\sqrt{3}$  ( $\approx -1,73$ ). Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisua, koska sinin arvojoukko on  $[-1, 1]$ .

59. a) Yhtälöstä  $\sin(2x - 60^\circ) = 0,342$  saadaan  $2x - 60^\circ \approx 20,0^\circ + n \cdot 360^\circ$  tai  $2x - 60^\circ \approx 160,0^\circ + n \cdot 360^\circ$ . Näistä edelleen  $2x \approx 80,0^\circ + n \cdot 360^\circ$  tai  $2x \approx 220,0^\circ + n \cdot 360^\circ$ . Ratkaisuna  $x \approx 40,0^\circ + n \cdot 180^\circ$  tai  $x \approx 110,0^\circ + n \cdot 180^\circ$

b) Yhtälöstä  $\cos(44^\circ - 3x) = -0,444$  saadaan  $44^\circ - 3x \approx \pm 116,4^\circ$ , josta  $-3x \approx -44^\circ \pm 116,4^\circ + n \cdot 360^\circ$  ja edelleen  $x \approx -24,1^\circ + n \cdot 120^\circ$  tai  $x \approx 53,5^\circ + n \cdot 120^\circ$ .

c) Yhtälöstä  $\tan(5x + 11^\circ) = 0,25$  saadaan  $5x + 11^\circ \approx 14,0^\circ + n \cdot 180^\circ$  ja edelleen  $5x \approx 3,0^\circ + n \cdot 180^\circ$ . Ratkaisuna  $x \approx 0,6^\circ + n \cdot 36^\circ$ .

60. Yhtälön  $\cos 2x = \frac{1}{2}$  ratkaisu on  $x = \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$ . Eri kohtien ratkaisut ovat seuraavat:

a)  $x = 30^\circ + n \cdot 180^\circ$  tai  $x = 60^\circ + n \cdot 180^\circ$

b)  $x = 30^\circ + n \cdot 90^\circ$

c)  $x \approx \pm 75,5^\circ + n \cdot 360^\circ$

d)  $x = \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$

e) Yhtälö saatetaan aluksi muotoon  $\cos^2 x = \frac{3}{4}$  ja edelleen  $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ratkaisuna on  $x = \pm 30^\circ + n \cdot 360^\circ$  tai  $x = \pm 150^\circ + n \cdot 360^\circ$ . Kun ratkaisut yhdistetään, saadaan  $x = \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$ .

Alkuperäisen yhtälön kanssa sama ratkaisu on kohtien d ja e yhtälöillä.

61. Yhtälön  $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ratkaisu on  $x = \frac{\pi}{8} + n\pi$  tai  $x = \frac{3\pi}{8} + n\pi$ . Kun  $n = -1$ , saadaan ratkaisuksi  $x = -\frac{5\pi}{8}$ .

62. Kirjoitetaan yhtälö aluksi muotoon  $\cos 3x = \frac{1-5a}{4}$ . Ottamalla huomioon, että  $-1 \leq \cos 3x \leq 1$ , saadaan kaksoisepäyhtälö  $-1 \leq \frac{1-5a}{4} \leq 1$ , jonka ratkaisuna on  $-\frac{3}{5} \leq a \leq 1$ .

- 63.** a) Yhtälöstä  $\sin^2 x - 1 = 0$  saadaan  $\sin x = \pm 1$ , jonka ratkaisuna  $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$  tai  $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ . Ratkaisujen yhdistäminen antaa tulokseksi  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ .
- b) Erottamalla yhteinen tekijä yhtälö saadaan muotoon  $\sin x(\sin x + 1) = 0$ , josta jatketaan tulon nollasäännöllä.  $\sin x = 0$ , kun  $x = n\pi$ . Vastaavasti  $\sin x + 1 = 0$ , kun  $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ .
- c) Erottamalla yhteinen tekijä yhtälö saadaan muotoon  $\cos x(\cos x - 5) = 0$ . Tästä  $\cos x = 0$ , kun  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ . Yhtälöllä  $\cos x - 5 = 0$  ei ole ratkaisua.
- 64.** a) Toisen asteen yhtälö ratkaistaan  $\sin x$ :n suhteen. Saadaan  $\sin x = \frac{1}{2}$  tai  $\sin x = -1$ . Edellisen ratkaisuna  $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$  tai  $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ . Jälkimmäisestä yhtälöstä  $x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ .
- b) Ratkaistaan toisen asteen yhtälö  $\cos x$ :n suhteen. Saadaan  $\cos x = 1$  tai  $\cos x = -\frac{1}{2}$ . Edellisen ratkaisuna  $x = n \cdot 2\pi$  ja jälkimmäisen  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ .
- 65.** Koska funktio on murtolauseke, jonka osoittaja on vakio ja nimittäjä aina positiivinen, saavuttaa  $f$  suurimman (tai pienimmän) arvonsa, kun nimittäjä saavuttaa vastavasti pienimmän (tai suurimman) arvonsa. Tämä taas tapahtuu silloin, kun  $\cos 2x$ :llä on pienin (suurin) arvonsa.  $\cos 2x$ :n pienin arvo on  $-1$  ja suurin arvo  $+1$ . Pienin arvo saavutetaan, kun  $2x = \pi + n \cdot 2\pi$ , josta  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ . Suurin arvo  $\cos 2x$ :llä on, kun  $2x = n \cdot 2\pi$ , josta  $x = n\pi$ . Näin ollen funktion  $f$  suurin arvo on  $\frac{5}{4 + 3 \cdot (-1)} = 5$ , kun  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ , ja pienin arvo  $\frac{5}{4 + 3 \cdot 1} = \frac{5}{7}$ , kun  $x = n\pi$ .
- 66.** a) Annetuilla matkan ja alkunopeuden arvoilla saadaan  $\sin 2\alpha \approx 0,8707$ , jonka ratkaisuna  $\alpha \approx 30^\circ$  tai  $\alpha \approx 60^\circ$ .
- b) Kantaman lauseke saa suurimman arvonsa 69 m, kun  $\sin 2\alpha = 1$  eli  $\alpha = 45^\circ$ .
- 67.** a)  $y = 20 \cos(3 \cdot 1,7) \approx 7,6$
- b) Yhtälö  $20 \cos 3t = 0$  toteutuu, kun  $\cos 3t = 0$ , josta  $3t = \frac{\pi}{2} + n\pi$  ja  $t = \frac{\pi}{6} + n \frac{\pi}{3}$ . Antamalla  $n$ :lle arvoja 0, 1, 2, ... saadaan  $t \approx 0,5$  s; 1,6 s; 2,6 s; 3,7 s jne.

68. a)  $y(3) = 350 + 350 \cdot \cos \frac{3\pi}{2} = 350$  (kpl)
- b) Yhtälön  $350 + 350 \cos \frac{\pi t}{2} = 0$  ratkaisuna  $t = 2 + 4n$ , jonka kaksi ensimmäistä positiivista arvoa ovat 2 ja 6 (vuotta).
- c) Vaihtelujakson pituus on neljä vuotta.
69. Suurin veden korkeus on 6,0 m. Se saavutetaan, kun  $\cos x = 1$ . Pienin veden korkeus 1,0 m saavutetaan arvolla  $\cos x = -1$ . Vastaavat kellonajat saadaan ratkaisemalla aika  $t$  yhtälöistä  $\cos \frac{\pi(t-2)}{6} = 1$  tai  $\cos \frac{\pi(t-2)}{6} = -1$ . Edellinen antaa kellonajat 2 ja 14, jälkimmäinen ajat 8 ja 20.

## 5.2 Yleisempiä yhtälöitä

70. a) Yhtälö  $\sin 2x = \sin x$  toteutuu, kun  $2x = x + n \cdot 360^\circ$  tai  $2x = 180^\circ - x + n \cdot 360^\circ$ . Edellisestä  $x = n \cdot 360^\circ$  ja jälkimmäisestä  $x = 60^\circ + n \cdot 120^\circ$ .
- b) Yhtälö  $\cos 3x = \cos x$  toteutuu, kun  $3x = \pm x + n \cdot 360^\circ$ . Edelleen saadaan  $2x = n \cdot 360^\circ$ , josta  $x = n \cdot 180^\circ$ , tai  $4x = n \cdot 360^\circ$ , josta  $x = n \cdot 90^\circ$ . Ratkaisujen yhdistäminen antaa tulokseksi  $x = n \cdot 90^\circ$ .
- c) Yhtälön  $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \cos x$  ratkaisuna saadaan aluksi  $x + \frac{\pi}{6} = \pm x + n \cdot 2\pi$ . Tästä jatkamalla päädytään muotoon  $2x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ , jolloin  $x = -\frac{\pi}{12} + n\pi$ .
- d) Yhtälö  $\tan 2x = \tan(x + 30^\circ)$  toteutuu, kun  $2x = x + 30^\circ + n \cdot 180^\circ$ . Ratkaisuna saadaan  $x = 30^\circ + n \cdot 180^\circ$ .
71. a) Yhtälö  $\sin(x - 45^\circ) = \sin 3x$  toteutuu, kun  $x - 45^\circ = 3x + n \cdot 360^\circ$  tai  $x - 45^\circ = 180^\circ - 3x + n \cdot 360^\circ$ . Edellisestä  $x = -22,5^\circ + n \cdot 180^\circ$  ja jälkimmäisestä  $x \approx 56,3^\circ + n \cdot 90^\circ$ .
- b) Yhtälö  $\sin(x + 45^\circ) = \sin(30^\circ - x)$  toteutuu, kun  $x + 45^\circ = 30^\circ - x + n \cdot 360^\circ$  tai  $x + 45^\circ = 180^\circ - (30^\circ - x) + n \cdot 360^\circ$ . Edellisestä  $x = -7,5^\circ + n \cdot 180^\circ$ . Jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisua.
- c) Yhtälö  $\cos 2x = \cos(x + 75^\circ)$  toteutuu, kun  $2x = \pm(x + 75^\circ) + n \cdot 360^\circ$ . Edelleen  $2x = x + 75^\circ + n \cdot 360^\circ$ , josta  $x = 75^\circ + n \cdot 360^\circ$ , tai  $2x = -x - 75^\circ + n \cdot 360^\circ$ , joka antaa tuloksen  $x = -25^\circ + n \cdot 120^\circ$ .
72. Yhtälö ei toteudu kohdissa, joissa  $\cos x = 0$ . Jakamalla yhtälö  $\cos x$ :llä saadaan muoto  $\tan x = 2$ , josta  $x \approx 1,1 + n\pi$ . Annetulla välillä  $[0, 2\pi]$  ovat näistä ratkaisuista  $x \approx 1,1$  ja  $x \approx 4,2$ .

**73.** Yhtälö  $\sin(\frac{\pi}{3} - x) = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$  toteutuu, kun  $\frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{4} - x + n \cdot 2\pi$  tai  $\frac{\pi}{3} - x = \pi - (\frac{\pi}{4} - x) + n \cdot 2\pi$ . Edellisestä saadaan  $\frac{\pi}{12} = n \cdot 2\pi$ , joten sillä yhtälöllä ei ole ratkaisua. Jälkimmäisestä saadaan  $2x = -\frac{5\pi}{12} + n \cdot 2\pi$ , josta  $x = -\frac{5\pi}{24} + n\pi$ .

**74. a)** Muutetaan yhtälö aluksi muotoon  $\sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$ . Tämä toteutuu, kun  $2x = \frac{\pi}{2} - 3x + n \cdot 2\pi$  tai  $2x = \pi - (\frac{\pi}{2} - 3x) + n \cdot 2\pi$ . Edellinen sievennyy yhtälöksi  $5x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ , jonka ratkaisuna on  $x = \frac{\pi}{10} + n \frac{2\pi}{5}$ . Jälkimmäinen yhtälöistä antaa ratkaisun  $x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ .

**b)** Kirjoitetaan aluksi  $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{6} - x)) = \sin(\frac{\pi}{3} + x)$ . Tämä toteutuu, kun  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + x + n \cdot 2\pi$  tai  $x + \frac{\pi}{4} = \pi - (\frac{\pi}{3} + x) + n \cdot 2\pi$ . Edellisellä yhtälöllä ei ole ratkaisua. Jälkimmäisestä  $2x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot 2\pi$  ja edelleen  $x = \frac{5\pi}{24} + n\pi$ .

*Toinen aloitustapa:* Palautuskaavalla  $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$  saadaan yhtälö  $\cos(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{6} - x)$  eli  $\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \cos(\frac{\pi}{6} - x)$ , josta  $\frac{\pi}{4} - x = \pm(\frac{\pi}{6} - x) + n \cdot 2\pi$ . Tämä johtaa ratkaisuun  $x = \frac{5\pi}{24} + n\pi$ .

**75. a)** Muutetaan yhtälö  $\cos x$ :llä jakamalla muotoon  $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \sqrt{3}$ . Tästä ratkaisuna  $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$ .

**b)** Kirjoitetaan yhtälö ensin muotoon  $\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - (2x + \frac{\pi}{2}))$ , josta  $\sin x = \sin(-2x)$ . Tämä yhtälö toteutuu, kun  $x = -2x + n \cdot 2\pi$  tai  $x = \pi + 2x + n \cdot 2\pi$ . Edellisestä saadaan  $3x = n \cdot 2\pi$  ja edelleen  $x = n \frac{2\pi}{3}$ , jälkimmäisestä  $x = \pi + n \cdot 2\pi$ .

**76. a)** Kun yhtälö jaetaan  $-3 \cos x$ :llä, saadaan  $\tan x = -\frac{2}{3}$ , jonka ratkaisuna  $x \approx -0,59 + n\pi$ .

**b)** Termin siirrolla yhtälö saa muodon  $\sqrt{3} \sin x = \cos x$ , josta edelleen  $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Tämän ratkaisuna  $x = \frac{\pi}{6} + n\pi$ .

77. Kyseinen kulma  $x$  ratkaistaan yhtälöstä  $\cos x = \frac{1}{2} \sin x$ , kun  $x \in ]0^\circ, 90^\circ[$ . Kun yhtälö jaetaan  $\frac{1}{2} \cos x$ :llä, saadaan  $\tan x = 2$ , jonka ratkaisuna terävä kulma  $x \approx 63,4^\circ$ .
78. Termin siirrolla yhtälö saadaan muotoon  $\sin x = -\sin 3x$ , josta sinin parittomuuden perusteella päädytään muotoon  $\sin x = \sin(-3x)$ . Yhtälö toteutuu, kun  $x = -3x + n \cdot 360^\circ$  tai  $x = 180^\circ + 3x + n \cdot 360^\circ$ . Edellinen antaa ratkaisuksi  $x = n \cdot 90^\circ$  ja jälkimmäinen  $x = -90^\circ + n \cdot 180^\circ$ . Väliin  $[0^\circ, 360^\circ]$  ratkaisuisista kuuluvat  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  ja  $360^\circ$ .
79. a) Muutetaan yhtälö muotoon  $\sin(0,5x + 2,53) = \sin(\frac{\pi}{2} - 1,5x)$ . Yhtälö toteutuu, kun  $0,5x + 2,53 = \frac{\pi}{2} - 1,5x + n \cdot 2\pi$  tai  $0,5x + 2,53 = \pi - (\frac{\pi}{2} - 1,5x) + n \cdot 2\pi$ . Edellinen sievenee muotoon  $2x \approx -0,96 + n \cdot 2\pi$ , josta ratkaisuna  $x \approx -0,48 + n\pi$ . Jälkimmäisen yhtälö sievenee muotoon  $-x \approx -0,96 + n \cdot 2\pi$ , josta ratkaisuna  $x \approx 0,96 + n \cdot 2\pi$ .
- b) Lausumalla kosini sininä ja käyttämällä kaavaa  $\sin(-x) = -\sin x$  saadaan yhtälö  $\sin(\frac{\pi}{2} - (5x + \frac{\pi}{3})) = \sin(-2x - \frac{\pi}{2})$ , joka toteutuu, kun  $\frac{\pi}{2} - (5x + \frac{\pi}{3}) = -2x - \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$  tai  $\frac{\pi}{2} - (5x + \frac{\pi}{3}) = \pi - (-2x - \frac{\pi}{2}) + n \cdot 2\pi$ . Edellinen yhtälöistä sievenee muotoon  $3x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ , josta ratkeaa  $x = \frac{2\pi}{9} + n \frac{2\pi}{3}$ . Jälkimmäinen yhtälö sievenee muotoon  $7x = -\frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ , jonka ratkaisuna  $x = -\frac{4\pi}{21} + n \frac{2\pi}{7}$ .
80. Juurtamalla päästään yhtälöihin  $\sin x + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  tai  $\sin x + \sqrt{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ , joista edelleen  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  tai  $\sin x = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$ . Jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisuja, koska sinin pienin arvo on  $-1$ . Edellinen yhtälö toteutuu, kun  $x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$  tai  $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ .
81. Lausumalla tangenti sinin ja kosinin avulla saadaan muoto  $\sin 2x - \frac{3 \sin 2x}{2 \cos 2x} = 0$ , josta edelleen  $\sin 2x(1 - \frac{3}{2 \cos 2x}) = 0$ . Tulon nollasäännön perusteella  $\sin 2x = 0$  tai  $1 - \frac{3}{2 \cos 2x} = 0$ . Jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisuja. Yhtälön  $\sin 2x = 0$  ratkaisuna  $x = n \frac{\pi}{2}$ .

82. Muutetaan yhtälö  $\sin x = 5 - a^2 \sin x$  muotoon  $\sin x = \frac{5}{1+a^2}$ . Koska  $-1 \leq \sin x \leq 1$  ja  $\frac{5}{1+a^2} > 0$ , on oltava  $\frac{5}{1+a^2} \leq 1$  eli  $5 \leq 1+a^2$ . Tästä edelleen  $a^2 \geq 4$  eli  $|a| \geq 2$ .

Vastaus: Yhtälöllä on ratkaisu arvoilla  $a \leq -2$  tai  $a \geq 2$ .

83. Yhtälöllä  $2 \sin^2 x + 3 \sin x + a = 0$  on välillä  $]0, 2\pi[$  tarkalleen yksi ratkaisu silloin, kun  $\sin x = 1$  tai  $\sin x = -1$ . Edellinen ehto antaa  $a = -5$  ja jälkimmäinen  $a = 1$ . Arvo  $a = 1$  ei kuitenkaan käy, koska silloin sinille tulisi yhtälöstä myös arvo  $-\frac{1}{2}$ . Sitä vas-

toin arvo  $a = -5$  tuottaa sinin toiseksi arvoksi  $-2\frac{1}{2}$ , joka ei johda ratkaisuihin.

Kun  $a = 0$ , yhtälö saa muodon  $2 \sin^2 x + 3 \sin x = 0$  ja edelleen  $\sin x(2 \sin x + 3) = 0$ . Soveltamalla tulon nollasääntöä saadaan  $\sin x = 0$  tai  $2 \sin x + 3 = 0$ . Jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisua, edellisen ratkaisu on  $x = \pi$ , kun  $x = ]0, 2\pi[$ .

Yhteenvedon:  $a = 0$  tai  $a = -5$ .

### \*5.3 Trigonometrinen muunnoskaavojen käyttö

84. a)  $\sin(x + 30^\circ) = \sin x \cdot \cos 30^\circ + \cos x \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$   
 b)  $\cos(x - 60^\circ) = \cos x \cdot \cos 60^\circ + \sin x \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$   
 c)  $\tan(x + 45^\circ) = \frac{\tan x + \tan 45^\circ}{1 - \tan x \cdot \tan 45^\circ} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$
85. a)  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cdot \cos \alpha - \cos \pi \cdot \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - (-1) \sin \alpha = \sin \alpha$   
 b)  $\cos(\pi + \alpha) = \cos \pi \cdot \cos \alpha - \sin \pi \cdot \sin \alpha = -1 \cdot \cos \alpha - 0 \cdot \sin \alpha = -\cos \alpha$   
 c)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin \alpha = 1 \cdot \cos \alpha - 0 \cdot \sin \alpha = \cos \alpha$
86. a)  $\cos(\alpha + 45^\circ) + \cos(\alpha - 45^\circ)$   
 $= \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ - \sin \alpha \cdot \sin 45^\circ + \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ + \sin \alpha \cdot \sin 45^\circ$   
 $= 2 \cos \alpha \cdot \cos 45^\circ = 2 \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos \alpha$   
 b)  $\sin(\beta - 60^\circ) - \sin(\beta + 60^\circ)$   
 $= \sin \beta \cdot \cos 60^\circ - \cos \beta \cdot \sin 60^\circ - \sin \beta \cdot \cos 60^\circ - \cos \beta \cdot \sin 60^\circ$   
 $= -2 \cos \beta \cdot \sin 60^\circ = -2 \cos \beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \cos \beta$
87. a)  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2 - 1 = \frac{8}{25} - 1 = -\frac{17}{25}$   
 b)  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{5}{2}}{1 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = -\frac{20}{21}$

- 88.** Peruskaavasta  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  saadaan  $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$ . Koska  $x$  on kolmannessa neljänneksessä, kosini on negatiivinen, joten etumerkiksi on valittava miinus.  $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot (-\sqrt{1 - \sin^2 x}) = 2 \cdot (-\frac{8}{17}) \cdot (-\frac{15}{17}) = \frac{240}{289}$
- 89.** Muunnoskaavoja käyttäen yhtälö  $\sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  saadaan muotoon  $\sin 2x = \cos 2x$ , josta edelleen  $\tan 2x = 1$ . Ratkaisuna  $x = \frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}$ .
- 90.** a) Alkuperäinen yhtälö saadaan muotoon  $\sin 2x = \frac{1}{2}$ , joka toteutuu, kun  $x = \frac{\pi}{12} + n\pi$  tai  $x = \frac{5\pi}{12} + n\pi$ .
- b) Yhtälö saadaan muotoon  $\cos 2x = \cos x$ , joka toteutuu, kun  $2x = \pm x + n \cdot 2\pi$ . Ratkaisuina  $x = n \cdot 2\pi$  tai  $x = n\frac{2\pi}{3}$ .
- 91.** a) Muokataan yhtälön vasenta puolta:  
 $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \cdot \cos 2x = \cos 2x$   
 Yhtälö saa siis muodon  $\cos 2x = \sin 2x$ , josta edelleen  $\tan 2x = 1$ . Tämän yhtälön ratkaisuna  $x = \frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}$ .
- b) Ratkaistaan toisen asteen yhtälö  $\cos x : n$  suhteen. Tällöin  $\cos x = \frac{3 \pm 5}{4}$ , joista ratkaisuista vain  $\cos x = -\frac{1}{2}$  käy. Siitä ratkeaa  $x = \pm\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ .
- 92.** a) Muokataan aluksi yhtälö muotoon  $2 \cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0$  ja edelleen muotoon  $2 \cos^2 x + \cos x = 0$ . Erottamalla yhteinen tekijä saadaan  $\cos x(2 \cos x + 1) = 0$ . Tästä ratkaisuna  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$  tai  $x = \pm\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ .
- b) Yhtälö  $\frac{\sin 2x}{\tan x} = 1$  on määritelty, kun  $x \neq n\frac{\pi}{2}$ . Muokataan yhtälö ensin muotoon  $\frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = 1$  ja edelleen yhtälöksi  $2 \cos^2 x = 1$ . Ratkaistusta muodosta  $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$  saadaan juuret  $x = \pm\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$  tai  $x = \pm\frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ . Yhdistämällä ratkaisut päästään tulokseen  $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$ .
- 93.** Koska  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ , voidaan funktio  $f$  esittää muodossa  $f(x) = -2 \sin^2 x + 2 \sin x + 1$ . Muokataan funktion lauseke sellaiseksi, että siitä voidaan päätellä suurin ja pienin arvo:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -2\sin^2 x + 2\sin x + 1 \\
 &= -2(\sin^2 x - \sin x) + 1 \\
 &= -2\left(\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4}\right) + 1 + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2} - 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

Funktion  $f$  suurin arvo on  $\frac{3}{2}$ , kun  $\sin x - \frac{1}{2} = 0$ . Pienin arvo on  $-3$ , kun  $\sin x = -1$ .

*Toinen ratkaisutapa* perustuu funktion derivaatan käyttöön. Ks. seuraava luku.

- 94.** Taulukkokirjan kaavan  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$  nojalla yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon  $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1,41422$ , josta  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1,41422}{\sqrt{2}} \approx 1,00000455$ . Yhtälöllä ei ole reaaliuusia, koska tulee olla  $-1 \leq \sin f(x) \leq 1$ .

- 95.** Koska kyse on kolmion kulmista, pätee yhtälö  $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ . Silloin  $\sin \alpha \sin \beta = \cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$ . Tästä seuraa, että  $\cos \alpha \cos \beta = 0$ , jolloin joko  $\cos \alpha = 0$  tai  $\cos \beta = 0$ . Tällöin joko  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  tai  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Molemmissa tapauksissa kolmio on suorakulmainen.

- 96.** Koska  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  ja  $\pi \leq y \leq 2\pi$ , on  $\cos x = +\sqrt{1 - \sin^2 x}$  ja  $\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y}$ . Tällöin

$$\begin{aligned}
 \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \cdot \left(-\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2}\right) \\
 &= -\frac{1}{12} + \sqrt{\frac{15}{16}} \cdot \sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{1}{12} + \frac{2\sqrt{30}}{12} = \frac{2\sqrt{30} - 1}{12} \\
 &\approx 0,83.
 \end{aligned}$$

- 97.** Ehdosta  $\tan x = \cos x$  saadaan  $\frac{\sin x}{\cos x} = \cos x$  ( $\cos x \neq 0$ ) ja edelleen

$$\sin x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x. \text{ Yhtälön } \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \text{ ratkaisuna}$$

$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Merkkivaihtoehdoista vain plusmerkki käy. Kulmalle  $x$  saadaan asteina kaksidesimaaliset likiarvot  $x \approx 38,17^\circ + n \cdot 360^\circ$  tai  $x \approx 141,83^\circ + n \cdot 360^\circ$ .

## 6 Trigonometristen funktioiden derivaatat

98. a)  $D(2 \sin 3x) = 2 \cdot 3 \cos 3x = 6 \cos 3x$     b)  $D \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$   
 c)  $D(-\cos x) = -(-\sin x) = \sin x$     d)  $D(4 \cos 8x) = 4 \cdot 8 \cdot (-\sin 8x) = -32 \sin 8x$

99. a)  $D \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$     b)  $D \cos \frac{x}{3} = \frac{1}{3} \cdot (-\sin \frac{x}{3}) = -\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3}$   
 c)  $D \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot (-\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$   
 d)  $D \tan 3x = 3(1 + \tan^2 3x)$

100. a)  $D(x^2 \sin x) = 2x \cos x + x^2 \cos x$   
 b)  $D \frac{\sin x}{x^2} = \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4} = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$   
 c)  $D(x \cos x) = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x \sin x$     d)  $D \frac{\cos x}{x} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$

101. a)  $D(\sin 2x - \cos 3x) = 2 \cos 2x + 3 \sin 3x$   
 b)  $D(\sin^2 x + \cos^2 x) = D1 = 0$  (Termeittäin derivointi johtaa luonnollisesti samaan.)  
 c)  $D \sin^3 x = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$     d)  $D \tan^2 x = 2 \tan x(1 + \tan^2 x)$

102. a)  $\frac{d}{dt}(A \cos(\omega t + \varphi)) = -A \omega \sin(\omega t + \varphi)$   
 b)  $\frac{d}{dt}(\sin \omega t \cos \omega t)$   
 $= \omega \cos \omega t \cos \omega t - \omega \sin \omega t \sin \omega t = \omega(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = \omega \cos 2\omega t$

103. a) Kun  $f(x) = x + \sin x$ , niin  $f'(x) = 1 + \cos x$ . Yhtälön  $1 + \cos x = 0$  ratkaisuna  $x = \pi + n \cdot 2\pi$ .

b) Kun  $f(x) = \frac{3x}{2} - \cos x$ , niin  $f'(x) = \frac{3}{2} + \sin x$ . Yhtälöllä  $\frac{3}{2} + \sin x = 0$  eli  $\sin x = -\frac{3}{2}$  ei ole ratkaisua.

c) Kun  $f(x) = \sin x - \cos x$ , niin  $f'(x) = \cos x + \sin x$ . Yhtälö  $\cos x + \sin x = 0$  saadaan muotoon  $\tan x = -1$ . Ratkaisuna on  $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ .

104. Ratkaistaan yhtälö  $D \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ . Derivoinnin jälkeen yhtälö on muodossa  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ , josta  $\frac{\pi}{2} - x = x + n \cdot 2\pi$  tai  $\frac{\pi}{2} - x = \pi - x + n \cdot 2\pi$ . Edellinen antaa ratkaisuksi  $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ , jälkimmäisellä yhtälöllä ei ole ratkaisua.

$$105. D \tan x = D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Koska  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , saadaan tulokseksi  $\frac{1}{\cos^2 x}$ . Vaihtoehtoinen tulos saadaan

$$\text{jakamalla termeittäin: } \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

$$106. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{2} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \cdot (x + 1) = 1 \cdot 2 = 2$$

107. Käyrälle  $y = \sin x$  pisteeseen  $(\frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6})$  piirretyn tangentin yhtälö on muotoa

$$y - \sin \frac{\pi}{6} = f'(\frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{6}). \text{ Yhtälö sievenee muotoon } y - \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{6}(x - \frac{\pi}{6}), \text{ josta}$$

$$\text{edelleen } y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) \text{ ja lopuksi } y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{6 - \sqrt{3}\pi}{12}.$$

108. Funktio  $\sin 2(x + \frac{\pi}{4})$  saa suurimman arvonsa 1 kohdissa, joissa

$$2(x + \frac{\pi}{4}) = 2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi. \text{ Ratkaistuna nämä kohdat ovat } n\pi.$$

109. Kun  $f(x) = A \sin x + B \cos x$ , on  $f'(x) = A \cos x - B \sin x$ . Ehdot  $f(\frac{\pi}{2}) = \pi$  ja

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 2 \text{ johtavat yhtälöpariin } A = \pi \text{ ja } -B = 2. \text{ Ratkaisuna } A = \pi, B = -2.$$

110. Funktio  $f(x) = \sin^2 x + \cos x$  on jaksollinen, perusjaksona  $2\pi$ , joten kaikki funktion arvot esiintyvät välillä  $[0, 2\pi]$ . Derivaatta on  $f'(x) = 2 \sin x \cos x - \sin x$

$$= \sin x(2 \cos x - 1). \text{ Se saa arvon } 0, \text{ kun } \sin x = 0 \text{ tai } \cos x = \frac{1}{2}. \text{ Nollakohdista ovat}$$

$$\text{välillä } [0, 2\pi] \text{ vain } 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \text{ ja } 2\pi. \text{ Arvoista } f(0) = f(2\pi) = 1, f(\frac{\pi}{3}) = 1\frac{1}{4},$$

$$f(\pi) = -1 \text{ ja } f(\frac{5\pi}{3}) = 1\frac{1}{4} \text{ suurin on } 1\frac{1}{4}.$$

111. Funktio  $f(x) = \cos^2 x + \sin x$  on jaksollinen, perusjaksona  $2\pi$ , joten kaikki funktion arvot esiintyvät välillä  $[0, 2\pi]$ . Derivaatta on  $f'(x) = 2 \cos x \cdot (-\sin x) + \cos x$

$$= \cos x \cdot (-2 \sin x + 1). \text{ Se saa arvon } 0, \text{ kun } \cos x = 0 \text{ tai } \sin x = \frac{1}{2}. \text{ Nollakohdista ovat}$$

välillä  $[0, 2\pi]$  vain  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{6}$  ja  $\frac{5\pi}{6}$ . Arvoista  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ ,  $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$ ,  $f(\frac{\pi}{6}) = 1\frac{1}{4}$ ,  $f(\frac{5\pi}{6}) = 1\frac{1}{4}$  ja  $f(0) = f(2\pi) = 1$  pienin on  $-1$ .

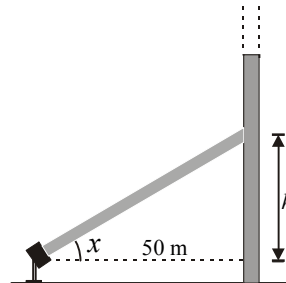
**112.** Tutkitaan funktion  $f$  derivaatan  $f'(x) = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{3})$  merkkiä välillä  $[0, \pi]$ . Derivaatan nollakohdat saadaan yhtälöstä  $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + n\pi$  eli  $x = \frac{5\pi}{12} + n\frac{\pi}{2}$ . Näistä ovat välillä  $[0, \pi]$  arvot  $x = \frac{5\pi}{12}$  ja  $x = \frac{11\pi}{12}$ . Koska  $f'(x) > 0$  väleillä  $0 \leq x < \frac{5\pi}{12}$  ja  $\frac{11\pi}{12} < x \leq \pi$ , ja  $f'(x) < 0$  välillä  $\frac{5\pi}{12} < x < \frac{11\pi}{12}$ , on kysytty osaväli  $[\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}]$ .

**113. a)** Funktion  $f(x) = 3 - \cos x$  suurin arvo on  $4$ , ja se saavutetaan, kun  $\cos x = -1$ . Pienin arvo  $2$  tulee kosinin arvolla  $1$ .

**b)** Funktion  $f(x) = 5 - 2 \sin^2 x$  suurin arvo  $5$  saadaan, kun  $\sin^2 x = 0$ . Pienin arvo  $3$  saavutetaan, kun  $\sin^2 x = 1$ .

**c)** Funktiolla  $f(x) = \frac{1}{3 + \sin x}$  on suurin arvo, kun nimittäjällä on pienin positiivinen arvo. Näin on, kun  $\sin x = -1$ . Suurin arvo on  $\frac{1}{2}$ . Pienin arvo  $\frac{1}{4}$  tulee sinin suurimmalla arvolla  $1$ .

**114.** Koska  $h(x) = 50 \tan x$ , niin  $h'(x) = 50(1 + \tan^2 x)$ . Silloin  $h'(\frac{\pi}{4}) = 50(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}) = 100$ , joten korkeuden  $h$  muuttumisnopeus sanotulla hetkellä on  $100$  m/rad eli  $1,7$  m/°.



**115.** Funktion  $f(x) = \sin x$  derivaatta on  $f'(x) = \cos x$ . Välillä  $0 \leq x \leq \pi/2$  on voimassa  $f'(x) \geq 0$ . Derivaatta on  $0$  vain yksittäisessä kohdassa  $x = \frac{\pi}{2}$ , joten  $f$  on aidosti kasvava ja  $f^{-1}$  näin ollen olemassa. Yhtälöstä  $\frac{1}{2} = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$ , saadaan  $x = \frac{\pi}{6}$ . Kysytty derivaatta on näin ollen  $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

**116.** Funktion  $f(x) = \sin x \cos(x + a)$  suurin ja pienin arvo löydetään mukavimmin muokkaamalla laskulauseke toiseen muotoon esimerkiksi käyttämällä kaavaa  $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y))$ . Tällöin funktion lauseke saadaan muotoon

$\frac{1}{2}(\sin(2x+a) + \sin(-a)) = \frac{1}{2}(\sin(2x+a) - \sin a)$ . Siitä nähdään suoraan, että funkti-  
 on suurin arvo on  $\frac{1}{2}(1 - \sin a)$  ja pienin  $\frac{1}{2}(-1 - \sin a) = -\frac{1}{2}(1 + \sin a)$ .

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{117. a)} & f(x) = \sin x & f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4n)}(x) = \sin x \\
 & f'(x) = \cos x & f^{(5)}(x) = \cos x & f^{(4n+1)}(x) = \cos x \\
 & f''(x) = -\sin x & f^{(6)}(x) = -\sin x & f^{(4n+2)}(x) = -\sin x \\
 & f'''(x) = -\cos x & f^{(7)}(x) = -\cos x & f^{(4n+3)}(x) = -\cos x
 \end{array}$$

Voidaan päätellä, että  $f^{(27)}(x) = f^{(4 \cdot 6 + 3)}(x) = -\cos x$ .

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{b)} & f(x) = \cos x & f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4n)}(x) = \cos x \\
 & f'(x) = -\sin x & f^{(5)}(x) = -\sin x & f^{(4n+1)}(x) = -\sin x \\
 & f''(x) = -\cos x & f^{(6)}(x) = -\cos x & f^{(4n+2)}(x) = -\cos x \\
 & f'''(x) = \sin x & f^{(7)}(x) = \sin x & f^{(4n+3)}(x) = \sin x
 \end{array}$$

Voidaan päätellä, että  $f^{(27)}(x) = f^{(4 \cdot 6 + 3)}(x) = \sin x$ .

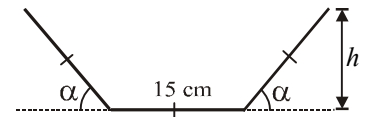
**118.** Vesi nousee nopeimmin, kun  $h'(t) = \frac{-2,5 \text{ m} \cdot \pi}{6} \sin \frac{\pi(t-2)}{6}$  saa suurimman arvonsa.

Näin käy, kun  $\sin \frac{\pi(t-2)}{6} = -1$  eli  $\frac{\pi(t-2)}{6} = \frac{3\pi}{2} + n2\pi$ , josta  $t = 11 + 12n$ . Tähän  
 sopivat  $n$ :n arvot 0 ja 1, joten kysytyt ajankohdat ovat klo 11 ja klo 23.

Vastaavasti vesi laskee nopeimmin, kun  $h'(t)$  saa pienimmän arvonsa. Näin käy, kun  
 $\sin \frac{\pi(t-2)}{6} = 1$  eli  $\frac{\pi(t-2)}{6} = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ , josta  $t = 5 + 12n$ . Tähän sopivat  $n$ :n arvot 0  
 ja 1, joten kysytyt ajankohdat ovat klo 5 ja klo 17.

**119.** Valitaan muuttujaksi kulma  $\alpha$  ja lausutaan kourun poikkipinta-ala  $\alpha$ :n avulla.

$$\begin{aligned}
 A(\alpha) &= 15h + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cos \alpha \cdot h \\
 &= 15(15 \sin \alpha + 15 \cos \alpha \cdot \sin \alpha) \\
 &= 225(\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha)
 \end{aligned}$$



Tarkastelu voidaan rajata välille  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , sillä suoran kulman ylityksen jälkeen  
 poikkipinta-ala pienenee. Ratkaistaan derivaatan  $A'(\alpha) = 225(\cos \alpha + \cos 2\alpha)$  nolla-  
 kohdat.

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

Saadaan  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$  tai  $\cos \alpha = -1$ . Tarkasteluvälillä  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

Luvuista  $A(0) = 0$ ,  $A(\frac{\pi}{2}) = 225$  ja  $A(\frac{\pi}{3}) = \frac{675\sqrt{3}}{4} \approx 292$  viimeksi mainittu on suurin. Kouru kuljettaa eniten vettä, kun poikkipinta-ala on suurin mahdollinen. Näin on, kun  $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ , jolloin  $A \approx 292 \text{ cm}^2$ .

- 120.** Lämpötila  $l(t) = 22 - 2,7 \cos \frac{\pi t}{5}$  on suurin, kun  $\cos \frac{\pi t}{5} = -1$  eli arvoilla  $t = 5 + 10n$ .

Kysymykseen tulevat vain ne  $n$ :n arvot, joilla laskettu kellonaika osuu aukioloaikaan, tässä tapauksessa vain  $n = 0$ . Lämpötila oli siis korkeimmillaan klo 14.

Lämpötilan nousunopeus  $l'(t) = -2,7 \cdot (-\sin \frac{\pi t}{5}) \cdot \frac{\pi}{5} = \frac{2,7\pi}{5} \sin \frac{\pi t}{5}$  on suurin, kun  $\sin \frac{\pi t}{5} = 1$  eli hetkellä  $t = 2,5 + 10n$ . Tässä vain  $n = 0$  sopii, jolloin vastaava kellonaika on 11.30.

- 121. a)**  $f(x) = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \sin 2x$ . Suurin arvo on 2 ja pienin 0.

**b)**  $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(x + \frac{\pi}{4})$

$$= (\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4})(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x)(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = \frac{1}{2} (\sin^2 x - \cos^2 x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

Suurin arvo on  $\frac{1}{2}$  kosinin ollessa  $-1$ . Pienin arvo  $-\frac{1}{2}$  tulee kosinin arvolla 1.

- 122.** Käyrien leikkauspisteet saadaan yhtälön  $\sin 2x = \cos 2x$  ratkaisuina. Muokataan yhtälö muotoon  $\tan 2x = 1$ , josta  $x = \frac{\pi}{8} + n \frac{\pi}{2}$ . Jaksollisuuden vuoksi riittää, kun laske-

taan kyseinen kulma kohdassa  $x = \frac{\pi}{8}$ . Määritetään seuraavana leikkauspisteeseen

piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet: Kun  $f_1(x) = \sin 2x$ , on

$$k_1 = f_1'(\frac{\pi}{8}) = 2 \cos \frac{2\pi}{8} = \frac{2}{\sqrt{2}}. \text{ Vastaavasti, kun } f_2(x) = \cos 2x, \text{ on}$$

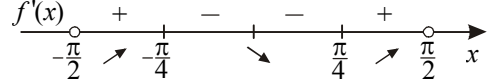
$$k_2 = f_2'(\frac{\pi}{8}) = -2 \sin \frac{2\pi}{8} = -\frac{2}{\sqrt{2}}. \text{ Leikkauspisteeseen muodostuva kulma } \alpha \text{ saadaan}$$

$$\text{yhtälöstä } \tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{2}})} \right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}. \text{ Tällöin } \alpha \approx 70,5^\circ.$$

123. Funktion  $f(x) = \cos \frac{1-x}{x}$  derivaatta on  $f'(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1-x}{x}$ . Ehto  $f'(x) = 0$  toteutuu, kun  $\frac{1-x}{x} = n\pi$  eli  $x = \frac{1}{1+n\pi}$ . Kun  $n = 0$ , on  $x = 1$ . Kun  $n > 0$ , on  $1+n\pi > 1$ , joten  $0 < \frac{1}{1+n\pi} < 1$ . Kun  $n < 0$ , on  $1+n\pi < -1$ , jolloin  $-1 < \frac{1}{1+n\pi} < 0$ . Derivaatan nollakohdat ovat näin ollen välillä  $] -1, 1[$  aina, kun  $n \neq 0, n \in \mathbf{Z}$ .

124. Funktio  $f(x) = \cos 2x + 2x - 1$  on määrittelyarvoillaan  $x \geq 0$  jatkuva. Sen derivaatta  $f'(x) = -2 \sin 2x + 2 = 2(1 - \sin 2x)$  on kaikilla  $x$ :n arvoilla ei-negatiivinen. Derivaatan nollakohdat ovat yksittäisiä ( $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ ), joten funktio  $f$  on aidosti kasvava joulukossa  $x \geq 0$ . Koska  $f(0) = 0$ , on välttämättä  $f(x) \geq 0$  arvoilla  $x \geq 0$ . Se merkitsee, että  $\cos 2x \geq 1 - 2x$ , kun  $x \geq 0$ .

125. Tutkitaan funktiota  $f(x) = 5 \tan x - 3 - 10x$ , kun  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ . Funktio on jatkuva ja derivoituva kyseisellä välillä.  $f'(x) = \frac{5}{\cos^2 x} - 10 = 0$ , kun  $x = \pm \frac{\pi}{4}$ . Derivaatan merkkikaavion mukaan funktiolla on maksimi kohdassa  $x = -\frac{\pi}{4}$  ja minimi kohdassa



$x = \frac{\pi}{4}$ . Koska maksimi  $f(-\frac{\pi}{4}) = -0,146 < 0$ , funktiolla ei ole nollakohtaa välillä

$\left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right]$ . Mikäli funktiolla on yksi nollakohta, se sijaitsee välillä  $\left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

Haarukoidaan kyseistä väliä:  $f(1) \approx -5,2 < 0$ ,  $f(1,5) \approx 52,5$ ,  $f(1,25) \approx -0,45 < 0$ ,  $f(1,30) \approx 2,01 > 0$ ,  $f(1,275) \approx 0,66 > 0$  ja  $f(1,26) \approx -0,03$ . Edellisen perusteella voidaan päätellä, että yhtälöllä  $5 \tan x - 3 = 10x$  on täsmälleen yksi juuri välillä  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , ja sen yksidesimaalinen likiarvo on  $x \approx 1,3$ .

126. i) Funktion  $f(x) = x + \sin x$  derivaatta on  $f'(x) = 1 + \cos x$ . Koska  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , niin aina  $f'(x) \geq 0$ . Koska lisäksi ehto  $f'(x) = 0$  toteutuu vain yksittäisissä pisteissä, funktio  $f$  on aidosti kasvava koko  $\mathbf{R}$ :ssä.

ii) Koska  $f$  on aidosti kasvava, käänteisfunktio  $f^{-1}$  on olemassa. On määritettävä derivaatta  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ , kun  $y_0 = \frac{3\pi - 2}{2}$ . Luku  $x_0$  toteuttaa yhtälön

$\frac{3\pi - 2}{2} = x_0 + \sin x_0$ . Huomataan, että  $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ . Muita ratkaisuja ei ole, koska funk-

tio  $f$  on aidosti kasvava. Saadaan  $(f^{-1})'\left(\frac{3\pi - 2}{2}\right) = \frac{1}{1 - \cos \frac{3\pi}{2}} = 1$ .

# Lukujonot

## 1 Lukujonon käsite

127. a) 5, 7, 9, 11, 13      b) 24, 21, 16, 9, 0      c) 3, 5, 3, 5, 3      d) -5, -5, -5, -5, -5

128. a)  $a_{10} = 99 - 11 \cdot 10 = -11$       b)  $a_{10} = \frac{10^2}{2 \cdot 10 + 1} = \frac{100}{21} = 4 \frac{16}{21}$

c)  $a_{10} = \cos(10\pi) = 1$       d)  $a_{10} = \ln e^{10} = 10 \ln e = 10$

129. a) 5, 6, 7       $a_n = n$       b) 0, -4, -8       $a_n = 20 - 4n$

c) 125, 216, 343       $a_n = n^3$       d)  $\frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \frac{13}{14}$        $a_n = \frac{2n-1}{2n}$

e) -5, 6, -7       $a_n = (-1)^n \cdot n$       f) 35, 48, 63       $a_n = n(n+2)$

130. a) Kyseessä ovat parilliset negatiiviset kokonaisluvut eli  $a_n = -2n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

b)  $a_n = 20 + 5n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

c) Kirjoittamalla lukujono muotoon  $2\frac{3}{10}, 2\frac{3}{100}, 2\frac{3}{1000}, \dots$  nähdään sääntö

$a_n = 2 + \frac{3}{10^n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

131. a) Yhtälön  $120 = 20 + 5n$  ratkaisuna  $n = 20$ .

b) Yhtälön  $120 = n^2 + 2n + 40$  ratkaisuista -10 ja 8 kelpaa  $n = 8$ .

c) Ratkaisemalla yhtälö  $n! = 120$  (esimerkiksi kokeilemalla) saadaan  $n = 5$ .

132. a) 2, 5, 8, 11, 14      b) 2, 2, 2, 2, 2      c) 1, 2, 5, 29, 866      d) 1, 1, 2, 3, 2

133. a) Jokainen jäsen saadaan toisesta jäsenestä lähtien lisäämällä edelliseen luku 3 eli  $a_1 = 7, a_n = a_{n-1} + 3$  ( $n \geq 2$ ).

b) Jokainen jäsen saadaan toisesta jäsenestä lähtien kertomalla edellinen luvulla 3 eli  $a_1 = 4, a_n = 3a_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ).

c) Kolmannelta alkaen kukin jäsen on kahden edellisen erotus eli  $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$  ( $n \geq 3$ ).

134. a) Näppäillään seuraavasti:       Jokaisella EXE-painalluksella saadaan seuraava jäsen. Lukujonon kymmenen ensimmäistä jäsentä ovat näin ollen -17, -22, -27, -32, -37, -42, -47, -52, -57, -62.

b) Näppäillään seuraavasti:      Jokaisella EXE-painalluksella saadaan seuraava jäsen. Lukujonon kymmenen ensimmäistä jäsentä ovat näin ollen 1 024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2.

135. a) Lukujonon ensimmäinen jäsen on  $a_1 = 3$ . Seuraava jäsen saadaan, kun edellinen jäsen kerrotaan luvulla 3. Näin ollen  $a_n = 3^n$ .

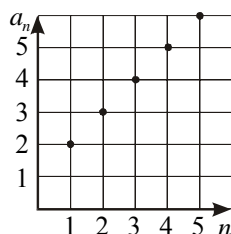
b) Lukujonon ensimmäinen jäsen on  $a_1 = 11$ . Seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 11. Tällöin  $a_n = n \cdot 11$ .

136. Kun auton arvo vähenee vuosittain 25 %, jäljellä oleva arvo on aina 75 % edellisestä arvosta, ts. arvo  $n$  vuoden kuluttua on  $35\,000 \cdot 0,75^n$ . Kymmenen vuoden kuluttua arvo on  $35\,000 \cdot 0,75^{10} \approx 2\,000$  (euroa)

137. Jaettavien palkintojen suuruudet ovat (euroina) 1 280, 640, 320, 160, 80, 40, 20 ja 10. Palkintoja on 8 kappaletta.

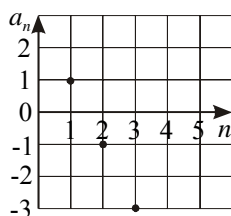
Toisin:  $1280 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 10 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{128} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \left(\frac{1}{2}\right)^7$ , kun  $n = 0, 1, \dots, 7$ . Palkintojen lukumääräksi nähdään 8.

138. a)



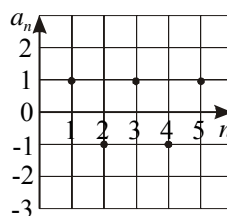
$$a_n = n + 1$$

b)



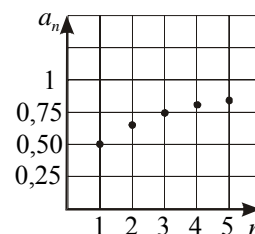
$$a_n = 3 - 2n$$

c)



$$a_n = (-1)^{n+1}$$

d)



$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

139. a) Lukujonon yleinen jäsen  $a_n = \frac{1}{n}$ . Jono on aidosti vähenevä, koska

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{Z}_+.$$

b) Lukujono on aidosti kasvava, koska  $a_n - a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1}$

$$= \frac{n^2 - 1 - n^2}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{Z}_+.$$

c) Lukujono on aidosti vähenevä, koska

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{n}{4n-1} - \frac{n+1}{4(n+1)-1} = \frac{n}{4n-1} - \frac{n+1}{4n+3} \\ &= \frac{(4n+3)n - (4n-1)(n+1)}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} > 0 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{Z}_+. \end{aligned}$$

d) Lukujono on aidosti vähenevä, koska

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= (2n - n^2) - (2(n+1) - (n+1)^2) \\ &= 2n - n^2 - 2n - 2 + n^2 + 2n + 1 \\ &= 2n - 1 > 0 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{Z}_+. \end{aligned}$$

$$140. \text{ a) } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} > 1 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{Z}_+ \text{ ja lukujonon jäsenet}$$

ovat positiivisia, joten lukujono on aidosti kasvava.

$$\text{b) } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3n+4}{2n+1}}{\frac{3n+1}{2n-1}} = \frac{6n^2 + 5n - 4}{6n^2 + 5n + 1} = \frac{1 + \frac{5}{6n} - \frac{4}{6n^2}}{1 + \frac{5}{6n} + \frac{1}{6n^2}} < 1 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{Z}_+ \text{ ja lukujonon}$$

jäsenet ovat positiivisia, joten lukujono on aidosti vähenevä.

$$\text{c) } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{e^n}{(n+1)!}} = \frac{e}{n+2} < 1 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{Z}_+ \text{ ja lukujonon jäsenet ovat positiivisia,}$$

joten lukujono on aidosti vähenevä.

141. a) Jonon rekursiosäännöksi sopii  $a_{n+1} = a_n \cdot 0,3$ . Tällöin  $a_8 = 0,0006561$ .

b) Jonon rekursiosäännöksi sopii  $a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$ . Tällöin  $a_8 = \frac{2}{78\,125}$ .

142. a) Tarkastellaan funktiota  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ,  $x > 1$ , joka on jatkuva ja derivoituva määrittelyjoukossaan. Derivaatta  $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$ . Funktio on siis aidosti vähenevä,

jolloin myös vastaava lukujono  $(a_n)$  on aidosti vähenevä.

b) Funktion  $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ ,  $x \geq 1$ , derivaatta  $f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} > 0$ , kun  $x \geq 1$ . Koska

funktio on aidosti kasvava, myös vastaava lukujono  $(a_n)$  on aidosti kasvava.

143. a) Tarkastellaan funktiota  $f(x) = x^2 - 4x$ , kun  $x \geq 1$ . Derivaatan  $f'(x) = 2x - 4$  nollakohdassa  $x = 2$  funktio saa pienimmän arvonsa  $f(2) = -4$ . Lukujonon  $(a_n)$  pienin luku on siis  $-4$ .

b) Funktion  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ ,  $x \geq 1$ , derivaatan  $f'(x) = x^2 - 2x - 3$  nollakohdat ovat  $-1$  ja  $3$ . Funktion pienin arvo on  $f(3) = -9$ . Lukujonon  $(a_n)$  pienin luku on tällöin  $-9$ .

144. Tarkastellaan funktiota  $f(x) = 2x - 75 \ln x$ , kun  $x \geq 1$ . Derivaatan  $f'(x) = 2 - \frac{75}{x}$  nollakohta  $x = 37,5$  osoittautuu derivaatan merkkitarkastelussa funktion pienimmän arvon kohdaksi. Tutkitaan, kumpi arvoista  $n = 37$  vai  $n = 38$  antaa funktiolle pienemmän arvon.  $f(37) = 74 - 75 \ln 37 \approx -196,8188$  ja  $f(38) = 76 - 75 \ln 38 \approx -196,8190$ . Pienin luku on näin ollen  $76 - 75 \ln 38 \approx -196,8$ , kun  $n = 38$ .

145. Tutkitaan funktiota  $f(x) = \frac{x^4}{2^x}$ ,  $x > 0$ . Derivaatta  $f'(x) = \frac{4x^3 - x^4 \ln 2}{2^x} = 0$ , kun

$$x^3(4 - x \ln 2) = 0. \text{ Tällöin } x = 0 \text{ tai } x = \frac{4}{\ln 2} \approx 5,8. \text{ Edellinen juuri ei täytä ehtoa}$$

$x > 0$ . Jälkimmäinen juuri osoittautuu derivaatan merkkitarkastelussa funktion suurimman arvon kohdaksi. Tutkitaan, kumpi arvoista  $n = 5$  vai  $n = 6$  antaa funktiolle

suuremman arvon.  $f(5) = 19\frac{17}{32}$  ja  $f(6) = 20\frac{1}{4}$ . Suurin lukujonon luku on siis kuudes jäsen  $\frac{6^4}{2^6} = 20\frac{1}{4}$ .

$$\frac{6^4}{2^6} = 20\frac{1}{4}.$$

146. Merkitään  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = a$  ja  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = b$ . Tällöin yleinen jäsen saadaan muotoon

$$a_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}. \text{ Eri } n\text{:n arvoilla } a_n \text{ sievenee ja saa seuraavat arvot:}$$

$$n = 1, a_1 = \frac{a - b}{a - b} = 1$$

$$n = 2, a_2 = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$n = 3, a_3 = \frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2$$

$$n = 4, a_4 = \frac{a^4 - b^4}{a - b} = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{a - b} = (a + b)(a^2 + b^2) = 3$$

$$n = 5, a_5 = \frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = 5$$

Samalla tavalla jatkamalla saadaan lukujonon kymmenen ensimmäistä jäsentä

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Lukujono  $(a_n)$  voidaan osoittaa Fibonaccin jonoksi.

147. Muodostetaan lukujonon kahden peräkkäisen jäsenen suhde.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$

Koska  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  ja jonon jäsenet ovat positiivisia kaikilla  $n \in \mathbf{Z}_+$ , jono  $(a_n)$  on aidosti vähenevä.

## 2 Lukujonon raja-arvo

148. a) Lukujonon yleinen jäsen on  $a_n = \frac{1}{3^n}$ . Tällöin  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$ .

b) Lukujonon yleinen jäsen on  $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ . Tällöin  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1$ .

c) Yleinen jäsen on  $a_n = (-1)^n \cdot n$ . Lukujonolla ei ole raja-arvoa, sillä jäsenet saavat vuorotellen positiivisia ja negatiivisia, itseisarvoiltaan kasvavia arvoja.

149. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{n^2} = 0$       b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^{n+1}} = 0$       c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{-n} + 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} + 3\right) = 3$

150. a) Koska  $a_n = 1 - 3n \rightarrow -\infty$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , lukujono hajaantuu.

b) Koska  $a_n = \frac{9 - n^2}{n - 3} = -\frac{(n-3)(n+3)}{n-3} = -(n+3) \rightarrow -\infty$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , lukujono hajaantuu.

151. a)  $a_n = \frac{2n-3}{3n+2} = \frac{2 - \frac{3}{n}}{3 + \frac{2}{n}} \rightarrow \frac{2}{3}$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Lukujono suppenee. Raja-arvo on  $\frac{2}{3}$ .

b)  $a_n = \frac{1-n}{2n+3} = \frac{\frac{1}{n} - 1}{2 + \frac{3}{n}} \rightarrow -\frac{1}{2}$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Lukujono suppenee. Raja-arvo on  $-\frac{1}{2}$ .

c)  $a_n = \frac{n^2}{n+2} = \frac{n^2 - 4 + 4}{n+2} = n - 2 + \frac{4}{n+2} \rightarrow \infty$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Lukujono hajaantuu.

152. a)  $a_n = 3 - \frac{2}{n+7} \rightarrow 3$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Lukujono suppenee. Raja-arvo on 3.

b)  $a_n = \frac{n+2}{n^2-4} = \frac{n+2}{(n+2)(n-2)} = \frac{1}{n-2} \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Lukujono suppenee. Raja-arvo on 0.

c)  $a_n = \frac{n^2-4}{n-2} = \frac{(n+2)(n-2)}{n-2} = n+2 \rightarrow \infty$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Lukujono hajaantuu.

153. Annettujen jäsenten perusteella voidaan päätellä, että lukujonon yleinen jäsen on

muotoa  $a_n = \frac{3n-2}{n+1}$ . Lukujonon raja-arvo on 3, koska  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3n-2}{n+1} = \frac{3 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 3$ .

154. a) Raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  on Neperin luku  $e \approx 2,7183$ .

b) Yleinen jäsen voidaan kirjoittaa muotoon  $a_n = \frac{3^n - 4^n}{4^n + 2^n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{4}\right)^n + 1}$ , josta raja-arvo

-1 on helppo päätellä.

155. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,99^n = 0$ , joten  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + 0,99^n} = 2$ . b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1,01^n = \infty$ , joten  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + 1,01^n} = 0$ .

156. a) Supistetaan  $n$ :llä:  $a_n = \frac{(1-2n)^3}{(3n+2)^3} = \left(\frac{\frac{1}{n}-2}{3+\frac{2}{n}}\right)^3 \rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$ , kun  $n \rightarrow \infty$

b) Supistetaan  $n$ :llä:  $a_n = \frac{6n - \sqrt{n}}{\sqrt{2n^2 + n + 1}} = \frac{n\left(6 - \sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{n\sqrt{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \rightarrow \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ , kun  $n \rightarrow \infty$

157. a) Supistetaan  $3^{n+1}$ :llä:  $a_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1}{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)} \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ , kun  $n \rightarrow \infty$ .

b)  $\frac{(2n)! \cdot n}{(2n+1)!} = \frac{(2n)! \cdot n}{(2n)! \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{2}$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Raja-arvo =  $\frac{1}{2}$ .

### 3 Aritmeettinen lukujono

158. a) Lukujono voi olla aritmeettinen, koska  $d = 17 - 13 = 13 - 9 = 9 - 5 = 4$ .

b) Lukujono ei voi olla aritmeettinen, koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio.

c) Lukujono voi olla aritmeettinen, koska  $d = \frac{5}{2} - 2 = \frac{3}{2} - 1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

d) Lukujono voi olla aritmeettinen, koska  $d = -3 - (-2) = -2 - (-1) = -1 - 0 = -1$ .

159. Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen  $a_1 = 13\frac{1}{4}$  ja differenssi  $d = 5\frac{1}{4} - 13\frac{1}{4} = -8$ .

Yleinen jäsen  $a_n = 13\frac{1}{4} + (n-1) \cdot (-8) = -8n + 21\frac{1}{4}$  ja  $a_{30} = -8 \cdot 30 + 21\frac{1}{4} = -218\frac{3}{4}$ .

160. Viisi ensimmäistä jäsentä ovat: a) -5, -2, 1, 4 ja 7 b) 20, 31, 42, 53 ja 64

c) Differenssi  $d = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ . Tällöin viisi ensimmäistä jäsentä ovat  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$  ja  $\frac{5}{4}$ .

- 161.** a) Ensimmäinen jäsen  $a_1 = -1$  ja differenssi  $d = 4$ . Jonon rekursiivinen muoto on  $a_1 = -1$ , ja  $a_{n+1} = a_n + 4$ , kun  $n \geq 1$ .  
 b) Ensimmäinen jäsen  $a_1 = 55$  ja differenssi  $d = -10$ . Rekursiivinen muoto on  $a_1 = 55$ , ja  $a_{n+1} = a_n - 10$ , kun  $n \geq 1$ .  
 c) Ensimmäinen jäsen  $a_1 = \frac{1}{4}$  ja differenssi  $d = \frac{3}{4}$ . Rekursiivinen muoto on tällöin  $a_1 = \frac{1}{4}$ , ja  $a_{n+1} = a_n + \frac{3}{4}$ , kun  $n \geq 1$ .
- 162.** Lukujonon yleinen jäsen on muotoa  $a_n = 105 - 5n$ . Peräkkäisten jäsenten erotus on  $a_{n+1} - a_n = 105 - 5(n+1) - (105 - 5n) = -5$ . Koska erotus on  $n$ :stä riippumaton vakio, jono on aritmeettinen.  $a_{32} = 105 - 32 \cdot 5 = -55$ .
- 163.** a) Pisteet sijaitsevat suoralla  $y = 4x - 5$ .      b) Pisteet ovat suoralla  $y = -\frac{2}{3}x + 7$ .  
 c) Ehto  $a_n = a_{n-1} - 2$  kirjoitettuna muotoon  $a_n - a_{n-1} = -2$  osoittaa lukujonon aritmeettiseksi jonoksi, jonka differenssi on  $-2$ . Kaava  $a_n = a_1 + (n-1)d$  tulee muotoon  $a_n = -2n + 4$ , joten jonon jäsenet sijoittuvat suoralle  $y = -2x + 4$ .
- 164.** Kysytty  $x$ :n arvo  $x = 11,5$  saadaan yhtälöstä  $(4+x) - 12 = 12 - (x-3)$ .
- 165.** a)  $a_n = 10 + (n-1) \cdot 7 = 7n + 3$       b)  $a_n = -0,5 + (n-1) \cdot 0,5 = 0,5n - 1$   
 c)  $a_n = \frac{1}{6} + (n-1) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}n$
- 166.** Ehdosta  $10,7 = 12,3 + 2d$  saadaan  $d$ :lle arvo  $-0,8$ . Näin ollen  $a_n = 12,3 - 0,8(n-1)$ . Epäyhtälön  $13,1 - 0,8n > 0$  ratkaisusta  $n < 16,375$  päätellään positiivisia jäseniä olevan 16.
- 167.** Ehto  $3 = -2 + (7-1) \cdot d$  antaa differenssille arvon  $\frac{5}{6}$ , joten lukujonon viisi puuttuvaa jäsentä ovat  $-1\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}$  ja  $2\frac{1}{6}$ .
- 168.** Yhdellätoista jaolliset kolminumeroiset luvut ovat aritmeettisen jonon 110, 121, ..., 990 jäseniä. Lukumäärä  $n = 81$  saadaan yhtälön  $990 = 110 + (n-1) \cdot 11$  ratkaisuna.
- 169.** Penkkirivien lukumäärä  $n = 20$  saadaan yhtälön  $a_{n-1} = 132 = 60 + (n-2) \cdot 4$  ratkaisuna.
- 170.** Yhtälöstä  $10 = 13 + (7-1)d$  saadaan differenssille arvo  $d = -\frac{1}{2}$ . Epäyhtälön  $13 + (n-1) \cdot (-\frac{1}{2}) < 0$  ratkaisuna  $n > 27$ . Ensimmäinen negatiivinen jäsen on  $a_{28} = 13 + (28-1) \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ .

- 171.** Lankojen paksuudet (3, 10, 17, 24, 31, ...) muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen on 3 ja differenssi 7.
- a)** Tietokone ei tunnistanut tilattua lankaa, koska yhtälöllä  $152 = 3 + (n - 1) \cdot 7$  ei ole kokonaislukuratkaisua. Asiakas on ilmeisesti tarkoittanut paksuutta 150.
- b)** Tehdas valmistaa 27 eri paksuista lankaa, koska yhtälön  $185 = 3 + (n - 1) \cdot 7$  ratkaisuna on  $n = 27$ .
- 172.** Olkoon jonon kolme peräkkäistä jäsentä  $a_{n-1} = a_1 + (n - 2)d$ ,  $a_n = a_1 + (n - 1)d$  ja  $a_{n+1} = a_1 + nd$ . Tällöin  $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + (n - 2)d + a_1 + nd}{2} = \frac{2a_1 + 2(n - 1)d}{2} = a_1 + (n - 1)d$ . Saatu tulos on jonon keskimäinen jäsen  $a_n$ .
- 173.** Kolmella jaollisten kolminumeroisten kokonaislukujen määrä 300 saadaan yhtälön  $999 = 102 + (n - 1) \cdot 3$  ratkaisuna. Vastaavalla tavalla selviää viidellä jaollisten lukujen määrä 180. (Katso oppikirjan esimerkki 5.) Lisäksi on otettava huomioon, että on 60 sellaista lukua, jotka ovat jaollisia kolmella ja viidellä. Näiden lukujen määrä puolestaan saadaan ratkaisemalla yhtälö  $105 + (n - 1) \cdot 15 = 990$ .
- $$P(\text{jaollinen kolmella tai viidellä}) = \frac{300 + 180 - 60}{900} = \frac{7}{15} \approx 0,47$$
- 174.** Luvut  $\frac{1}{b+c}$ ,  $\frac{1}{c+a}$  ja  $\frac{1}{a+b}$  ovat aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä tarkalleen silloin, kun  $\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a}$ . Tästä  $\frac{b-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(c+a)}$  ja edelleen  $\frac{b^2 - a^2}{(a+b)(c+b)(b+c)} = \frac{c^2 - b^2}{(a+b)(c+b)(b+c)}$ . Jälkimmäinen yhtälö on tosi ehdolla  $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$ , joka puolestaan on voimassa siksi, että  $a^2$ ,  $b^2$  ja  $c^2$  tiedetään aritmeettisen jonon peräkkäisiksi jäseniksi.

## 4 Geometrinen lukujono

- 175. a)** Lukujono on luetelluista jäsenistä päätellen geometrinen, koska  $\frac{20}{10} = \frac{40}{20} = \frac{80}{40} = 2$  (= vakio =  $q$ ).
- b)** Lukujono ei ole geometrinen, koska peräkkäisten jäsen suhteelle ei löydy vakioarvoa.
- c)** Lukujono on geometrinen, koska  $\frac{6}{2,4} = \frac{15}{6} = \frac{37,5}{15} = 2,5$  (= vakio =  $q$ ).
- d)** Lukujono ei ole geometrinen, koska peräkkäisten jäsen suhteelle ei löydy vakioarvoa.

- 176. a)** Lukujono on geometrinen, koska  $\frac{6}{18} = \frac{2}{6} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$  (= vakio =  $q$ ).
- b)** Lukujono ei ole geometrinen eikä aritmeettinen.
- c)** Jono on aritmeettinen, koska  $-2 - 0 = -4 - (-2) = -6 - (-4) = -2$  (= vakio =  $d$ ).
- d)** Kyseessä on geometrinen jono, koska  $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{8} : \frac{1}{2} = \frac{1}{32} : \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$  (= vakio =  $q$ )
- 177. a)**  $108, -54, 27, -13\frac{1}{2}, 6\frac{3}{4}$  ( $q = -2$ )    **b)**  $3, 6, 12, 24, 48$  ( $q = 2$ )
- c)**  $6, 4, 2\frac{2}{3}, 1\frac{7}{9}, 1\frac{5}{27}$  ( $q = \frac{2}{3}$ )
- 178. a)** Koska  $a_1 = 3$  ja  $q = 2$ , rekursiivinen muoto on  $a_1 = 3$  ja  $a_{n+1} = 2a_n$ , kun  $n \geq 1$ .
- b)** Koska  $a_1 = 100$  ja  $q = \frac{1}{5}$ , saadaan rekursiiviseksi esitysmuodoksi  $a_1 = 100$  ja  $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$ , kun  $n \geq 1$ .
- c)** Koska  $a_1 = 1$  ja  $q = \frac{1}{2}$ , rekursiivinen muoto on  $a_1 = 1$  ja  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ , kun  $n \geq 1$ .
- 179.** Ehdosta  $768 = 3 \cdot q^4$  saadaan suhdeluvulle arvo  $q = 4$ , jolloin viisi ensimmäistä jäsentä ovat  $3, 12, 48, 192$  ja  $768$ .
- 180.** Yhtälöparin  $\begin{cases} a_1 q^2 = 24 \\ a_1 q^5 = -3 \end{cases}$  ratkaisuna on  $a_1 = 96$  ja  $q = -\frac{1}{2}$ . Näin ollen  $a_{12} = 96 \left(-\frac{1}{2}\right)^{11} = -\frac{3}{64}$ .
- 181.** Jono on geometrinen, kun  $\frac{4x-2}{x+1} = \frac{x+1}{x-3}$ . Ratkaisuna on  $x = \frac{1}{3}$  tai  $x = 5$ . Edellisellä arvolla ovat kysytyt jäsenet  $\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}$  ja  $\frac{1}{12}$ , jälkimmäisellä  $54, 162$  ja  $486$ .
- 182.** Koska  $a, 2, b$  ja  $32$  ovat geometrisen jonon peräkkäiset jäsenet, ovat voimassa yhtälöt  $\frac{2}{a} = \frac{b}{2}$  ja  $\frac{b}{2} = \frac{32}{b}$ . Yhtälöparin  $\begin{cases} ab = 4 \\ b^2 = 64 \end{cases}$  ratkaisuna  $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 8 \end{cases}$  tai  $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -8 \end{cases}$ .
- 183.** Neljännellä pompulla pallo jää ensimmäisen kerran alle puolen metrin. Tulos saadaan ratkaisemalla epäyhtälö  $2 \cdot 0,7^n < 0,5$ . Tämän ratkaisuna  $n > \frac{\ln \frac{0,5}{2}}{\ln 0,7} \approx 3,9$ . Viidennellätoista kerralla nousukorkeus on  $2 \cdot 0,7^{15} \approx 0,0095$  (m)  $\approx 1$  cm.

- 184.** Ainetta oli 50 vuotta sitten  $10 \cdot 0,966^{-50} \approx 56,4$  (mg).  
Puoliintumisaika  $t$  ratkaistaan yhtälöstä  $m \cdot 0,966^t = 0,5m$ , jossa  $m$  tarkoittaa alkuperäistä massaa. Kun massa  $m$  on supistettu, saadaan  $t = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,966} \approx 20,04$ . Puoliintumisaika on 20 vuotta.
- 185.** a) Vuonna 2011 asukasluku ylittää 25 miljoonan rajan. Epäyhtälön  $13 \cdot 1,04^t > 25$  ratkaisuna  $t > 16,67$  (vuotta).  
b) Vuonna 2010 alittuu sadan asukkaan raja. Epäyhtälön  $500 \cdot 0,9^t < 100$  ratkaisuna  $t > 15,3$  (vuotta). Vuonna 2054 olisi asukkaita vain yksi. Aika  $t \approx 59$  ratkeaa yhtälöstä  $500 \cdot 0,9^t = 1$ .
- 186.** Olkoot  $a, aq, aq^2, aq^3, \dots$  geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä. Jäsenten logaritmit  $\log a, \log aq, \log aq^2, \log aq^3, \dots$  voidaan kirjoittaa muotoon  $\log a, \log a + \log q, \log a + 2\log q, \log a + 3\log q, \dots$ , josta nähdään, että peräkkäisten jäsenten erotus on vakio eli  $\log q$ .
- 187.** Olkoot  $a_{n-1} = a_1 q^{n-2}$ ,  $a_n = a_1 q^{n-1}$  ja  $a_{n+1} = a_1 q^n$  geometrisen jonon kolme peräkkäistä jäsentä. Tällöin  $\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{a_1 q^{n-2} \cdot a_1 q^n} = \sqrt{a_1^2 q^{2n-2}} = a_1 q^{n-1}$ .  
Saatu lauseke esittää jonon keskimmäistä jäsentä.
- 188.** Yhtälöparin  $\begin{cases} a_1 q^3 + a_1 q^4 = 3 \\ a_1 q^8 + a_1 q^9 = 9\,375 \end{cases}$  ratkaisuna  $a_1 = \frac{1}{250}$  ja  $q = 5$ . Tällöin  $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{250} + \frac{5}{250} + \frac{25}{250} = \frac{31}{250}$ .
- 189.** Olkoot geometrisen jonon kolme peräkkäistä jäsentä  $\frac{a}{q}$ ,  $a$  ja  $aq$ . Tuloehdosta saadaan  $\frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = a^3 = 343$ , josta  $a = 7$ . Tällä  $a$ :n arvolla summaehto saa muodon  $\frac{7}{q} + 7 + 7q = 7(\frac{1}{q} + 1 + q) = 24,5$  ja sievennettynä  $q^2 - 2,5q + 1 = 0$ . Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisuina  $q = \frac{1}{2}$  tai  $q = 2$ . Kysytyt jäsenet ovat  $3\frac{1}{2}$ ,  $7$  ja  $14$ .
- 190.** a) Merkitään  $1 - \frac{p}{100} = x$ . Olkoon  $m$  alkuperäinen jodin määrä (mg). Yhtälöparin  $\begin{cases} m \cdot x^4 = 172 \\ m \cdot x^{11} = 96 \end{cases}$  ratkaisuna  $x = \sqrt[7]{\frac{96}{172}} \approx 0,92$ . Tällöin kysytty luku  $p \approx 8,0$ .
- b) Yhtälön  $m \cdot 0,92^4 = 172$  antaa alkuperäiseksi määräksi  $m \approx 240$  mg.

191. Olkoon geometrinen jono  $a, aq, aq^2, \dots$ . Annettujen tietojen perusteella

$$a + aq + aq^2 = 3 \text{ ja}$$

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5$$

$$= a + aq + aq^2 + q^3(a + aq + aq^2) = 3 + 3q^3 = 3(1 + q^3) = 12.$$

Yhtälön  $3(1 + q^3) = 12$  ratkaisuna  $q = \sqrt[3]{3}$ . Yhdeksän ensimmäisen jäsen summa on

$$12 + aq^6 + aq^7 + aq^8 = 12 + q^6(a + aq + aq^2) = 12 + (\sqrt[3]{3})^6 \cdot 3 = 12 + 3 \cdot 9 = 39.$$

192. Tiedosta, että  $a, b$  ja  $c$  ovat geometrisen jonon peräkkäisiä jäseniä, saadaan  $b^2 = ac$ .

Jotta  $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}$  ja  $\frac{1}{b-c}$  olisivat aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä, tulee olla

$$\frac{1}{b-c} - \frac{1}{2b} = \frac{1}{2b} - \frac{1}{b-a}.$$
 Kerrotaan tämä yhtälö nimittäjien tulolla  $2b(b-c)(b-a)$ .

$$\frac{1}{b-c} - \frac{1}{2b} = \frac{1}{2b} - \frac{1}{b-a} \quad | \cdot 2b(b-c)(b-a)$$

$$2b(b-a) - (b-a)(b-c) = (b-a)(b-c) - 2b(b-c)$$

$$2b^2 - 2ab - b^2 + bc + ab - ac = b^2 - bc - ab + ac - 2b^2 + 2bc$$

$$2b^2 = 2ac$$

Päädettiin yhtäpitävään toteen yhtälöön, joten lähtöyhtälö on tosi, ja  $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}$  ja

$\frac{1}{b-c}$  ovat siis aritmeettisen jonon peräkkäisiä jäseniä.

## 5 Summamerkintä

193. a)  $\sum_{k=1}^6 \frac{k}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2}$

b)  $\sum_{i=4}^{10} \frac{i}{i+2} = \frac{4}{6} + \frac{5}{7} + \frac{6}{8} + \frac{7}{9} + \frac{8}{10} + \frac{9}{11} + \frac{10}{12}$

c)  $\sum_{i=3}^9 (-1)^{i+1} \frac{i+1}{i-1} = \frac{4}{2} - \frac{5}{3} + \frac{6}{4} - \frac{7}{5} + \frac{8}{6} - \frac{9}{7} + \frac{10}{8}$

194. a)  $\sum_{k=1}^4 (k^2 + 1) = 2 + 5 + 10 + 17 = 34$

b)  $\sum_{i=0}^4 (-2)^i = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 = 11$

c)  $\sum_{k=3}^8 (-5) = -5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 = -30$

195. a)  $\sum_{i=1}^6 x_i = -1 + 1 + 5 + 2 + 4 + 3 = 14$

b)  $\sum_{i=2}^5 x_i = 1 + 5 + 2 + 4 = 12$

c)  $\sum_{i=1}^6 (x_i - 2) = -3 - 1 + 3 + 0 + 2 + 1 = 2$

d)  $\sum_{i=1}^4 (x_i - 1)^3 = -8 + 0 + 64 + 1 = 57$

$$196. \text{ a) } 5 + 6 + 7 + \dots + 16 = \sum_{k=5}^{16} k \qquad \text{b) } \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} = \sum_{k=2}^7 \frac{k}{k+1}$$

$$\text{c) } 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 23 \cdot 25 = \sum_{k=1}^{23} k(k+2)$$

$$197. \text{ a) } a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = \sum_{i=0}^4 a_i x^i$$

$$\text{b) } x^5 - x^{10} + x^{15} - x^{20} + x^{25} = \sum_{i=1}^5 (-1)^{i+1} x^{5i}$$

198. Kun summan luvut kirjoitetaan murtolukumuotoon  $\frac{9}{3} + \frac{10}{5} + \frac{11}{7} + \frac{12}{9} + \frac{13}{11} + \dots + \frac{20}{25}$ ,  
nähdään yhteenlaskettavien olevan muotoa  $\frac{k+8}{2k+1}$ , joten summa on  $\sum_{k=1}^{12} \frac{k+8}{2k+1}$ .

199. a) Termit vähenevät aina neljällä edelliseen nähden, joten summa on  $\sum_{k=0}^5 (23 - 4k)$ .

b) Kirjoitetaan summa  $2 + 6 + 18 + \dots + 486$  muotoon

$$2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + \dots + 2 \cdot 3^5.$$

Tästä saadaan summan lyhyempi esitysmuoto  $\sum_{k=0}^5 2 \cdot 3^k$ .

$$200. \text{ a) } \sum_{k=p}^n (a_k + b_k) = a_p + b_p + a_{p+1} + b_{p+1} + a_{p+2} + b_{p+2} + \dots + a_n + b_n$$

$$= (a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_n) + (b_p + b_{p+1} + b_{p+2} + \dots + b_n) = \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=p}^n b_k$$

Summamerkkiä voidaan soveltaa kumpaankin termin yhteenlaskettavaan erikseen.

$$\text{b) } \sum_{k=p}^n (ra_k) = ra_p + ra_{p+1} + ra_{p+2} + \dots + ra_n = r(a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_n) = r \sum_{k=p}^n a_k$$

Termien yhteinen tekijä  $r$  voidaan siirtää summamerkin eteen.

## 6 Aritmeettinen summa

201. Kyseisessä jonossa  $a_1 = 8$  ja  $d = 3$ .

$$\text{a) } a_{20} = 8 + 19 \cdot 3 = 65, S_{20} = 20 \cdot \frac{8+65}{2} = 730$$

$$\text{b) } a_{50} = 8 + 49 \cdot 3 = 155, S_{50} = 50 \cdot \frac{8+155}{2} = 4\,075$$

$$202. \text{ a) } a_1 = 5, d = 5, a_{12} = 5 + 11 \cdot 5 = 60, S_{12} = 12 \cdot \frac{5+60}{2} = 390$$

$$\text{b) } a_1 = -6, d = -3, a_{15} = -6 + 14 \cdot (-3) = -48, S_{15} = 15 \cdot \frac{-6+(-48)}{2} = -405$$

$$\text{c) } S_6 = 6 \cdot \frac{6+30}{2} = 108 \qquad \text{d) } S_{10} = 10 \cdot \frac{-9+(-40)}{2} = -245$$

$$203. \text{ a) } S = 10 \cdot \frac{5+23}{2} = 140 \quad \text{b) } S = 100 \cdot \frac{10+307}{2} = 15\,850 \quad \text{c) } S = 10 \cdot \frac{11+47}{2} = 290$$

$$204. \text{ a) Yhtälöstä } 4\pi = \frac{\pi}{3} + (n-1) \cdot \frac{\pi}{3} \text{ saadaan } n = 12. \text{ Summa on } 12 \cdot \frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{2} = 26\pi.$$

$$\text{b) Yhtälöstä } \frac{22}{e} = \frac{1}{e} + (n-1) \cdot \frac{3}{e} \text{ saadaan } n = 8. \text{ Summa on } 8 \cdot \frac{\frac{1}{e} + \frac{22}{e}}{2} = \frac{92}{e}.$$

$$205. \text{ Kyseiset luvut ovat välillä } 102\text{--}986. \text{ Yhtälöstä } 986 = 102 + (n-1) \cdot 17 \text{ saadaan ter-}$$

$$\text{mien lukumääräksi } n = 53, \text{ jolloin } S = 53 \cdot \frac{102+986}{2} = 28\,832.$$

$$206. \text{ Ensimmäinen termi } a_1 \text{ ja differenssi } d \text{ ratkaistaan yhtälöparista } \begin{cases} 4 = a_1 + (10-1)d \\ 13 = a_1 + (16-1)d \end{cases}$$

Ratkaisuna on  $a_1 = -9,5$  ja  $d = 1,5$ . Kolmen ensimmäisen termin summa on  $-24$ .

$$207. \text{ Kun avataan summamerkintä, saadaan yhtälö } (10x-6) + (12x-6) + (14x-6) + (16x-6) = 28. \text{ Sen ratkaisuna } x = 1.$$

208. Ensimmäisen avioparin mies kättelee 18 muuta henkilöä, samoin ensimmäisen avioparin nainen kättelee 18 muuta henkilöä.  
Toisen avioparin mies kättelee 16, ja nainen 16 muuta henkilöä.  
Kolmannen parin kohdalla sekä mies että nainen kättelevät kumpikin 14 muuta henkilöä.

....

Yhdeksännen parin kohdalla sekä mies että nainen kättelevät kumpikin kahta muuta henkilöä.

$$\text{Yhteensä kättelyitä on } 2 \cdot (18+16+\dots+2) = 2 \cdot 9 \cdot \frac{18+2}{2} = 180.$$

209. Epäyhtälön  $1+2+3+\dots+m \leq 462\,241$  vasen puoli on aritmeettinen summa, minkä nojalla saadaan muoto  $m \cdot \frac{1+m}{2} \leq 462\,241$ . Sievennys antaa toisen asteen epäyhtälön  $m^2 + m - 924\,482 \leq 0$ . Vastaavan yhtälön nollakohdat ovat  $-962$  ja  $961$ . Koska  $m$  on luonnollisena lukuna  $\geq 0$ , on  $0 \leq m \leq 961$ . Suurin kysymykseen tuleva luku on  $961$ .

$$210. \text{ Annetuista ehdoista saadaan yhtälöpari } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a_1 + 6d = 11 \\ a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 4a_1 + 26d = 1, \end{cases}$$

jonka ratkaisuna  $a_1 = 3,5$  ja  $d = -0,5$ . Tällöin  $a_8 = 3,5 + 7 \cdot (-0,5) = 0$ .

211. Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa  $a_1 = 1$  ja  $d = 2$ . Lukujen määrä ratkaistaan epäyhtälöstä  $n \cdot \frac{1+(n-1) \cdot 2}{2} > 12\,000$ . Sieventämisen jälkeen  $2n^2 - n - 24\,000 > 0$ , josta  $n \geq 110$ . Summaan on otettava vähintään  $110$  lukua.

- 212.** Yhtälöparin  $\begin{cases} 5a_1 + 10d = 10 \\ 10a_1 + 45d = 170 \end{cases}$  ratkaisuna  $a_1 = -10$  ja  $d = 6$ . Tällöin  
 $a_{15} = -10 + 14 \cdot 6 = 74$  ja  $S_{15} = 15 \cdot \frac{-10 + 74}{2} = 480$ .
- 213.** Annetussa jonossa  $d = 7 - \frac{3}{2} = 5\frac{1}{2}$ . Termien (jäsenten) lukumäärä  $n = 22$  ratkaistaan yhtälöstä  $117 = \frac{3}{2} + (n-1) \cdot \frac{11}{2}$ . Tällöin  $S = 22 \cdot \frac{\frac{3}{2} + 117}{2} = 1\,303\frac{1}{2}$ .
- 214.** Köyttä on yhteensä  $12 \cdot \frac{10,0\pi + (10,0 + 11 \cdot 2 \cdot 1,2)\pi}{2} \approx 8,75$  (m) laskettuna sisämitan mukaan. Laskettuna köyden keskeltä saadaan pituudeksi 9,20 m. Pituudeksi voidaan arvioida pyöreästi 9 m.
- 215.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(1+n)}{2}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$
- 216.** Yhtälöstä  $n \cdot \frac{1 + (2s-1)}{2} = s^2$  saadaan termien lukumääräksi  $n = s$ . Differenssin arvo 2 ratkaistaan puolestaan yhtälöstä  $a_n = 2n - 1 = 1 + (n-1)d$ . Summan seitsemän ensimmäistä termiä ovat 1, 3, 5, 7, 9, 11 ja 13.
- 217.** Kolminumeroisia positiivisia kokonaislukuja on yhteensä 900 kpl, ja niiden summa on  $900 \cdot \frac{100 + 999}{2} = 494\,550$ . Yhdeksällä jaollisia on 100, ja niiden summa on  $100 \cdot \frac{108 + 999}{2} = 55\,350$ . Yhdellätoista jaollisia lukuja on 81, ja niiden summa on  $81 \cdot \frac{110 + 990}{2} = 44\,550$ . Yhdeksällä ja yhdellätoista jaollisia lukuja on 9, ja niiden summa on 5 346. Näin ollen kysytty summa on  $494\,550 - (55\,350 + 44\,550 - 5\,346) = 399\,996$ .
- 218. a)** Yhtälöstä  $9 = 12 + (7-1) \cdot d$  ratkeaa  $d = -\frac{1}{2}$ . Epäyhtälön  $12 + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$  ratkaisuna  $n > 27$ , jolloin ensimmäinen negatiivinen jäsen on  $a_{26} = -\frac{1}{2}$ .
- b)** Epäyhtälön  $S_n = n \cdot \frac{12 + 12 + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} < 0$  eli  $-0,5n^2 + 24,5n < 0$  ratkaisuna  $n > 49$ . On otettava vähintään 50 jäsentä, jotta summa olisi negatiivinen. Tällöin  $S_{50} = 50 \cdot \frac{12 + 12 + 49 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = -12\frac{1}{2}$ .

$$219. \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + \frac{(n-1) \cdot \frac{1+n-1}{2}}{n} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + \frac{n-1}{2}$$

Kysymyksessä on aritmeettinen summa, jossa on  $n - 1$  termiä. Summan arvo on

$$(n-1) \frac{\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}}{2} = (n-1) \frac{\frac{n}{2}}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

$$220. S_n = \sum_{k=1}^n \left(3 - k \frac{2}{n}\right) \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{n} - k \frac{4}{n^2}\right) = \left(\frac{6}{n} - 1 \cdot \frac{4}{n^2}\right) + \left(\frac{6}{n} - 2 \cdot \frac{4}{n^2}\right) + \dots + \left(\frac{6}{n} - n \cdot \frac{4}{n^2}\right)$$

$$= n \cdot \frac{6}{n} - (1 + 2 + \dots + n) \frac{4}{n^2} = n \cdot \frac{6}{n} - n \cdot \frac{1+n}{2} \cdot \frac{4}{n^2} = 6 - \left(\frac{2}{n} + 2\right) = 4 - \frac{2}{n}$$

Raja-arvoksi tulee  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 4$ .

## 7 Geometrinen summa

$$221. \text{ a) } q = 3, S_6 = \frac{5(1-3^6)}{1-3} = 1820$$

$$\text{ b) } q = -4, S_6 = \frac{9(1-(-4)^6)}{1-(-4)} = -7371$$

$$\text{ c) } q = \frac{1}{2}, S_6 = \frac{1(1-(\frac{1}{2})^6)}{1-\frac{1}{2}} = 1 \frac{31}{32}$$

$$\text{ d) } q = -\frac{1}{6}, S_6 = \frac{36(1-(-\frac{1}{6})^6)}{1-(-\frac{1}{6})} = 30 \frac{185}{216}.$$

222. a) Kirjoitetaan summa muotoon  $4^1 + 4^2 + \dots + 4^{12}$ . Summa on geometrinen, joten

$$S = \frac{4(1-4^{12})}{1-4} = 22\,369\,620.$$

b) Kyseinen summa on geometrinen, jossa  $a_1 = 1 = (\frac{1}{5})^0$  ja  $q = -\frac{1}{5}$ . Summan vii-

meinen termi kirjoitetaan muotoon  $(-\frac{1}{5})^9$ . Saadaan  $S = \frac{1 \cdot (1 - (-\frac{1}{5})^{10})}{1 - (-\frac{1}{5})} \approx 0,833$ .

223. Jokainen summista on geometrinen.

$$\text{ a) } a_1 = 1, q = 2, S_6 = \frac{1 \cdot (1-2^6)}{1-2} = 63 \quad \text{ b) } a_1 = 6, q = 6, S_8 = \frac{6 \cdot (1-6^8)}{1-6} = 2015538$$

$$\text{ c) } a_1 = \frac{1}{5}, q = \frac{1}{5}, S_8 = \frac{\frac{1}{5} \cdot (1 - (\frac{1}{5})^8)}{1 - \frac{1}{5}} \approx 0,25$$

$$\text{ d) } a_1 = -\frac{1}{27}, q = -\frac{1}{3}, S_{13} = \frac{-\frac{1}{27} \cdot (1 - (-\frac{1}{3})^{13})}{1 - (-\frac{1}{3})} \approx -0,028$$

- 224.** Epäyhtälö  $\frac{5(1-5^n)}{1-5} > 1\,000\,000$  sievenee muotoon  $5^n < 800\,001$ . Ratkaisuna on  $n > 8,445$ . Summa ylittää miljoonan rajan arvosta  $n = 9$  alkaen.
- 225. a)** Jono on geometrinen,  $a_1 = 1$  ja  $q = -\frac{1}{2}$ . Tällöin  $S_7 = \frac{1 \cdot (1 - (-\frac{1}{2})^7)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{43}{64}$ .
- b)** Jono on aritmeettinen,  $a_1 = 20$ ,  $a_7 = -4$  ja  $d = -4$ . Tällöin  $S_7 = 7 \cdot \frac{20 + (-4)}{2} = 56$ .
- c)** Jono ei ole aritmeettinen eikä geometrinen, vaan jono on muodostettu peräkkäisten luonnollisten lukujen neliöistä.  $S_7 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140$ .
- 226.** Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen  $a_1 = \frac{1}{2}$  ja suhdeluku  $q = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3$ . Näin ollen  $n$ :n ensimmäisen jäsenen summa  $S_n = \frac{\frac{1}{2}(1-3^n)}{1-3} = \frac{1}{4}(3^n - 1)$ . Summa ylittää miljoonan, kun  $\frac{1}{4}(3^n - 1) > 10^6$ . Epäyhtälö sievenee aluksi muotoon  $(3^n - 1) > 4 \cdot 10^6$ , josta  $n \ln 3 > \ln(4 \cdot 10^6 + 1)$  ja edelleen  $n > \frac{\ln(4 \cdot 10^6 + 1)}{\ln 3} \approx 13,837$ . Miljoonan raja ylittyy arvosta  $n = 14$  lähtien.
- 227.** Annetuista tiedoista saadaan yhtälö  $\frac{a_1(1-4^{10})}{1-4} = 3844\,775$ . Ratkaistaan tästä summan ensimmäinen termi:  $a_1 = 3844\,775 \cdot \frac{3}{1048575} = 11$ . Kymmenes termi  $a_{10} = a_1 q^9 = 11 \cdot 4^9 = 2\,883\,584$ .
- 228.** Koska annetut termit ovat geometrisen summan kolme ensimmäistä termiä, on  $\frac{4x-2}{x+1} = \frac{x+1}{x-3}$ . Yhtälö toteutuu, kun  $x = 5$  tai  $x = \frac{1}{3}$ . Edellisessä tapauksessa  $a_1 = 2$ ,  $q = 3$  ja  $S_9 = \frac{2(1-3^9)}{1-3} = 19\,682$ . Jälkimmäisellä  $x$ :n arvolla  $a_1 = -2\frac{2}{3}$ ,  $q = -\frac{1}{2}$  ja  $S_9 = \frac{-\frac{8}{3}(1 - (-\frac{1}{2})^9)}{1 - (-\frac{1}{2})} = -1\frac{25}{32} \approx -1,781$ .
- 229.** Kyseessä on geometrinen summa, jonka ensimmäinen termi  $a_1 = 3^{1,0}$ , suhdeluku  $q = 3^{0,1}$  ja termien lukumäärä  $n = 10$ . Summa on  $S = \frac{3^{1,0}(1 - (3^{0,1})^{10})}{1 - 3^{0,1}} = \frac{6}{\sqrt[10]{3} - 1} \approx 51,67$ .
- 230.** Lääkettä tarvittiin yhteensä  $S_{10} = \frac{10(1 - 0,5^{10})}{1 - 0,5} \approx 20(g)$ .

231. Palkkion maksamiseen tarvittaisiin  $S = \frac{2^0(1-2^{64})}{1-2} = 1,8447 \cdot 10^{19}$  vehnänjyvää. Niiden yhteinen massa olisi  $5,5 \cdot 10^{14}$  kg. Maailman vuotuinen vehnäsato on vain noin tuhannesosa luvatussta palkkiosta.

232. Annetussa lukujonossa on  $a_1 = \sqrt{2}$  ja  $q = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ . Tällöin  $a_7 = \sqrt{2}(\sqrt{3})^6 = 27\sqrt{2}$

ja  $S_7 = \frac{\sqrt{2}(1-(\sqrt{3})^7)}{1-\sqrt{3}} = 13\sqrt{6} + 40\sqrt{2}$ .

233. Lukujono  $a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4$  on geometrinen, koska

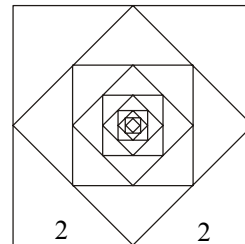
$$\frac{b^4}{ab^3} = \frac{ab^3}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^3b} = \frac{a^3b}{a^4} = \frac{b}{a} \text{ (= vakio)}. \text{ Myös vastaava summa}$$

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \text{ on geometrinen, ja } S = \frac{a^4(1-(\frac{b}{a})^5)}{1-\frac{b}{a}} = \frac{a^5 - b^5}{a - b}.$$

234. Suurimman neliön pinta-ala (cm<sup>2</sup>) on  $4^2 = 16$  ja seuraavan  $(2\sqrt{2})^2 = 8$ . Kolmannen ala on  $2^2 = 4$ , neljännen  $(\sqrt{2})^2 = 2$ , jne. Pinta-alat muodostavat geometrisen jonon,

jossa  $a_1 = 16$  ja  $q = \frac{1}{2}$ .  $S_{10} = \frac{16(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}} = 31\frac{31}{32} \approx 31,97$ .

Summa lähestyy lukua 32, sillä  $(\frac{1}{2})^n \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ .



235. a)  $3 \cdot 4^1 \cdot (\frac{1}{3})^1 \text{ cm} = 4,0 \text{ cm}$  b)  $3 \cdot 4^5 \cdot (\frac{1}{3})^5 \text{ cm} \approx 12,6 \text{ cm}$  c)  $3 \cdot 4^{50} \cdot (\frac{1}{3})^{50} \text{ cm} \approx 53 \text{ km}$

d) Epäyhtälön  $3 \cdot 4^n \cdot (\frac{1}{3})^n \geq 10\ 000$  ratkaisuna  $n \geq 28,2$ , jolloin tarvitaan vähintään 29 sakarointia.

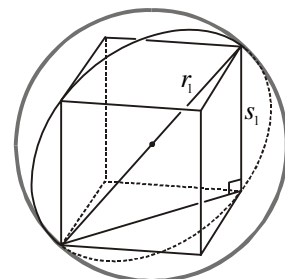
e) Vastaavasti epäyhtälön  $3 \cdot 4^n \cdot (\frac{1}{3})^n \geq 100\ 000$  ratkaisun mukaan tarvitaan vähintään 37 sakarointia.

236. Puumäärä kahdeksantena vuotena viimeisen istutuksen jälkeen on

$$0,92^8 \cdot 5\ 000 + 450 \cdot (0,92^7 + 0,92^6 + \dots + 1) = 0,92^8 \cdot 5\ 000 + \frac{450 \cdot (1 - 0,92^8)}{1 - 0,92} \approx 5\ 300.$$

Kahdeksan vuoden kuluttua metsässä on noin 5 300 puuta.

237. Olkoon ensimmäisen eli suurimman pallon säde  $r_1$  ja suurimman kuution särmä  $s_1$ . Halkaisija  $2r_1$  on samalla pallon sisään piirretyn kuution avaruuslävistäjä, ja sen pituus on  $s_1\sqrt{3}$ .



Näin ollen  $s_1 = \frac{2r_1}{\sqrt{3}}$ . Toisen pallon säde on  $r_2 = \frac{s_1}{2} = \frac{r_1}{\sqrt{3}}$  ja toisen kuution särmä

$s_2 = \frac{2r_1}{(\sqrt{3})^2}$ . Peräkkäisten kuutioiden tilavuudet muodostavat geometrisen jonon,

jonka suhdeluku on särmien suhteen kuutio eli  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ . Kymmenen ensimmäisen kuution tilavuuksien summa on

$$\frac{s_1^3 \left(1 - \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}} \approx 1,24s_1^3.$$

## 8 Sovelluksia

- 238.** 1. vuoden lopussa palstalla oli puuta ( $\text{m}^3$ )  $200 \cdot 1,12 - 20$ , ja vastaavasti  
 2. vuoden lopussa  $(200 \cdot 1,12 - 20) \cdot 1,12 - 20 = 200 \cdot 1,12^2 - 20(1,12 + 1)$   
 3. vuoden lopussa  $200 \cdot 1,12^3 - 20(1,12^2 + 1,12 + 1)$   
 ...  
 10. vuoden lopussa  $200 \cdot 1,12^{10} - 20(1,12^9 + 1,12^8 + 1,12^7 + \dots + 1)$

$$200 \cdot 1,12^{10} - 20 \cdot \frac{1,12^{10} - 1}{1,12 - 1} \approx 270 \text{ (m}^3\text{)}$$

- 239.** Pallon pompuista muodostuu geometrinen summa

$$10,8 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot 10,8 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 10,8 + \dots + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \cdot 10,8$$

$$= 10,8 + 2 \cdot 10,8 \cdot \frac{\frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right)}{1 - \frac{2}{3}} \approx 53,5 \text{ m.}$$

- 240.** Päällekkäin ladottujen kuutioiden tilavuudet muodostavat geometrisen summan:

$$1,00^3 + 0,90^3 + 0,81^3 + \dots, \text{ jossa } a_1 = 1,00^3, q = 0,90^3 \text{ ja } S_n = \frac{1,00^3(1 - 0,90^{3n})}{1 - 0,90^3}.$$

- a)** Kuutioiden lukumäärä  $n$  ratkaistaan epäyhtälöstä  $\frac{1,00^3(1 - 0,90^{3n})}{1 - 0,90^3} \geq 3,5$ . Ratkaisuna saadaan  $n \geq 9,38$ . Tarvitaan siis vähintään 10 kuutiota.

- b)** Epäyhtälö  $\frac{1,00^3(1 - 0,90^{3n})}{1 - 0,90^3} \geq 4,0$  sievenee aluksi muotoon  $1 - 0,90^{3n} \geq 4 \cdot 0,271$ ,

josta edelleen  $0,9^{3n} \leq -0,084$ . Koska tällä epäyhtälöllä ei ole ratkaisua, tornin tilavuus ei koskaan saavuta  $4,0 \text{ m}^3$ :n rajaa.

(Päätymättömän geometrisen sarjan summakaavaa käyttäen saadaan rakennelman maksimikorkeudeksi noin  $3,7 \text{ m}^3$ .)

- 241.** Kahden viikon aikana potilas ottaa lääkettä 15 kertaa. Elimistössä olevan lääkkeen määrä saadaan geometrisen summan arvona:

$$5,0 + 0,7^1 \cdot 5,0 + 0,7^2 \cdot 5,0 + 0,7^3 \cdot 5,0 + \dots + 0,7^{14} \cdot 5,0 = \frac{5,0(1-0,7^{15})}{1-0,7} \approx 16,6. \text{ Kahden}$$

viikon lääkekuurin jälkeen potilaan elimistössä on noin 16,6 mg kyseistä lääkettä.

- 242.** Pystytettäviä pylväitä on yhteensä  $\frac{10000}{50} + 1 = 201$  kappaletta, joten joudutaan ha-

kemaan  $\frac{201}{3} = 67$  kuormaa. Kun kolme ensimmäistä pylvästä on viety paikoilleen, on kuljettu  $2 \cdot 2,1$  kilometriä. Kun otetaan huomioon, että matka aina pitenee 150 metriä, saadaan aritmeettinen summa

$$2 \cdot (2,1 + (2,1 + 0,15) + (2,1 + 2 \cdot 0,15) + \dots + (2,1 + 66 \cdot 0,15)) =$$

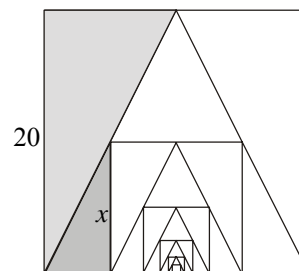
$$2 \cdot 67 \cdot \frac{2,1 + (2,1 + 66 \cdot 0,15)}{2} = 944,7. \text{ Kuljettava matka on vähintään 945 kilometriä.}$$

- 243.** Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan verranto  $\frac{x}{10-x/2} = \frac{20}{10}$ , josta pienemmän neliön sivu  $x = 10$ . Kunkin pienemmän neliön sivu on aina puolet edellisen neliön sivusta.

**a)** Neliöiden piirit muodostavat geometrisen summan, jossa ensimmäinen termi on

$$80 \text{ ja suhdeluku } \frac{1}{2}. \text{ Tällöin } S_6 = 80 + 80 \cdot \frac{1}{2} + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= 80 \cdot \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{2}} \approx 158. \text{ Piirien summa on noin 158 cm.}$$



**b)** Neliöiden pinta-alat muodostavat geometrisen summan,

jossa ensimmäinen termi on  $20^2$  ja suhdeluku  $\frac{1}{4}$ .

$$S_6 = 20^2 + 20^2 \cdot \frac{1}{4} + 20^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + 20^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = 20^2 \cdot \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{4}} \approx 533.$$

Pinta-alojen summa on noin  $533 \text{ cm}^2$ .

- 244.** Olkoon pallon säde  $r_1$  ja kuution särmä  $a_1$ . Koska pallon sisällä olevan kuution lä-

vistäjä on  $2r_1$ , on  $a_1^2 + (a_1\sqrt{2})^2 = (2r_1)^2$ , josta  $a_1 = \frac{2r_1}{\sqrt{3}}$ . Kun kuution sisään asete-

taan pallo, on sen säde  $r_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{r_1}{\sqrt{3}}$ .

**a)** Kahden peräkkäisen pallon säteiden suhde  $\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Tämä ei riipu pallojen säteis-

tä, joten pallojen säteet muodostavat geometrisen jonon suhdeluvulla  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

b) Peräkkäisten pallojen pinta-alojen suhde on niiden säteiden suhteen neliö eli  $\frac{1}{3}$ .

Koska tämä ei riipu pallojen säteistä, muodostavat pinta-alat geometrisen jonon suhdeluvulla  $\frac{1}{3}$ .

c) Peräkkäisten pallojen tilavuuksien suhde on niiden säteiden suhteen kuutio eli  $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ . Koska tämä ei riipu pallojen säteistä, muodostavat tilavuudet geometrisen jonon suhdeluvulla  $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ .

245. Kaloja on toisen viikon alussa  $K_2 = 0,8 \cdot 5\,000 + 100$  ja kolmannen viikon alussa  $K_3 = 0,8 \cdot K_2 + 100 = 0,8^2 \cdot 5\,000 + 0,8 \cdot 100 + 100$ . Vastaavalla tavalla jatkamalla 20. viikon alussa on  $K_{20} = 0,8^{19} \cdot 5\,000 + 0,8^{18} \cdot 100 + 0,8^{17} \cdot 100 + \dots + 0,8 \cdot 100 + 100$ . Kalastusesongin päättyessä eli 20. viikon lopulla kaloja on

$$\begin{aligned} K_{20} &= 0,8 \cdot (0,8^{19} \cdot 5\,000 + 0,8^{18} \cdot 100 + 0,8^{17} \cdot 100 + \dots + 0,8 \cdot 100 + 100) \\ &= 0,8^{20} \cdot 5\,000 + 100 \cdot (0,8^{19} + 0,8^{18} + \dots + 0,8) \\ &= 0,8^{20} \cdot 5\,000 + 100 \cdot \frac{0,8 \cdot (1 - 0,8^{19})}{1 - 0,8} \approx 452. \end{aligned}$$

Kaloja ostettiin kaikkiaan  $5\,000 + 19 \cdot 100 = 6\,900$  kappaletta. Pyydettyjä kaloja oli näin ollen  $6\,900 - 452 = 6\,448$  kappaletta. Kun kappalehintaa merkitään  $x$ :llä, saadaan yhtälö  $6\,448x + 452 \cdot 13 = 6\,900 \cdot 10 + 50\,000$ , josta  $x \approx 17,55$  (mk).

246. Tilillä oli Sveitsin frangeja vuoden kuluttua  $1,008 \cdot 58$ , kahden vuoden  $1,008^2 \cdot 58$  ja  $n$  vuoden  $1,008^n \cdot 58$ . Pääoma on kaksinkertaistunut, kun  $1,008^n \cdot 58 = 2 \cdot 58$ . Tästä saadaan  $n$ :lle yhtälö  $1,008^n = 2$  eli  $n \ln 1,008 = \ln 2$ , josta  $n = \frac{\ln 2}{\ln 1,008} \approx 86,99$ .

Kyseessä on vuosi 1786.

Pääoma on nelinkertaistunut ajassa  $n = \frac{\ln 4}{\ln 1,008} \approx 173,98$ . Kyseessä on vuosi 1873.

Vuoden 2001 alussa pääoma on kasvanut määrään  $1,008^{302} \cdot 58 \approx 643,44$  Sveitsin frangia.

247. Peräkkäiset talletukset muodostavat geometrisen summan  $S = 2\,500 \cdot 1,0525^{10} + 2\,500 \cdot 1,0525^9 + \dots + 2\,500 \cdot 1,0525^5$ , jolle saadaan arvo
- $$S = \frac{2\,500 \cdot 1,0525^5 (1 - 1,0525^6)}{1 - 1,0525} \approx 22\,101,10 \text{ (euroa)}.$$

248. Vaihtoehdossa A auton hinta on  $0,40 \cdot 8\,000 + 0,60 \cdot 8\,000 \cdot 1,0475^{-2} \approx 7\,575$  (euroa), vaihtoehdossa B  $0,15 \cdot 8\,000 + 0,85 \cdot 8\,000 \cdot 1,0475^{-1} \approx 7\,692$  (euroa). Näin ollen vaihtoehto A on Kaleville edullisempi.

**249.** 1. vaihtoehto:

Maksettavaksi jäävän 130 000 euron nykyarvo on  $130\,000 \cdot 1,055^{-1} = 123\,222,75$  (euroa), jolloin konehankinnan nykyarvo on n. 373 223 euroa.

2. vaihtoehto:

Maksettavan summan nykyarvo on  $400\,000 \cdot 1,055^{-2} \approx 359\,381$  (euroa).

Siis jälkimmäinen vaihtoehto on edullisempi.

**250.** Lasketaan eri tarjousten nykyarvot.

Tarjous A:  $100\,000 + 150\,000 \cdot 1,07^{-2} + 300\,000 \cdot 1,07^{-5} \approx 444\,910$  (euroa)

Tarjous B:  $200\,000 + 200\,000 \cdot 1,07^{-3} + 75\,000 \cdot 1,07^{-4} \approx 420\,480$  (euroa)

Tarjous C: 395 000 (euroa)

Vastaus: Tarjous A on edullisin.

**251.** Ensimmäisen vuoden lopussa tilille on kertynyt rahaa määrä

$$K = \left(1 + \frac{5 \cdot 12}{1\,200}\right) \cdot 100 + \left(1 + \frac{5 \cdot 11}{1\,200}\right) \cdot 100 + \dots + \left(1 + \frac{5 \cdot 1}{1\,200}\right) \cdot 100$$

$$= \left(12 + \frac{5}{1\,200}(12 + 11 + \dots + 1)\right) \cdot 100 = \left(12 + \frac{5 \cdot 78}{1\,200}\right) \cdot 100 = 1\,232,5 \text{ (euroa).}$$

Sama määrä kertyy muina vuosina edellisten kasvaessa korkoa korolle. Alusta lasketuna  $n$ :n vuoden kuluessa tilillä on rahaa

$$(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \dots + \alpha + 1)K = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} K = \frac{1 - 1,05^n}{1 - 1,05} \cdot 1\,232,5 = 10\,000,$$

josta  $n \approx 6,98$ . Tavoitesummaan pääseminen kestää siis seitsemän vuotta, joten tililtä on nostettavissa 10 000 euroa vuoden 2007 lopussa.

**252.** Korkotekijä  $q = 1,0015$ . Ensimmäisen vuoden korko on

$200 \cdot 0,015 \cdot (12 + 11 + \dots + 1)/12 = 19,5$ . Pääoma ensimmäisen vuoden jälkeen on  $K = 12 \cdot 200 + 19,5 = 2\,419,5$ , toisen vuoden jälkeen  $(1 + q)K$ , kolmannen vuoden jälkeen  $(1 + q + q^2)K$  jne.

a) Kun poika täyttää 18 vuotta, tilillä on rahaa  $(1 + q + q^2 + \dots + q^{17})K = \frac{1 - q^{18}}{1 - q} K \approx 49\,574,0446$ .

b) Jos kaksioon on talletettu  $n$  vuotta, on  $K \frac{1 - q^n}{1 - q} = 135\,000$ , josta

$$q^n = 1 + \frac{q - 1}{K} \cdot 135\,000 \text{ eli } n = \frac{1}{\ln q} \ln\left(1 + \frac{q - 1}{K} \cdot 135\,000\right) \approx 40,84.$$

Vastaus: a) Pojan täyttäessä 18 vuotta tilillä on rahaa 49 574,04 euroa.

b) Kaksion ostoa vaatii 41 vuoden talletukset.

- 253.** Koneen vuosittaisten nettotuottojen nykyarvo 5 %:n korkokannalla on  
 $4\,200 \cdot (1,05^{-1} + 1,05^{-2} + 1,05^{-3} + 1,05^{-4} + 1,05^{-5}) \approx 18\,183,80$  (euroa).  
 Vastaavasti poiston nykyarvo on  $3\,300 \cdot 1,05^{-5} \approx 2\,585,64$  (euroa).  
 Koneen hankinta ei kannata, koska nettotuottojen ja poiston yhteinen nykyarvo 20 769,44 euroa on pienempi kuin hankintahinta 22 000 euroa.
- 254.** Summa  $a$  kasvaa 1.1.2002 alkaen tilillä korkotekijän  $q_1 = 1,0254$  mukaan ja 1.1.2003 alkaen toisella tilillä oleva samansuuruinen summa  $a$  korkotekijän  $q_2 = 1,0325$  mukaan. Kun jälkimmäisestä hetkestä on kulunut  $t$  vuotta, ovat summat kasvaneet yhtä suuriksi. Saadaan yhtälö  $q_1^{t+1} a = q_2^t a$  eli  $q_1^{t+1} = q_2^t$ . Tästä saadaan  
 $(t + 1) \ln q_1 = t \ln q_2$  eli  $t = \frac{\ln q_1}{\ln q_2 - \ln q_1} \approx 3,6350$ . Koska 3,6350 vuotta on 3 vuotta 7,6 kuukautta, ovat talletukset yhtä suuret elokuussa 2006.
- 255.** Viitenä ensimmäisenä vuotena yritys tuottaa voittoa  $5 \cdot (500\,000 - 105\,000)$  euroa = 1 975 000 euroa ja viitenä seuraavana vuonna  $5 \cdot 500\,000$  euroa = 2 500 000 euroa. Kymmenen vuoden aikana voitto on yhteensä 4 475 000 euroa. Merkitään kirjaimella  $k$  rahamäärää, joka yrityksestä kannattaa maksaa. Koska sijoitettu rahamäärä halutaan saada takaisin korkoineen kymmenessä vuodessa, on voimassa yhtälö  $1,06^{10} \cdot k = 4\,475\,000$ . Yhtälön ratkaisuna  $k \approx 2\,498\,816,63$ .  
*Vastaus:* Yrityksestä kannattaa maksaa noin 2,5 miljoonaa euroa.
- 256.** Olkoon uuden auton hinta  $a$  euroa. Liisa on käyttänyt 12 vuoden aikana auton oston rahaa yhteensä  
 $a(1 + 1,05^3 + 1,05^6 + 1,05^9 + 1,05^{12}) - 0,9^3 a(1 + 1,05^3 + 1,05^6 + 1,05^9) \approx 3,164a$ .  
 Matti on käyttänyt vastaavana aikana rahaa  
 $a(1 + 1,05^4 + 1,05^8 + 1,05^{12}) - 0,9^4 a(1 + 1,05^4 + 1,05^8) \approx 3,065a$ .  
 Liisa on käyttänyt  $\frac{3,164a - 3,065a}{3,065a} \cdot 100\% \approx 3,2\%$  enemmän rahaa kuin Matti.
- 257.** a) Korkoa maksetaan kaikkiaan  

$$0,15K + 0,15(K - \frac{K}{n}) + 0,15(K - 2 \cdot \frac{K}{n}) + \dots + 0,15(K - (n-1) \cdot \frac{K}{n})$$

$$= n \cdot 0,15K - 0,15K(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{(n-1)}{n})$$

$$= 0,15K(n - \frac{1}{n} \cdot (n-1) \cdot \frac{1+n-1}{2}) = 0,075K(n+1).$$
- b) Epäyhtälön  $0,075K(n+1) > K$  ratkaisuna  $n > 12,3$  eli täysinä vuosina  $n \geq 13$ .
- c) Kohonneet korkomenot ovat  $0,085K(n+1)$ . Tällöin korkomenojen suhde on  
 $\frac{0,085}{0,075} \approx 1,133$ , joten korkomenot nousevat 13,3 %.

# Lisätehtäviä Trigonometria

## Suunnattu kulma ja radiaani

2. a)  $36^\circ = 36 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$       b)  $-315^\circ = -315 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{7\pi}{4}$   
 c)  $1170^\circ = 1170 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{13\pi}{2}$       d)  $-1065^\circ = -1065 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{71\pi}{12}$
3. a)  $b = 1,65 \cdot 7,8 \text{ cm} = 12,87 \text{ cm}$       b)  $r = \frac{9,5\pi}{7\pi} \approx 6,786$ ;  $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{7\pi}{5} \cdot 6,786^2 \approx 101,3$   
 $\frac{5}{5}$
4. a) Yhtälöparista  $\begin{cases} 2r + b = p \\ b/r = 1, \end{cases}$  jossa  $r$  on säde ja  $b$  kaari, saadaan  $r = \frac{p}{3}$ .  
 b) Sektorin pinta-ala  $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^2 = \frac{p^2}{18}$ .

## Yksikköympyrä, kuvaajia ja lausekkeita

3.  $\sin 660^\circ = \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos 660^\circ = \cos 300^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\tan 660^\circ = \tan 300^\circ = -\sqrt{3}$
4. a)  $\sin^2 \pi + \sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$   
 b)  $\frac{\sin \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{2}}{\tan \frac{3\pi}{8}} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$
5. Koska kulma  $\beta$  on neljännessä neljänneksessä, niin  $\cos \beta = +\sqrt{1 - \sin^2 \beta}$   
 $= \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$ .
6. Koska kulma  $x$  on kolmannessa neljänneksessä, kosini on negatiivinen. Näin olen  $\cos x = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$ . Tällöin  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}$ .
7.  $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = 2$ , joten  $\cos t = \frac{\sin t}{2}$ . Yhtälöstä  $\sin^2 t + \cos^2 t = \sin^2 t + \frac{\sin^2 t}{4} = 1$   
 saadaan  $\sin t = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Sini on kolmannessa neljänneksessä negatiivinen, joten  
 $\sin t = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ .

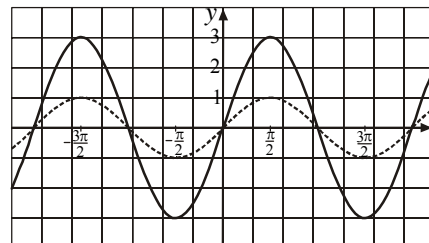
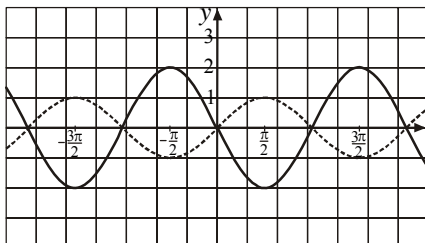
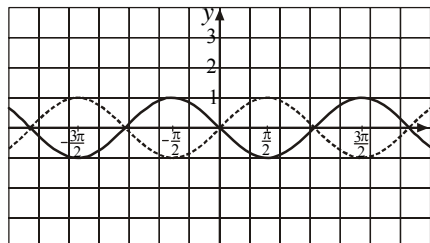
8. a)  $\sin(\pi - \phi) + \sin(\phi + \pi) = \sin \phi - \sin \phi = 0$   
 b)  $2 \cos(-\beta) + \cos(\beta + 2\pi) = 2 \cos \beta + \cos \beta = 3 \cos \beta$   
 c)  $\cos(\pi - x) + 3 \sin(-x) + \sin(x + \pi) = -\cos x - 3 \sin x - \sin x = -4 \sin x - \cos x$

9. Sinikäyrä on piirretty alla oleviin kuviin katkoviivalla.

a)  $y = -\sin x$

b)  $y = -2 \sin x$

c)  $y = 3 \sin x$



10. a)  $y = 1 + \sin x$       b)  $y = 2 - \sin x$       c)  $y = \frac{1}{2} \sin x$       d)  $y = -2 \sin x$

11. a) Koska sinin arvojoukko on  $[-1, 1]$ ,  $\sin 3x$ :n suurin arvo 1 ja pienin  $-1$ .  
 b) Koska sinin arvojoukko on  $[-1, 1]$ , lausekkeen  $1 - 2 \sin x$  suurin arvo on 3 ja pienin  $-1$ .  
 c) Kosinin arvojoukko on  $[-1, 1]$ . Koska lausekkeen  $3 - \cos x$  pienin arvo on 2 ja suurin 4, lausekkeen  $\frac{2}{3 - \cos x}$  suurin arvo on 1 ja pienin  $\frac{1}{2}$ .
12. Kolmion ala  $A = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 4,8 \cdot \sin \alpha$  saa suurimman arvonsa  $8,6 \text{ cm}^2$ , kun  $\sin \alpha = 1$ , jolloin  $\alpha = 90^\circ$ .

## Trigonometriset yhtälöt

1. a)  $\cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \approx \pm 70,5^\circ + n \cdot 360^\circ \approx \pm 1,23 + n \cdot 2\pi$   
 b)  $\cos 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x \approx \pm 70,53^\circ + n \cdot 360^\circ \approx \pm 1,231 + n \cdot 2\pi$   
 $\Leftrightarrow x \approx \pm 35,3^\circ + n \cdot 180^\circ \approx \pm 0,62 + n\pi$   
 c)  $\cos 3x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x \approx \pm 70,53^\circ + n \cdot 360^\circ \approx \pm 1,231 + n \cdot 2\pi$   
 $\Leftrightarrow x \approx \pm 23,5^\circ + n \cdot 120^\circ \approx \pm 0,41 + n \frac{2\pi}{3}$
2. a)  $\cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$   
 $\Leftrightarrow x = \pm 20^\circ + n \cdot 120^\circ = \pm \frac{\pi}{9} + n \frac{2\pi}{3}$

$$\text{b) } \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x = 45^\circ + n \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \text{ tai}$$

$$2x = 135^\circ + n \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 22,5^\circ + n \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{8} + n\pi \text{ tai}$$

$$x = 67,5^\circ + n \cdot 180^\circ = \frac{3\pi}{8} + n \cdot \pi$$

$$\text{c) } \tan 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = 135^\circ + n \cdot 180^\circ = \frac{3\pi}{4} + n\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 67,5^\circ + n \cdot 90^\circ = \frac{3\pi}{8} + n \frac{\pi}{2}$$

$$3. \text{ a) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = n \cdot 2\pi$$

$$\text{b) } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pi + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

$$\text{c) } \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + n\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{11\pi}{12} + n\pi \Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{24} + n \frac{\pi}{2}$$

$$4. \text{ a) } \sin x = \sin(x + 17^\circ) \Leftrightarrow x = x + 17^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ tai } x = 180^\circ - x - 17^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2x = 163^\circ + n \cdot 360^\circ \Leftrightarrow x = 81,5^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\text{b) } \sin x = \sin(2x - 90^\circ) \Leftrightarrow x = 2x - 90^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ tai } x = 180^\circ - 2x + 90^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow -x = -90^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ tai } 3x = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 90^\circ + n \cdot 120^\circ$$

$$\text{c) } \cos(2x - 10^\circ) = \cos(x + 25^\circ) \Leftrightarrow 2x - 10^\circ = \pm(x + 25^\circ) + n \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 35^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ tai } 3x = -15^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 35^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ tai } x = -5^\circ + n \cdot 120^\circ$$

$$5. \text{ a) } \cos x - \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos 3x \Leftrightarrow x = \pm 3x + n \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow -2x = n \cdot 360^\circ \text{ tai } 4x = n \cdot 360^\circ \Leftrightarrow x = n \cdot 180^\circ \text{ tai } x = n \cdot 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = n \cdot 90^\circ$$

$$\text{b) } \sin x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ tai } \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ tai } x = 150^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ tai } x = -90^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ + n \cdot 120^\circ$$

$$\text{c) } \sin 2x = \tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \Leftrightarrow \sin 2x \left(1 - \frac{1}{\cos 2x}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ tai } \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = n \cdot 180^\circ \text{ tai } 2x = n \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = n \cdot 90^\circ \text{ tai } x = n \cdot 180^\circ \Leftrightarrow x = n \cdot 90^\circ$$

$$6. \text{ a) } \sin x = 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ tai } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = n\pi \text{ tai } x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ tai } x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

6. b)  $2 \cos(x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$   
 $\Leftrightarrow x = \pi + n \cdot 2\pi$  tai  $x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$
7. a)  $2 \sin x = 3 \tan x \Leftrightarrow 2 \sin x - 3 \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x (2 - \frac{3}{\cos x}) = 0$   
 $\Leftrightarrow \sin x = 0$  tai  $2 - \frac{3}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$  tai  $\cos x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = n\pi$
- b)  $\sin^2 x + 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (\sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$  tai  $\sin x = -2 \Leftrightarrow x = n\pi$
8. Etsitään yhtälön  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$  ratkaisut, kun  $x \in [0, \pi]$ .  
 $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + n\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$  ja  $x = \frac{7\pi}{6}$ ,  
kun  $x \in [0, \pi]$ .
9. Sijoittamalla juuret  $x_1 = \pi$  ja  $x_2 = -\frac{\pi}{3}$  yhtälöön  $a \cos^2 x - b \cos x - 1 = 0$  saadaan yhtälöpari  $a + b - 1 = 0$  ja  $\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b - 1 = 0$ . Sen ratkaisuna  $a = 2$  ja  $b = -1$ . Näillä arvoilla saadaan yhtälö  $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ , josta  $\cos x = \frac{1}{2}$  tai  $\cos x = -1$ . Ratkaisut ovat  $x = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$  tai  $x = \pi + n \cdot 2\pi$ .
- \*10. a)  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin x \cos x \Leftrightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x \Leftrightarrow \tan 2x = -2$   
 $\Leftrightarrow 2x \approx 116,57^\circ + n \cdot 180^\circ$   
 $\Leftrightarrow x \approx 58,3^\circ + n \cdot 90^\circ \approx 1,02 + n \frac{\pi}{2}$
- b)  $\cos 2x + 1 = \cos^2 x + \sin 2x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 + 1 = \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$   
 $\Leftrightarrow \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos x - 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$  tai  $\tan x = \frac{1}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + n\pi$  tai  $x \approx 26,6^\circ + n \cdot 180^\circ \approx 0,46 + n\pi$
- \*11. Annetusta ehdosta saadaan yhtälö  $\cos 2x = 2 \cos x$ ,  $x \in [90^\circ, 180^\circ]$ .  
 $\cos 2x = 2 \cos x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cos x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 2 \cos x - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow \cos x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (\approx 1,37)$  tai  $\cos x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \approx \pm 111,5^\circ + n \cdot 360^\circ$
- Ehdon täyttää kulma, jonka suuruus on noin  $111,5^\circ$ .

## Trigonometrinen funktioiden derivaatat

$$3. \quad \text{a)} \quad D \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$$

$$\text{b)} \quad D \tan 2x = 2(1 + \tan^2 2x) = \frac{2}{\cos^2 2x}$$

$$\text{c)} \quad D\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right) = D\left(\frac{\sin x + 1}{\cos x}\right) = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x} \quad (\text{vertaa a-kohta})$$

$$4. \quad \text{a)} \quad \text{Kun } f(x) = \frac{1}{\sin x}, \text{ on } f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}. \text{ Ehto } f'(x) = 0 \text{ toteutuu kosinin nollakohdissa } x = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

$$\text{b)} \quad \text{Kun } f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}, \text{ on } f'(x) = 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \left(-\sin \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \sin x. \text{ Ehto } f'(x) = 0 \text{ toteutuu sinin nollakohdissa } x = n\pi.$$

$$\text{c)} \quad \text{Kun } f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \cos x}, \text{ on } f'(x) = \frac{\cos x(\sqrt{2} + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(\sqrt{2} + \cos x)^2}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{2} \cos x}{(\sqrt{2} + \cos x)^2}. \text{ Ehto } f'(x) = 0 \text{ toteutuu, kun } \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ eli kohdissa}$$

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi.$$

5. Jaksollisuudesta johtuen riittää tutkia väli  $x \in [0, 2\pi]$ . Käyrä  $y = \cos x$  leikkaa  $x$ -akselin kohdissa  $x = \frac{\pi}{2}$  ja  $x = \frac{3\pi}{2}$ . Näihin pisteisiin piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat  $k_1 = y'(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$  ja  $k_2 = y'(\frac{3\pi}{2}) = -\sin(\frac{3\pi}{2}) = 1$ .

$$\text{Koska } k = \tan \alpha, \text{ saadaan leikkauskulmiksi } -45^\circ \text{ ja } 45^\circ.$$

6. Kun  $f(x) = \cos x - \sin x$ , on  $f'(x) = -\sin x - \cos x$ . Ehto  $f'(x) = 0$  toteutuu, kun  $\tan x = -1$ . Ratkaisuista  $\frac{3\pi}{4}$  ja  $\frac{7\pi}{4}$  kuuluvat välille  $[0, 2\pi]$ .

7. Koska  $-1 \leq \cos x \leq 1$  ja kolmas potenssi on aidosti kasvava, on  $-1 \leq \cos^3 x \leq 1$ . Silloin  $-1 \leq -\cos^3 x \leq 1$  ja siis  $0 \leq 1 - \cos^3 x \leq 2$ . Tällöin taas  $0 \leq (1 - \cos^3 x)^3 \leq 8$ . Kun esimerkiksi  $f(0) = 0$  ja  $f(\pi) = 8$ , funktion pienin arvo on 0 ja suurin 8.

*Huomautus:* Suurin ja pienin arvo voidaan määrittää myös tavalliseen tapaan derivaattaa käyttäen.

8. Funktio on jatkuva ja jaksollinen, joten se saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa ja kaikki niiden väliset arvot välillä  $[0, 2\pi]$ . Derivaatta  $f'(x) = 2 \cos x - 2 \sin 2x = 2 \cos x - 4 \sin x \cos x = 2 \cos x(1 - 2 \sin x)$ .

Sen välillä  $[0, 2\pi]$  olevat nollakohdat  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$  ja  $\frac{5\pi}{6}$  ratkeavat ehdoista  $\cos x = 0$  ja  $\sin x = \frac{1}{2}$ . Arvoista  $f(\frac{\pi}{2}) = 1, f(\frac{3\pi}{2}) = -3, f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}, f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{3}{2}, f(0) = 1$  ja  $f(2\pi) = 1$  suurin on  $\frac{3}{2}$  ja pienin  $-3$ .

*Toinen ratkaisutapa:* Tehtävä voidaan käsitellä myös niin, että funktion lauseke muokataan seuraavasti:

$$\begin{aligned} 2\sin x + \cos 2x &= 2\sin x + 1 - 2\sin^2 x = -2(\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4}) + 1 + \frac{1}{4} \\ &= -2(\sin x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Tästä päätellään suoraan suurin ja pienin arvo. Nämä voidaan löytää myös merkitsemällä  $\sin x = t$  ja siirtymällä tarkastelemaan funktiota  $g(t) = -2t^2 + 2t + 1$  välillä  $-1 \leq t \leq 1$ .

- 9.** Funktion  $f(x) = \sin^2 x \cos^4 x$  derivaatta  $f'(x) = 2\sin x \cos^3 x(3\cos^2 x - 2)$  on 0, kun  $\sin x = 0$  tai  $\cos x = 0$  tai  $\cos^2 x = \frac{2}{3}$ . Viimemainitussa tapauksessa  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{1}{3}$ . Sanotuilla yhdistelmillä funktion suurin arvo  $\frac{4}{27}$  ja pienin 0.

*Toinen ratkaisutapa:* Koska  $f(x) = (1 - \cos^2 x)\cos^4 x$ , voidaan merkitä  $\cos^2 x = t$  ja siirtyä tarkastelemaan funktion  $g(t) = (1-t)t^2 = t^2 - t^3$  suurinta ja pienintä arvoa välillä  $0 \leq t \leq 1$ .

- 10.** Funktion  $f(x) = x - \frac{2}{3}\sin x - \pi$  derivaatta  $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos x$  on aina positiivinen, joten  $f$  on aidosti kasvava ja  $f^{-1}$  siis olemassa. On määritettävä derivaatta  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ , kun  $y_0 = 0$ . Luku  $x_0$  toteuttaa yhtälön  $x_0 - \frac{2}{3}\sin x_0 - \pi = 0$ .

Huomataan, että  $x_0 = \pi$  on ratkaisu. Muita ratkaisuja ei ole, koska funktio  $f$  on aidosti kasvava. Käänteisfunktion derivaatan arvoksi saadaan

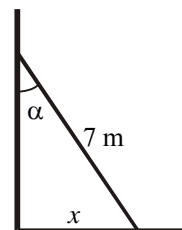
$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}\cos \pi} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}.$$

- 11.** Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan lukuarvoyhtälö  $\sin \alpha = \frac{x}{7}$  ja siitä edelleen derivoimalla  $\cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{7} \frac{dx}{dt}$ . Tästä  $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{7\cos \alpha} \cdot \frac{dx}{dt}$ . Koska tikkaiden alapäätä vedetään nopeudella 0,5 m/s, on  $\frac{dx}{dt} = 0,5$  (m/s). Sijoitetaan vielä

$$\cos 60^\circ = 0,5, \text{ jolloin } \frac{d\alpha}{dt} = \frac{0,5}{7 \cdot 0,5} = \frac{1}{7}.$$

Siis kulman kasvunopeus

kysytyllä hetkellä on  $\frac{1}{7}$  rad/s  $\approx 8,2^\circ/\text{s}$ .



# Lisätehtäviä Lukujonot

## Lukujono

- $1, 2, 3, 4, \dots$  sääntönä esim.  $a_n = n$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ )
  - $1, 2, 3, 5, \dots$  sääntönä esim.  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$   
(kolmannesta alkaen kahden edellisen jäsenen summa)
  - $1, 2, 3, 6, \dots$  käytetään esimerkiksi sääntöä  $a_n = \frac{n^3}{3} - 2n^2 + \frac{14n}{3} - 2$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ )  
(tai neljännessä alkaen edellisten jäsenten tulo)
- $a_1 = 1, a_2 = \frac{a_1}{2+1} = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1/3}{3+1} = \frac{1}{12}, a_4 = \frac{1/12}{4+1} = \frac{1}{60}, a_5 = \frac{1/60}{5+1} = \frac{1}{360}$   
Viisi ensimmäistä jäsentä ovat  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{60}$ , ja  $\frac{1}{360}$ .
  - $a_1 = 5, a_2 = 1 + \frac{5}{10} = 1\frac{1}{2}, a_3 = 1 + \frac{1\frac{1}{2}}{10} = 1\frac{3}{20}, a_4 = 1 + \frac{1\frac{3}{20}}{10} = 1\frac{23}{200},$   
 $a_5 = 1 + \frac{1\frac{23}{200}}{10} = 1\frac{223}{2000}$ . Viisi ensimmäistä jäsentä ovat  $5, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{20}, 1\frac{23}{200}$ , ja  $1\frac{223}{2000}$ .
  - $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2 \cdot 1 - 0 = 2, a_4 = 2 \cdot 2 - 1 = 3, a_5 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$   
Viisi ensimmäistä jäsentä ovat  $0, 1, 2, 3$ , ja  $4$ .
- $a_1 = \frac{(-1)^1 \cdot 1}{1^2 + 1} = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{(-1)^2 \cdot 2}{2^2 + 1} = \frac{2}{5}, a_3 = \frac{(-1)^3 \cdot 3}{3^2 + 1} = -\frac{3}{10}, a_4 = \frac{(-1)^4 \cdot 4}{4^2 + 1} = \frac{4}{17}$   
 $a_5 = \frac{(-1)^5 \cdot 5}{5^2 + 1} = -\frac{5}{26}$ . Viisi ensimmäistä jäsentä ovat  $-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{10}, \frac{4}{17}$ , ja  $-\frac{5}{26}$ .
- Annetuista ehdoista saadaan yhtälöpari  $\begin{cases} 1 = m \cdot 0 + c \\ 3 = m \cdot 1 + c, \end{cases}$  josta  $m = 2$  ja  $c = 1$ .
- Olkoot aritmeettisen jonon kolme peräkkäistä jäsentä  $a - d, a$  ja  $a + d$ .  
 Summaehdosta saadaan  $a - d + a + a - d = 3a = 21$ , josta  $a = 7$ .  
 Tuloehto puolestaan antaa yhtälön  $(a - d) \cdot a \cdot (a + d) = a(a^2 - d^2) = 315$ .  
 Kun otetaan huomioon, että  $a = 7$ , saadaan  $d = \pm 2$ . Kysytyt jäsenet ovat  $5, 7$  ja  $9$ .
- $k = 18$ . Yhtälöparin  $\begin{cases} 3a_1 + 18d = 17 \\ 11a_1 + 88d = 77 \end{cases}$  ratkaisuna  $a_1 = \frac{5}{3}$  ja  $d = \frac{2}{3}$ , jolloin  
 $a_k = \frac{5}{3} + (k-1)\frac{2}{3} = 3$ . Tästä saadaan  $k = 18$ .
- Annetun lukujonon differenssi  $d = (4a - b) - (3a - 2b) = a + b$ . Tällöin lukujonon kolme seuraavaa jäsentä ovat  $7a + 2b, 8a + 3b$  ja  $9a + 4b$ .

8. Yhtälöparin  $\begin{cases} a_1 q^3 = 1 \\ a_1 q^7 = \frac{1}{256} \end{cases}$  ratkaisuna saadaan  $a_1 = 64$  ja  $q = \frac{1}{4}$ , jolloin

$$a_{10} = 64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{4\,096}.$$

9. a) Kyseessä on aritmeettinen lukujono, jossa  $a_1 = 3$  ja  $d = 4$ . Tällöin  $a_{10} = 3 + 9 \cdot 4 = 39$ .

b) Lukujono on geometrinen, ja siinä  $a_1 = 1,0$  ja  $q = 1,2$ . Tällöin  $a_{10} = 5,159780352$ .

c) Jonon yleinen jäsen on  $a_n = 2n^2$ , joten  $a_{10} = 2 \cdot 10^2 = 200$ .

10. Lukujono on aidosti vähenevä, jos  $a_{n+1} - a_n < 0$  kaikilla  $n \in \mathbf{Z}_+$ .

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{(n+1)(n^2 + 1) - n((n+1)^2 + 1)}{((n+1)^2 + 1)(n^2 + 1)} \\ &= -\frac{n^2 + n - 1}{(n^2 + 2n + 2)(n^2 + 1)} < 0, \text{ kun } n \geq 1 \end{aligned}$$

11. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2$ . Lukujono suppenee, ja sen raja-arvo on 2.

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4}{n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n-2)}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n-2) = \infty$ . Lukujono hajaantuu.

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 25}{n^2 + 5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)(n-5)}{n(n+5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-5}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right) = 1$ . Lukujono suppenee, ja sen raja-arvo on 1.

12. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{7n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{7 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{7}$       b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-3n}{5n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - 3}{5 + \frac{1}{n}} = -\frac{3}{5}$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+3) - n^2(n+1)}{(n+1)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + 4n + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} = 2 \end{aligned}$$

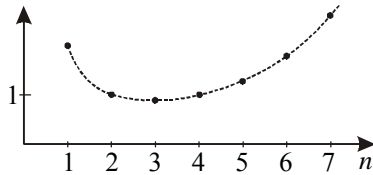
13. Kyseessä aritmeettinen lukujono, jossa  $a_1 = 14$  ja  $d = 4$ . Epäyhtälön  $14 + (n-1) \cdot 4 < 1\,111$  ratkaisuna  $n < 275,25$ . Ehdon täyttäviä jäseniä on 275.

14. Tutkitaan lukujonon asemasta funktiota  $f(x) = \frac{2^x}{x^2}$ ,  $x \geq 1$ , joka on määrittelyjoukossaan jatkuva. Derivaatan  $f'(x) = \frac{x^2 \cdot 2^x \ln 2 - 2x \cdot 2^x}{x^4} = \frac{2^x(x^2 \ln 2 - 2x)}{x^4}$  ainoa nol-

lakohta on yhtälön  $x^2 \ln 2 - 2x = 0$  ratkaisu  $x = \frac{2}{\ln 2} \approx 2,9$ . Derivaatan merkkitarkastelun mukaan funktion arvot pienenevät kohtaan

$\frac{2}{\ln 2}$  asti ja kasvavat sen jälkeen. Lukujonon  $\frac{2^n}{n^2}$  jä-

senet ovat alusta lukien  $2, 1, \frac{8}{9}, 1, 1\frac{7}{25}, \dots$ . Tällöin



voidaan päätellä, että neljä pienintä jäsentä ovat  $a_2 = 1, a_3 = \frac{8}{9}, a_4 = 1$  ja  $a_5 = 1\frac{7}{25}$ .

15. a) Linearisessa mallissa peräkkäisten ikäluokkien erotus on vakio. Ikäluokkien 1–81 väliin voidaan sijoittaa ikäluokat kahdenkymmenen vuoden välein. Peräkkäiset ikäluokat ovat näin ollen 1-, 21-, 41-, 61- ja 81-vuotiaat.

b) Eksponentiaalisessa mallissa peräkkäisten ikäluokkien suhde on vakio. Suhdeluku  $q$  saadaan yhtälöstä  $1 \cdot q^4 = 81$ , josta  $q = 3$ . Tällöin peräkkäiset ikäluokat ovat 1-, 3-, 9-, 27- ja 81-vuotiaat.

16. Olkoot  $a$  ensimmäinen jäsen ja  $q$  suhdeluku ( $a > 0, q > 0$ ). Annetuista ehdoista saa-

daan yhtälöpari 
$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 5,07 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{aq} + \frac{1}{aq^2} = 3. \end{cases}$$
 Sievennetään yhtälöparia seuraavasti:

$a(1 + q + q^2) = 5,07$  ja  $\frac{1 + q + q^2}{aq^2} = 3$ . Kun jälkimmäisestä yhtälöstä saatu

$1 + q + q^2 = 3aq^2$  sijoitetaan edelliseen, saa se muodon  $a \cdot 3aq^2 = 5,07$ . Tästä rat-

kaistu  $a = \frac{1,3}{q}$  sijoitetaan yhtälöön  $a(1 + q + q^2) = 5,07$ , ja tuloksena on

$q^2 - 2,9q + 1 = 0$ . Toisen asteen yhtälön ratkaisuna  $q = 2,5$  tai  $q = 0,4$ . Vastaavasti  $a = 0,52$  tai  $a = 3,25$ . Lukujonon jäsenet ovat  $0,52; 1,30; 3,25$  tai  $3,25; 1,30; 0,52$ .

17. Lukujonon  $a_1, a_2, a_3, a_4$  kolme ensimmäistä lukua muodostavat geometrisen jonon, joten  $a_2 = a_1q$  ja  $a_3 = a_1q^2$ , jossa  $q$  on suhdeluku. Koska annetun jonon kolme viimeistä luku muodostavat aritmeettisen jonon, on  $a_4 = a_2 + 12$  ja  $a_4 = a_3 + 6$ .

Koska  $a_4 = a_1$ , saadaan yhtälöparit 
$$\begin{cases} a_2 = a_1q \\ a_1 = a_2 + 12 \end{cases}$$
 ja 
$$\begin{cases} a_3 = a_1q^2 \\ a_1 = a_3 + 6. \end{cases}$$
 Edellinen sieve-

nee muotoon  $a_2 = \frac{12q}{1-q}$  ja jälkimmäinen muotoon  $a_3 = \frac{6q^2}{1-q}$ . Koska  $a_3 = a_2q$ , on

$\frac{6q^2}{1-q} = q \cdot \frac{12q}{1-q}$ . Ratkaisuna  $q = -\frac{1}{2}$ . Sijoitukset lukujonon jäsenten lausekkeisiin antavat haetut luvut. Vastaus: Luvut ovat 8, -4, 2 ja 8.

18. Kirjoitetaan annettu ehto muotoon  $(a_1 + 6d) + (a_1 + 9d) = (a_1 + 7d) + (a_1 + 8d)$ , josta nähdään, että yhtälön on identtisesti tosi:  $2a_1 + 15d = 2a_1 + 15d$ . Yhtälö on näin ollen tosi kaikille aritmeettisille lukujonoille.

19. a) Aritmeettisessä jonossa  $a_1 = 4$  ja  $a_5 = 4 + 4d = 1$ , joten  $d = -\frac{3}{4}$ . Tällöin

$$a_2 = 4 - \frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}, a_3 = 4 - 2 \cdot \frac{3}{4} = 2\frac{1}{2}, a_4 = 4 - 3 \cdot \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4} \text{ ja } a_{10} = 4 - 9 \cdot \frac{3}{4} = -2\frac{3}{4}.$$

$$\text{Vastaus: } a_2 = 3\frac{1}{4}, a_3 = 2\frac{1}{2}, a_4 = 1\frac{3}{4}, a_{10} = -2\frac{3}{4}$$

b) Geometrisessä jonossa  $a_1 = 4$  ja  $a_5 = 4q^4 = 1$ , joten  $q = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Tällöin

$$a_2 = 4 \cdot (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pm 2\sqrt{2}, a_3 = 4 \cdot (\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 2, a_4 = 4 \cdot (\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^3 = \pm\sqrt{2} \text{ ja}$$

$$a_{10} = 4 \cdot (\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^9 = \pm\frac{1}{4\sqrt{2}}. \text{ Vastaus: } a_2 = \pm 2\sqrt{2}, a_3 = 2, a_4 = \pm\sqrt{2}, a_{10} = \pm\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

20. Olkoot kolmion sivujen pituudet  $a, b$  ja  $7,0$ . Koska sivujen pituudet muodostavat aritmeettisen lukujonon, on  $7 - b = b - a$ , josta  $a = 2b - 7$ . Kosilauseen mukaan  $7^2 = (2b - 7)^2 + b^2 - 2(2b - 7)b \cos 120^\circ$  ja edelleen  $7b^2 - 35b = 0$ . Toisen asteen yhtälön ratkaisusta tulee kysymykseen vain arvo  $b = 5$ , jolloin  $a = 3$ . Sinilauseella saadaan selville sivun  $b$  vastainen kulma:  $\frac{7,0}{\sin 120^\circ} = \frac{5,0}{\sin \beta}$ . Yhtälön ratkaisuna  $\beta \approx 38,2^\circ$ . Kolmas kulma  $\alpha = 180^\circ - 120^\circ - 38,2^\circ = 21,8^\circ$ . Kolmion sivut ovat  $3,0$  cm ja  $5,0$  cm, kulmat  $21,8^\circ$  ja  $38,2^\circ$ .

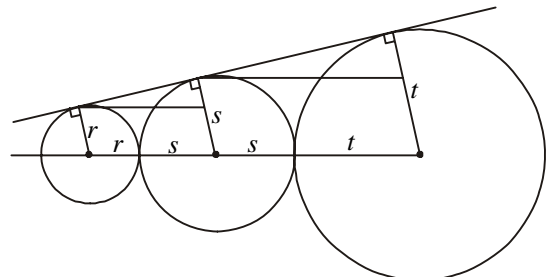
21. Valitaan mitkä tahansa kolme peräkkäistä ympyrää. Niiden säteet olkoot pienimmästä alkaen  $r, s$ , ja  $t$ . Jos  $\frac{s}{r} = \frac{t}{s}$ , niin  $r, s$ , ja  $t$  muodostavat tässä järjestyksessä geometrisen jonon. Samoin muodostavat silloin geometrisen jonon myös kaikkien peräkkäisten ympyröiden säteet.

Kuvaan on piirretty kaksi suorakulmaista yhdenmuotoista ( $kk$ ) kolmiota. Niistä saadaan verranto  $\frac{s-r}{r+s} = \frac{t-s}{s+t}$ . Ristiin

kertomalla ja sieventämällä päädytään

$$\text{yhtälöön } s^2 = rt \text{ eli yhtälöön } \frac{s}{r} = \frac{t}{s}.$$

Tämä todistaa väitteen.



22. Lukujono  $(a_n)$  on aidosti kasvava, jos  $a_n < a_{n+1}$  eli  $a_n - a_{n+1} < 0, n \in \mathbf{Z}_+$ .

$$a_n - a_{n+1} = n^2 x^2 - nx + x - ((n+1)^2 x^2 - (n+1)x + x) = (-2n-1)x^2 + x < 0. \text{ Saadun epäyhtälön ratkaisuna } x < 0 \text{ tai } x > \frac{1}{2n+1}.$$

Jotta jälkimmäinen ehto toteutuisi kaikilla  $n$ :n arvoilla, tulee olla  $x > \frac{1}{3}$ . Tuloksena on  $x < 0$  tai  $x > \frac{1}{3}$ .

23. Lukujonon neljä ensimmäistä jäsentä ovat  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2} + 1$  ja

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) + 1 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} + 1. \text{ Yleinen jäsen } x_n = \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + \left( \frac{1}{2} \right)^{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1.$$

Kyseessä on geometrinen lukujono, jonka ensimmäinen jäsen on 1, suhdeluku  $\frac{1}{2}$  ja

$$\text{jäsenten lukumäärä } n. \text{ Siispä } x_n = \frac{1 \cdot \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) \rightarrow 2, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

## Summa

1.  $2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = \sum_{n=2}^7 n^3 = 783$

2. a)  $\sum_{n=1}^7 \frac{3}{n} = \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} + \frac{3}{7} = \frac{1089}{140} = 7 \frac{109}{140}$

b)  $\sum_{i=3}^6 \frac{2i}{i+2} = \frac{6}{5} + \frac{8}{6} + \frac{10}{7} + \frac{12}{8} = 5 \frac{97}{210}$

c)  $\sum_{n=7}^{11} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n+3} = \frac{9}{10} - \frac{10}{11} + \frac{11}{12} - \frac{12}{13} + \frac{13}{14} = \frac{54839}{60060} \approx 0,9131$

3.  $\sum_{n=1}^5 n^2 - \left( \sum_{n=1}^5 n \right)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 - (1+2+3+4+5)^2 = -170$

4. a) Kyseessä on aritmeettinen summa, jossa  $a_1 = 5, d = 5$  ja  $n = 1111$ . Termien lukumäärä  $n$  saadaan yhtälöstä  $5555 = 5 + (n-1) \cdot 5$ . Tällöin

$$S = 1111 \cdot \frac{5 + 5555}{2} = 3088580.$$

b) Summa on geometrinen, ja siinä  $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$  ja  $n = 14$ . Termien lukumäärä  $n$

ratkaistaan yhtälöstä  $1 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{8192}$ , joka sievenee muotoon  $2^{n-1} = 8192$ . Tästä

$$n = 14, \text{ jolloin } S = \frac{1 \cdot \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{14} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \frac{8191}{8192} \approx 1,9999.$$

5. Annetussa jonossa  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $d = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$  ja  $a_7 = \frac{1}{3} + (7-1) \cdot \frac{1}{2} = 3\frac{1}{3}$ . Tällöin

$$S_7 = 7 \cdot \frac{\frac{1}{3} + \frac{10}{3}}{2} = \frac{77}{6} = 12\frac{5}{6}.$$

6. Kyseisen aritmeettisen jonon differenssi  $d = -9\frac{1}{3} - (-10) = \frac{2}{3}$ . Viimeisen negatiivisen jäsenen järjestysnumero  $n$  ratkaistaan epäyhtälöstä  $-10 + (n-1) \cdot \frac{2}{3} < 0$ . Epäyhtälö toteutuu, kun  $n < 16$ , mikä tulos merkitsee, että negatiivisia jäseniä on 15 kappaletta.

$$\text{Näin ollen summa } S_{15} = 15 \cdot \frac{-10 + (-10 + 14 \cdot \frac{2}{3})}{2} = -80.$$

7. Ehto  $a_5 + a_{16} = 44$  saadaan muotoon  $2a_1 + 19d = 44$  ja ehto  $S_{18} = 3S_{10}$  muotoon  $-12a_1 + 18d = 0$ . Näistä ratkaisemalla ensimmäinen termi  $a_1 = 3$  ja differenssi  $d = 2$ .

8. Yhdeksällätoista jaolliset nelinumeroiset luvut muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen on 1 007, differenssi 19 ja viimeinen jäsen 9 994. Jäsenten lukumäärä 474 ratkaistaan yhtälöstä  $9\,994 = 1\,007 + (n-1) \cdot 19$ . Tällöin

$$S = 474 \cdot \frac{1\,007 + 9\,994}{2} = 2\,607\,237.$$

9. Annetun geometrisen jonon  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $q = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ . Näin ollen

$$a_{10} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^9 = (\sqrt{2})^{10} = 32 \text{ ja } S_{10} = \frac{\sqrt{2}(1 - (\sqrt{2})^{10})}{1 - \sqrt{2}} = 62 + 31\sqrt{2}.$$

10. Aritmeettinen summa:  $a_1 = 1$ ,  $d = 0,05$ ,  $a_{10} = 1 + 9 \cdot 0,05 = 1,45$ . Tällöin

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{1 + 1,45}{2} = 12,25.$$

$$\text{Geometrisen summa: } a_1 = 1, q = 1,05. \text{ Tällöin } S_{10} = \frac{1 \cdot (1 - 1,05^{10})}{1 - 1,05} \approx 12,5779.$$

$$\text{Summien prosentuaalinen ero on } \frac{12,5779 - 12,25}{12,25} \approx 2,7 \text{ \%}.$$

11. Määrittelyehtona on  $x > 0$ . Summa on aritmeettinen, kun  $\ln(x+4) - \ln x =$

$$\ln x - \ln 2. \text{ Yhtälö sievenee muotoon } \ln \frac{x+4}{x} = \ln \frac{x}{2}, \text{ josta edelleen } \frac{x+4}{x} = \frac{x}{2}.$$

Ratkaisuista  $x = -2$  tai  $x = 4$  vain jälkimmäinen täyttää määrittelyehdon.

12. Jonon 888. jäsen on  $888 \cdot 2$  ja 999. jäsen  $999 \cdot 2$ .  $S_{888} = 888 \cdot \frac{2 + 888 \cdot 2}{2} = 789\,432$

$$\text{ja } S_{999} = 999 \cdot \frac{2 + 999 \cdot 2}{2} = 999\,000. \text{ Tällöin } 100 \cdot \frac{999\,000 - 789\,432}{789\,432} \approx 26,5 \text{ \%}.$$

13. Olkoon alkuperäinen aritmeettinen summa  $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} + a_{101}$ . Uudet summat ovat  $S_1 = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{90} + a_{91}$  ja  $S_2 = a_2 + a_4 + \dots + a_{98} + a_{100}$ . Edellisessä summassa on 81 termiä ja jälkimmäisessä 50 termiä.

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 81 \cdot \frac{a_{11} + a_{91}}{2} = 81 \cdot \frac{(a_1 + 10d) + (a_1 + 90d)}{2} = 81(a_1 + 50d) \\ S_2 &= 50 \cdot \frac{a_2 + a_{100}}{2} = 50 \cdot \frac{(a_1 + d) + (a_1 + 99d)}{2} = 50(a_1 + 50d) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{81}{50}$$

14. a) Aukealla on taimia ensimmäisen vuoden keväällä 100 kappaletta, toisen vuoden keväällä  $0,95 \cdot 100 + 100$ , kolmannen vuoden keväällä  $0,95^2 \cdot 100 + 0,95 \cdot 100 + 100$  ja  $n$ :nnen vuoden keväällä  $0,95^{n-1} \cdot 100 + 0,95^{n-2} \cdot 100 + \dots + 100$  kappaletta. Yhdenentoista vuoden keväällä viimeisen istutuksen jälkeinen taimimäärä saadaan geometrisena summana

$$S_{11} = \frac{100 \cdot (1 - 0,95^{11})}{1 - 0,95} + 100 \approx 962,40 \approx 960.$$

b) Tuhannesta istutetusta kuusentaimesta on tuhoutunut noin 38, joka on 3,8 % istutetuista taimista.

15. a) Harjoitusajat muodostavat geometrisen lukujonon, jossa  $a_1 = 15$  min ja  $q = 1,05$ . Harjoittelu-aika 30. päivänä on  $a_{30} = 15 \cdot 1,05^{30-1} \approx 62$  min.

b) Harjoitteluajoista muodostuu geometrinen summa

$$S_{30} = \frac{15 \cdot (1 - 1,05^{30})}{1 - 1,05} \approx 997 \text{ min} = 16 \text{ h } 37 \text{ min}.$$

16. Yhtälöstä  $3\,230 = \alpha^3 \cdot 3\,000$  saadaan korkotekijäksi  $\alpha \approx 1,0249$ . Tilillä on kuuden vuoden kuluttua rahaa  $1,0249^6 \cdot 3\,000 \approx 3\,477,63$  (euroa).

17. Merkitään annuiteettia kirjaimella  $a$ . Velan suuruus on

- ensimmäisen vuoden lopussa  $1,055 \cdot 60\,000 - a$
- toisen vuoden lopussa  $1,055 \cdot (1,055 \cdot 60\,000 - a) - a = 1,055^2 \cdot 60\,000 - 1,055a - a$
- kolmannen vuoden lopussa  
 $1,055 \cdot (1,055^2 \cdot 60\,000 - 1,055a - a) - a = 1,055^3 \cdot 60\,000 - 1,055^2 a - 1,055a - a$   
 ....
- kuudennen vuoden lopussa  
 $1,055 \cdot (1,055^2 \cdot 60\,000 - 1,055a - a) - a = 1,055^3 \cdot 60\,000 - 1,055^2 a - 1,055a - a$   
 $1,055^6 \cdot 60\,000 - 1,055^5 a - 1,055^4 a - 1,055^3 a - 1,055^2 a - 1,055a - a$   
 $= 1,055^6 \cdot 60\,000 - a(1,055^5 + 1,055^4 + 1,055^3 + 1,055^2 + 1,055 + 1)$   
 $= 1,055^6 \cdot 60\,000 - a \cdot \frac{1 - 1,055^6}{1 - 1,055}$

Koska velka on maksettu kuudessa vuodessa, on  $1,055^6 \cdot 60\,000 - a \cdot \frac{1 - 1,055^6}{1 - 1,055} = 0$ ,

$$\text{josta } a = \frac{1,055^6 \cdot 60\,000(1 - 1,055)}{1 - 1,055^6} \approx 12\,010,74 \text{ (euroa).}$$

18. Kun lasketaan jokaisen 5 000 euron maksuerän nykyarvot, saadaan käteishinta:

$$\begin{aligned} & 50\,000 + 5\,000 \cdot 1,06^{-1} + 5\,000 \cdot 1,06^{-2} + \dots + 5\,000 \cdot 1,06^{-10} \\ &= 50\,000 + 5\,000(1,06^{-1} + 1,06^{-2} + \dots + 1,06^{-10}) \\ &= 50\,000 + 5\,000 \cdot \frac{1,06^{-1}(1 - 1,06^{-10})}{1 - 1,06^{-1}} \approx 86\,800 \text{ euroa.} \end{aligned}$$

19. a) Tarjous A: 160 000 euroa

$$\begin{aligned} \text{Tarjous B: } & 50\,000 + 25\,000 \cdot 1,05^{-1} + 25\,000 \cdot 1,05^{-2} + \dots + 25\,000 \cdot 1,05^{-5} \\ &= 50\,000 + 25\,000(1,05^{-1} + 1,05^{-2} + \dots + 1,05^{-5}) \\ &= 50\,000 + 25\,000 \cdot \frac{1,05^{-1}(1 - 1,05^{-5})}{1 - 1,05^{-1}} \approx 158\,236,92 \text{ euroa} \end{aligned}$$

Tarjous A on myyjälle 1 763 euroa edullisempi.

- b) Kun korko on 3,5 %, tarjous B:n suuruus on

$$50\,000 + 25\,000 \cdot \frac{1,035^{-1}(1 - 1,035^{-5})}{1 - 1,035^{-1}} \approx 162\,876,31 \text{ euroa.}$$

Tarjous B on myyjälle 2 876 euroa edullisempi.

## Pikatesti

- a)  $-1777^\circ = -1777 \cdot \frac{\pi}{180} \approx -31,0 \text{ rad}$       b)  $1777 = 1777 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 101814,6^\circ$
- a)  $r = \frac{5,5 \text{ cm}}{\frac{7\pi}{4}} \approx 1,0 \text{ cm}$       b)  $A = \frac{1}{2} \cdot 5,5 \text{ cm} \cdot 1,0 \text{ cm} \approx 2,8 \text{ cm}^2$
- Käytetään hyväksi tietoa, että sinifunktion suurin arvo on 1 ja pienin  $-1$ .

a)  $\sin 5x$ :n suurin arvo 1 ja pienin arvo  $-1$ . (Esim.  $5x = \pi/2$  ja  $5x = -\pi/2$ )

b)  $2\sin 5x$ :n suurin arvo on 2 ja pienin arvo  $-2$ . (Vrt. a-kohta)

c)  $(1 + 2\sin 5x)$ :n suurin arvo 3 ja pienin arvo  $-1$ . (Vrt. a-kohta)
- a)  $\sin 3x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x = 41,8^\circ + n \cdot 360^\circ$  tai  $3x = 138,2^\circ + n \cdot 360^\circ$   
 $\Leftrightarrow x = 13,9^\circ + n \cdot 120^\circ$  tai  $x = 46,1^\circ + n \cdot 120^\circ$

b)  $\sin x = \sin 35^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ + n \cdot 360^\circ$  tai  $x = 145^\circ + n \cdot 360^\circ$

c)  $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = 45^\circ + n \cdot 180^\circ$
- a)  $D \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

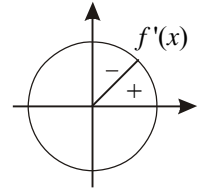
b)  $D \frac{\cos x}{x^2} = \frac{x^2(-\sin x) - 2x \cos x}{x^4} = -\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3}$       c)  $D \tan \frac{x}{4} = \frac{1}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4})$

6. a) 14, 17, 20,  $a_n = 2 + 3n$     b)  $\frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, a_n = \frac{n}{n+1}$     c) 48, 75, 108,  $a_n = 3n^2$
7. Jäsenet kolmannaasta lähtien saadaan kahden edellisen summana. Jonon kymmenen ensimmäistä jäsentä ovat: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123. Näin ollen  $a_{10} = 123$ .
8. a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 3$ . Lukujono suppenee, ja raja-arvo on 3.
- b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} = 0$ . Lukujono suppenee, ja raja-arvo on 0.
- c) Lukujono hajaantuu, sillä  $\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 5) = \infty$ .
9. a) Summa on aritmeettinen,  $a_1 = 7$  ja  $d = 7$ . Yhteenlaskettavien lukumäärä  $n = 77$  lasketaan yhtälöstä  $539 = 7 + (n-1) \cdot 7$ . Tällöin  $S = 77 \cdot \frac{7+539}{2} = 21\,021$ .
- b) Summa on geometrinen,  $a_1 = 7$  ja  $q = 7$ . Yhteenlaskettavien lukumäärä  $n = 7$  lasketaan yhtälöstä  $823\,543 = 7 \cdot 7^{n-1}$ . Tällöin  $S = \frac{7 \cdot (1-7^7)}{1-7} = 960\,799$ .
10. Soveltamalla annuiteetin kaavaa  $a = \frac{\alpha^n(1-\alpha)}{1-\alpha^n} \cdot k$  saadaan
- $$a = \frac{1,04^{10}(1-1,04)}{1-1,04^{10}} \cdot 100\,000 \approx 12\,329,09 \text{ (euroa)}$$

## Kertauskoe 1

1. Origoon asetetun tangentin yhtälö on muotoa  $y = f'(0) \cdot x$ . Koska  $f(x) = \sin x$ , on  $f'(0) = \cos 0 = 1$ . Näin ollen tangentin yhtälö on  $y = x$ . Arvo käyrältä on  $y = \sin 0,25 \approx 0,25$ , ja arvo tangentilta  $y = x = 0,25$ .
2. a)  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -0,222 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + x = \pm 1,795 + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \pm 1,795 - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$   
 $\Leftrightarrow x = 1,01 + n \cdot 2\pi$  tai  $x = -2,58 + n \cdot 2\pi$
- b)  $\sin 2x = \sin 3x \Leftrightarrow 2x = 3x + n \cdot 2\pi$  tai  $2x = \pi - 3x + n \cdot 2\pi$   
 $\Leftrightarrow x = n \cdot 2\pi$  tai  $x = \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5}$
- c)  $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$  tai  $3x = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$  tai  $x = \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

3. Oletuksen mukaan  $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$  ja  $x + y = \frac{\pi}{2}$ , joten  $\sin x + \sin y = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x + \cos x$ . Funktion  $f(x) = \sin x + \cos x$  derivaatan  $f'(x) = \cos x - \sin x$  nollakohdat saadaan yhtälöstä  $\tan x = 1$ . Ainoa kysymykseen tuleva kulma on  $\frac{\pi}{4}$ . Se on maksimikohta, ja funktio saa siinä suurimman arvonsa  $\sqrt{2}$ .



4. Olkoot luvut  $a$  ja  $b$ . Tällöin jonon peräkkäiset jäsenet ovat  $a + b, a - b, ab$  ja  $\frac{a}{b}$ . Ehdoista, että kyseessä on aritmeettinen lukujono saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a - b - (a + b) = ab - (a - b) \\ \frac{a}{b} - ab = ab - (a - b) \end{cases} \text{ ja edelleen } \begin{cases} a(b - 1) = -3b \\ a(\frac{1}{b} - 2b + 1) = b. \end{cases}$$

Ratkaisuna saadaan  $a = -\frac{9}{8}$  ja  $b = -\frac{3}{5}$ .

5. Puumäärä kahdeksantena vuotena viimeisen istutuksen jälkeen on

$$0,88^8 \cdot 7000 + 600 \cdot (0,88^7 + 0,88^6 + \dots + 1) = 0,88^8 \cdot 7000 + \frac{600 \cdot (1 - 0,88^8)}{1 - 0,88} \approx 5700.$$

Kahdeksan vuoden kuluttua metsässä on noin 5 700 puuta.

6. Tutkitaan funktiota  $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 210}$ ,  $x \geq 1$ , joka on jatkuva välillä  $x \geq 1$  ja derivoituva välillä  $x > 1$ . Derivaatan  $f'(x) = \frac{420x - x^4}{(x^3 + 210)^2}$  ainoa nollakohta

$x = \sqrt[3]{420} \approx 7,49$  on funktion suurimman arvon kohta. Arvoilla  $1 \leq x \leq \sqrt[3]{420}$  funktio on aidosti kasvava ja arvoilla  $x \geq \sqrt[3]{420}$  aidosti vähenevä. Siksi jompikumpi luvuista  $f(7)$  tai  $f(8)$  on lukujonon suurin jäsen. Koska  $f(7) = \frac{7}{9} \approx 0,08861$  ja

$$f(8) = \frac{32}{361} \approx 0,08864, \text{ lukujonon kahdeksas jäsen } a_8 = \frac{32}{361} \approx 0,08864 \text{ on suurin.}$$

7. Summa voidaan jakaa kahdeksi osasummaksi seuraavasti:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + \dots + (3n - 2) + (3n - 1) \\ &= (1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)) + (2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1)) \end{aligned}$$

Edellinen on aritmeettinen summa, jossa  $a_1 = 1, d = 3$ , termien lukumäärä  $n$  ja summan arvo  $S = n \cdot \frac{1 + (3n - 2)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$ .

$$S = n \cdot \frac{1 + (3n - 2)}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

Jälkimmäisessä summassa  $a_1 = 2, d = 3$ , termien lukumäärä  $n$  ja summan arvo

$$S = n \cdot \frac{2 + (3n - 1)}{2} = \frac{3n^2 + n}{2}. \text{ Yhteensä osasummat ovat } \frac{3n^2 - n}{2} + \frac{3n^2 + n}{2} = 3n^2.$$

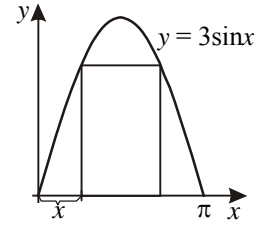
8. Käyrä  $y = 3 \sin x$  kulkee origon kautta ja sen ensimmäinen positiivinen nollakohta on  $x = \pi$ . Suorakulmion kannan pituus on kuvan merkintöjen mukaisesti  $\pi - 2x$ . Piirin pituuden ilmaisee

funktio  $p(x) = 2(\pi - 2x) + 6 \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . Derivaatan

$p'(x) = -4 + 6 \cos x$  ainoa nollakohta  $x \approx 0,841$  ratkeaa yhtä-

löstä  $\cos x = \frac{2}{3}$ . Siinä kohdassa piiri saavuttaa pisimmän arvonsa  $p(0,841) \approx 7,39$ ,

sillä määrittelyvälin päätepistearvot  $p(0) = 2\pi$  ja  $p(\frac{\pi}{2}) = 6$  ovat sitä pienempiä.



## Kertauskoe 2

1. Koska kulma  $\alpha$  on kolmannessa neljänneksessä, sen kosini on negatiivinen.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}, \quad \tan \alpha = \frac{-5/13}{-12/13} = \frac{5}{12}$$

2. a)  $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - 2x + n \cdot 2\pi$  tai  $2x = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + n \cdot 2\pi$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

b)  $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ tai } x = -\pi + n \cdot 2\pi$$

c)  $\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + n\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{\pi}{3}$

3. a)  $\cos 4x$  :n suurin arvo on 1 ja pienin  $-1$ . (Esim.  $4x = 0$  ja  $4x = \pi$ ). Silloin funktion  $f(x) = 4 - \cos 4x$  suurin arvo on 5 ja pienin 3.

*Toisin:* Tehtävä voidaan ratkaista myös tavalliseen tapaan ääriarvotehtävänä funktion derivaattaa käyttäen.

b) Muunnoskaavan  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  avulla funktion  $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$

lauseke saadaan muotoon  $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ . Koska  $x$  saa kaikki reaalilukuarvot,

$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$  :n suurin arvo on 1, joten funktion suurin arvo on  $\sqrt{2}$ .

*Toisin:* Jaksollisuuden takia  $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2} + n2\pi\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + n2\pi\right) =$

$\sin \frac{1}{2}(x + n4\pi) + \cos \frac{1}{2}(x + n4\pi)$ . Nähdään, että funktion arvot toistuvat  $4\pi$  :n välein,

joten rajataan tutkimus välille  $[0, 4\pi]$ . Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$$

Kysymykseen tulevat kohdat  $\frac{\pi}{2}$  ja  $\frac{5\pi}{2}$ . Koska  $f(0) = 1$ ,  $f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$ ,

$f(\frac{5\pi}{2}) = -\sqrt{2}$  ja  $f(4\pi) = 1$ , funktion suurin arvo on  $\sqrt{2}$ .

4. Portaille asetetut lamput muodostavat aritmeettisen jonon, jossa  $a_1 = 1$  ja  $d = 1$ . Alimmalle portaalille tarvittavien lamppujen määrä  $n$  on sama kuin portaiden lukumäärä, ja se ratkaistaan yhtälöstä  $1\ 081 = n \cdot \frac{1 + (n-1) \cdot 1}{2}$ , joka sievenee toisen asteen yhtälöksi  $n^2 + n - 2\ 162 = 0$ . Positiivisena juurena  $n = 46$ , joka merkitsee portaitten lukumäärää.
5. Vaihtoehto A:  $20\ 000 + 20\ 000 \cdot 1,047^{-2} + 20\ 000 \cdot 1,047^{-4} \approx 54\ 888$  (euroa)  
 Vaihtoehto B:  $40\ 000 + 15\ 000 \cdot 1,047^{-3} \approx 53\ 069$  (euroa)  
 Vaihtoehto C: 52 000 (euroa)  
 Vaihtoehto A on edullisin.
6. Olkoon jono  $a, aq, aq^2, \dots$ . Tällöin on  $a + aq + aq^2 = 3$  ja  
 $12 = a + aq + aq^2 + \dots + aq^5 = a + aq + aq^2 + q^3(a + aq + aq^2) = 3 + 3q^3$ .  
 Siis  $q^3 + 1 = 4$  eli  $q = \sqrt[3]{3}$ . Edelleen  
 $S = 12 + aq^6 + aq^7 + aq^8 + aq^9 = 12 + q^6(a + aq + aq^2) = 12 + 3(\sqrt[3]{3})^6 = 39$ .
7. Ehto toteutuu, kun  $\ln(2^x + 1) - \ln(2^x - 1) = \ln(2^x - 1) - \ln 2$ . Sievennyksen tuloksena saadaan toisen asteen yhtälö  $(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 1 = 0$ , jonka ratkaisuna  $2^x = 2 \pm \sqrt{5}$ .  
 Koska miinusmerkki ei tule kysymykseen, on  $x = \frac{\ln(2 + \sqrt{5})}{\ln 2} \approx 2,08$ .
8. Kosinin vähennyslaskukaavan perusteella yhtälö  $\sin x \sin y + \cos x \cos y = 1$  voidaan kirjoittaa muotoon  $\cos(x - y) = 1$ . Tämä toteutuu, kun  $x - y = n \cdot 2\pi$ . Yhtälö esittää parvea yhdensuuntaisia suoria  $y = x + n \cdot 2\pi$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Esimerkiksi, jos  $n = 0$ , suora on  $y = x$ .

## Tehtäviä eri kielillä

1. Lös följande ekvationer:

a)  $\sin 3x + \sin x = 0$  (Utnyttja att  $\sin(-x) = -\sin x$ .)      b)  $\cos^2 x = 3 \sin x - 3$

2. Consider the equation  $\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} = \cos x$ .

a) Use an automatic grapher to graph each side as a function of  $x$  for  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

b) For what values of  $x$  in the above domain does the equation seem to be true?

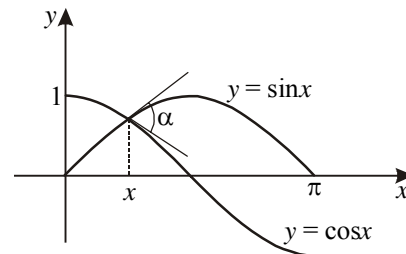
c) Evaluate both sides of the equation for  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

d) Modify the equation to make it an identity.

3. Differenzieren Sie die Funktionen, deren Terme unten gegeben sind. Wenden Sie Kettenregel und Produktregel an.

a)  $x^2 \sin x$       b)  $\sin(2x^2)$       c)  $x \cos(1 - 3x)$

4. An welcher Stelle  $x$  und unter welchem Winkel  $\alpha$  schneiden sich die Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion im Intervall  $[0; \pi]$ ?



5. Find expression for the following series in  $\Sigma$  notation.

a)  $1 + 8 + 27 + \dots + 4\,096$       b)  $-2 + 3 - 4 + 5 - \dots + 41$       c)  $\frac{1}{4} + \frac{4}{7} + \frac{9}{10} + \dots + \frac{144}{37}$

6. Write the first six terms of the sequence  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1. \end{cases}$  Tell, whether the sequence is arithmetic, geometric, or neither.

7. Talen  $x$ ,  $y$  och  $z$  är de tre första talen i en geometrisk talföljd och talen  $x$ ,  $y$  och  $z$  är de tre första talen i en aritmetisk talföljd. Bestäm kvoten  $y/x$ .

8. In training for marathon, an athlete runs 7 500 meters on the first day, 8 000 meters the next day, 8 500 meters the third day, and each day thereafter runs 500 meters more than on the previous day. How far will the athlete run in all at the end of thirty days?

**Svar, Answers, Lösungen:**

1. a)  $x = n\frac{\pi}{2}$ , b)  $x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ , 2. b)  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , c)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  and  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ , d) Hint: absolute

value, 3. a)  $2x \sin x + x^2 \cos x$ , b)  $4x \cos(2x^2)$ , c)  $\cos(1 - 3x) + 3x \sin(1 - 3x)$ , 4.  $x = \frac{\pi}{4}$ ,

$\alpha \approx 70,5^\circ$ , 5. a)  $\sum_{n=1}^{16} n^3$ , b)  $\sum_{n=1}^{40} (-1)^n (n+1)$ , c)  $\sum_{n=1}^{12} \frac{n^2}{3n+1}$ , 6. 1, 3, 7, 15, 31, 63. Neither,

7.  $y/x = 2 - \sqrt{3}$  eller  $y/x = 2 + \sqrt{3}$ , 8. 442,5 km

# Tehtävien ratkaisuja

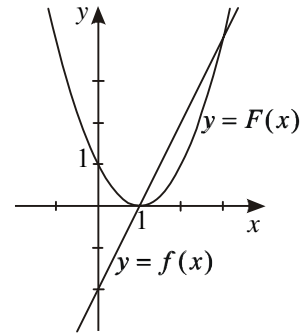
## Integraalilaskenta

### Integraalifunktio

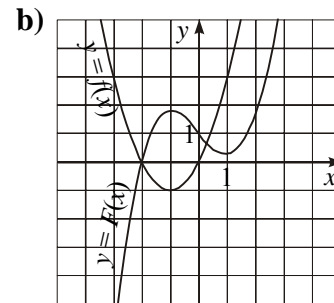
#### 2 Integraalifunktio

- Osoitetaan, että  $F'(x) = f(x)$ , jolloin  $F$  on  $f$ :n integraalifunktio.
  - $F(x) = x + 20$ , joten  $F'(x) = 1 = f(x)$ .
  - $F(x) = 1 + 2x - x^2$ , joten  $F'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x) = f(x)$ .
  - $F(x) = (3x + 5)^2$ , joten  $F'(x) = 2(3x + 5) \cdot 3 = 18x + 30 = f(x)$ .
- Koska  $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{x}{2} - 32$ , niin  $F'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x + \frac{1}{2} = 2x^2 - 12x + \frac{1}{2} = f(x)$ . Siis  $F$  on  $f$ :n integraalifunktio.
- Kun  $\int f(x)dx = 2x^3 + 4x + C$ , niin  $D(2x^3 + 4x + C) = 6x^2 + 4 = f(x)$
- |   |  |
|---|--|
| a) $f(x) = F'(x) = -\frac{1}{x^2}$                    | b) $f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$ |
| c) $f(x) = F'(x) = -\sin x$                           | d) $f(x) = F'(x) = 2 \cos 2x$                  |
| e) $f(x) = F'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}, x > 0$ | f) $f(x) = F'(x) = 2e^{2x}$                    |
- |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\int 1dx = x + C$                | b) $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$   |
| c) $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ | d) $\int x^3dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ |
- |                                  |                                |
|----------------------------------|--------------------------------|
| a) $D \int e^{x^2} dx = e^{x^2}$ | b) $D \int f(x)dx = f(x)$      |
| c) $\int f'(x)dx = f(x) + C$     | d) $\int f''(x)dx = f'(x) + C$ |
- $F(x) = \int \cos x dx = \sin x + C$ .  $F(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} + C = 1 + C = 3$ , josta  $C = 2$ . Kysytty integraalifunktio on  $F(x) = \sin x + 2$ .

8. Kaikki funktion  $f(x) = 2x - 2$  integraalifunktiot ovat  $F(x) = x^2 - 2x + C$ . Niistä yhden kuvaaja sivuaa  $x$ -akselia, jolloin sivuamiskohdassa  $F'(x) = 0$ . Tästä saadaan sivuamiskohdaksi  $x = 1$ . Edelleen  $F(1) = 0$ , joten  $1 - 2 + C = 0$  ja  $C = 1$ . Niinpä kysytty integraalifunktio on  $F(x) = x^2 - 2x + 1$ .



9. Kuvassa **b** funktio  $F$  ei ole  $f$ :n integraalifunktio, koska esimerkiksi  $F'(1) = 0 \neq f(1)$ . Kuva **b** on ohessa.



10. a)  $\int (x+1)e^x dx = xe^x + C$  on tosi, sillä

$$D(xe^x + C) = 1e^x + xe^x = (x+1)e^x.$$

- b)  $\int (1 + \ln x) dx = x \ln x + C$ ,  $x > 0$ , on tosi, sillä

$$D(x \ln x + C) = 1 \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

- c)  $\int \sin(1-x) dx = \cos(1-x) + C$  on tosi, sillä

$$D(\cos(1-x) + C) = -\sin(1-x) \cdot (-1) = \sin(1-x)$$

- d)  $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + C$  on epätosi, sillä  $D(\ln(x^2+1) + C) = \frac{2x}{x^2+1}$ .

11. Koska  $F'(x) = D(5 - \sin^2 x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$ , niin  $F$  on funktion  $f(x) = -\sin 2x$  integraalifunktio.

$G'(x) = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$ , joten myös  $G$  on funktion  $f$  integraalifunktio.

12. Funktiot  $F_1(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$  ja  $F_2(x) = \frac{-1}{x^2+1}$  ovat funktion  $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$  integraalifunktioita, sillä  $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ . Koska funktiot  $F_1$  ja  $F_2$  ovat saman funktion integraalifunktioita, ne eroavat toisistaan ainoastaan integroimisvakion osalta. Se merkitsee, että  $F_1(x) - F_2(x) = C$  eli  $F_1(x) = F_2(x) + C$ . Tässä tapauksessa  $C = 1$  eli  $\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{-1}{x^2+1} + 1$ .

### 3 Yleisiä integroimissääntöjä

18. a)  $\int \frac{x^3+1}{x^2} dx = \int (x + x^{-2}) dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C$

b)  $\int \frac{x-1}{x^3} dx = \int (x^{-2} - x^{-3}) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$

c)  $\int (x + \frac{1}{x})^2 dx = \int (x^2 + 2 + x^{-2}) dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C$

19. a)  $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

b)  $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

c)  $\int \frac{7}{\sqrt{x}} dx = \int 7x^{-\frac{1}{2}} dx = 7 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C = 14\sqrt{x} + C$

20. a)  $\int \sqrt[3]{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x^1 x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$
- b)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} \, dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C$
- c)  $\int x \sqrt[3]{x} \, dx = \int x x^{\frac{1}{3}} \, dx = \int x^{\frac{4}{3}} \, dx = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + C = \frac{3}{7} x^2 x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + C$
21.  $g(x) = \frac{1}{3} x^3 + x + C$ , joten  $g(6) - g(3) = \frac{1}{3} \cdot 6^3 + 6 + C - (\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 + C) = 66$ .
22.  $\frac{dy}{dx} = (x-1)(3x-5) = 3x^2 - 8x + 5$ , joten  $y = x^3 - 4x^2 + 5x + C$ . Koska  $y(1) = 1 - 4 + 5 + C = 0$ , on  $C = -2$  ja siis  $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ .
23. a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + C$ . Koska  $f(0) = -10$ , niin  $C = -10$ .
- b)  $f'(x) = 3(2-x)^2 = 12 - 12x + 3x^2$ , joten  $f(x) = 12x - 6x^2 + x^3 + C$ . Ehdosta  $f(0) = 0$  määräytyy  $C = 0$ .
24. Derivaatta  $y' = 2x + 1$  ilmaisee kohtaan  $x$  asetetun tangentin kulmakertoimen. Käyrän yhtälö on  $y = x^2 + x + C$ . Koska piste  $(-3, 0)$  on käyrällä, tulee olla  $C = -6$ . Käyrän yhtälö on siis  $y = x^2 + x - 6$ .
25. Koska  $f(x) = 2x + 2$ , niin  $F(x) = x^2 + 2x + C$ . Integraalikäyrät ovat paraabeleja, joiden huiput ovat derivaatan nollakohdassa  $x = -1$ . Asetetaan  $F(-1) = 0$ , jolloin tulee olla  $C = 1$ . Kysytty integraalifunktio on  $F(x) = x^2 + 2x + 1$ .
26. a)  $\int (x+1)\sqrt{x} \, dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) \, dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$
- b)  $\int (x-1)\sqrt[3]{x} \, dx = \int (x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{1}{3}}) \, dx = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} - \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$
- c)  $\int (\sqrt{x} - 1)^2 \, dx = \int (x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1) \, dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + x + C = \frac{1}{2} x^2 - \frac{4}{3} x \sqrt{x} + x + C$
27. a)  $\int \frac{x}{\sqrt{x}} \, dx = \int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$
- b)  $\int \frac{\sqrt{x} - x}{x} \, dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - 1) \, dx = 2\sqrt{x} - x + C$
- c)  $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \, dx = \int \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} \, dx = \int (\sqrt{x}-1) \, dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} - x + C$
28. a)  $\int dr = r + C$                       b)  $\int (s + \sqrt{s}) \, ds = \frac{1}{2} s^2 + \frac{2}{3} s \sqrt{s} + C$
- c)  $\int t^2 \sqrt{t} \, dt = \int t^{\frac{5}{2}} \, dt = \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7} t^3 \sqrt{t} + C$

29.  $\int \sin^2 x dx + \int \cos^2 x dx = \int (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int 1 dx = x + C$
30.  $\int \frac{xe^{x^2} + 2e^{-x^2}}{2+x} dx - \int (e^{x^2} + 2) dx = \int \left( \frac{e^{x^2}(x+2)}{x+2} - (e^{x^2} + 2) \right) dx = \int (e^{x^2} - e^{x^2} - 2) dx$   
 $= \int (-2) dx = -2x + C$
31. Ehdon  $F(0) = 1$  täyttävä integraalifunktio on  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ . Sen derivaatan eli  $f(x)$ :n nollakohdat ovat  $-1$  ja  $3$ . Derivaatan merkkikaaviosta päätellään ääriarvon laji. Saadaan maksimi  $F(-1) = 2\frac{2}{3}$  ja minimi  $F(3) = -8$ .
32. Funktion  $f(x) = x^2 + x - 2$  integraalifunktiot ovat  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$ .  
 Integraalifunktiolla voi olla ääriarvo vain derivaattansa nollakohdissa  $1$  ja  $-2$ . Kohdan  $1$  ylityksessä derivaatta muuttuu negatiivisesta positiiviseksi, joten siinä funktiolla  $F$  on minimi. (Kohdassa  $-2$  on maksimi.) Ehto  $F(1) = -4$  antaa  $C = -\frac{17}{6}$ , joten haettu integraalifunktio on  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\frac{5}{6}$ .
33. Funktion  $f(x) = x^2 - 2x$  kaikki integraalifunktiot ovat  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$ . Integraalikäyrä sivuaa suoraa  $y = 3x$ , jolloin sivuamiskohta saadaan yhtälöstä  $F'(x) = x^2 - 2x = 3$ , josta  $x = -1$  tai  $x = 3$ . Ehdot  $F(-1) = 3 \cdot (-1)$  ja  $F(3) = 3 \cdot 3$  antavat  $C$ :n arvot  $-1\frac{2}{3}$  ja  $9$ . Kysytyt integraalikäyrät ovat  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1\frac{2}{3}$  ja  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 9$ .
34. Koska  $y'' = 6x - 10$ , niin  $y' = 3x^2 - 10x + C_1$  ja  $y = x^3 - 5x^2 + C_1x + C_2$ . Ehdoista  $y'(1) = -1$  ja  $y(1) = 1$  saadaan yhtälöpari  $3 - 10 + C_1 = -1$  ja  $1 - 5 + C_1 + C_2 = 1$ , joista  $C_1 = 6$  ja  $C_2 = -1$ . Käyrän yhtälö on näin ollen  $y = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ .
35. a) Väkiluvun kasvunopeus on  $f'(t) = 2 + 5\sqrt[3]{t}$ , jolloin väkiluku hetkellä  $t$  on  $f(t) = \int (2 + 5t^{1/3}) dt = 2t + 3,75t\sqrt[3]{t} + C$ . Koska väkiluku on  $2\ 600$  hetkellä  $t = 0$ , on  $f(0) = C = 2\ 600$ . Siis  $f(t) = 2t + 3,75t\sqrt[3]{t} + 2\ 600$ .  
 b) Viiden vuoden päästä väkiluku on  $f(5) = 2\ 642$ .
36. a) Koska  $v(t) = 27 - 0,48t^2$ , niin  $s(t) = \int (27 - 0,48t^2) dt = 27t - 0,16t^3 + C$ . Jarrutuksen alkaessa matka on nolla, joten  $s(t) = 27t - 0,16t^3$ .  
 b)  $s(4,0) = 27 \cdot 4,0 - 0,16 \cdot 4,0^3 = 97,8$ , joten kysytty matka on noin  $98$  m.  
 c) Jarrutus päättyy, kun  $v = 0$  eli hetkellä  $7,5$  s. Jarrutusmatka on  $s(7,5)$  eli noin  $140$  m.

37. Koska  $v'(t) = a$ , niin  $v(t) = at + C_1$ . Alkuhetkellä  $v(0) = C_1 = v_0$ .

Koska  $s'(t) = v(t)$ , niin  $s(t) = \int (at + v_0) dt = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + C_2$ . Alkuhetkellä

$s(0 \text{ s}) = C_2 = 25 \text{ m}$ . Kun otetaan huomioon, että  $a = 5,8 \text{ m/s}^2$  ja  $v_0 = 0,2 \text{ m/s}$  ja yhdistetään tulokset, saadaan kappaleen ajassa  $t$  kulkeman matkan lauseke

$$s(t) = 2,9t^2 + 0,2t + 25 \text{ eli yksiköitä käyttäen } s(t) = 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2 + 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} t + 25 \text{ m}.$$

## 4 Integrointi derivoimissääntöjen avulla

43. a)  $\int \frac{ds}{s} = \ln|s| + C$       b)  $\int (eu + e^u) du = \frac{e}{2} u^2 + e^u + C$

c)  $\int (\sin t - t) dt = -\cos t - \frac{1}{2} t^2 + C$

44. Funktion  $f : f(x) = \sin x + 1$  kaikki integraalifunktiot ovat  $F(x) = -\cos x + x + C$ . Ehto  $F(0) = 3$  toteutuu, kun  $-1 + C = 3$  eli  $C$ :n arvolla 4. Haettu integraalifunktio on  $F(x) = -\cos x + x + 4$ .

45. Kaikki integraalifunktiot ovat  $F(x) = 3 \ln x + x^2 - x + C$ ,  $x > 0$ . Piste (1, 3) kautta kulkeva integraalikäyrä määräytyy ehdosta  $3 \ln 1 + 1^2 - 1 + C = 3$ , josta  $C = 3$ . Haettu integraalifunktio on  $F(x) = 3 \ln x + x^2 - x + 3$ ,  $x > 0$ .

46. Funktion  $f(x) = e^x - 1$  kaikki integraalifunktiot ovat  $F(x) = e^x - x + C$ . Sijoitetaan tähän origon koordinaatit, jolloin  $0 = 1 - 0 + C$  eli  $C = -1$ . Kysytty integraalifunktio on  $F(x) = e^x - x - 1$ . Sen pienin arvo voi sijaita vain derivaatan  $f(x) = e^x - 1$  nollassa  $x = 0$ . Derivaatan merkkitarkastelu osoittaa tämän pienimmän arvon kohdaksi. Pienin arvo on  $F(0) = 0$ .

47.  $\frac{d}{dx} \left( \frac{a^x}{\ln a} + C \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\ln a} a^x + C \right) = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \ln a + 0 = a^x, (a > 0, a \neq 1)$

48.  $D(-\ln|\cos x| + C) = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ . Siis  $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$ .

49.  $D(\ln|\sin x| + C) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} = \cot x$ . Siis  $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$ .

50. a)  $\int (\tan^2 x - 3) dx = \int (1 + \tan^2 x - 4) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx - 4 \int dx = \tan x - 4x + C$

b)  $\int \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx = \int \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = x + \tan x + C$

51. Koska  $f''(x) = 2 \cos x - 1$ , niin  $f'(x) = \int (2 \cos x - 1) dx = 2 \sin x - x + C_1$  ja

$$f(x) = \int (2 \sin x - x + C_1) dx = -2 \cos x - \frac{1}{2} x^2 + C_1 x + C_2.$$

52. Olkoon  $x_0$  kahden eri parveen kuuluvan käyrän leikkauskohta. Koska  $y' = -x$  ja toisaalta  $y' = \frac{1}{x}$ , niin käyrille kohtaan  $x_0$  piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat  $-x_0$  ja  $\frac{1}{x_0}$ . Nyt kulmakertoimien tulo on  $-1$ , joten tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Käyrät leikkaavat siis toisensa suorassa kulmassa.

53. Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  kaikki integraalifunktiot esitetään tavallisesti muodossa

$$F(x) = \ln|x| + C, \quad x \neq 0. \quad \text{Tarkempi esitysmuoto on } F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & \text{kun } x < 0, \\ \ln x + C_2, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Tässä vakioiden  $C_1$  ja  $C_2$  ei tarvitse olla samat. Ehto  $\ln e + C_2 = 5$  antaa  $C_2 = 4$ .

$$\text{Vastauksena on } F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & \text{kun } x < 0, \\ \ln x + 4, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

54. a)  $D \sin 3x = 3 \cos 3x$   $\int 3 \cos 3x dx = \sin 3x + C$   
 b)  $D e^{x^2} = e^{x^2} \cdot 2x = 2x e^{x^2}$   $\int 2x e^{x^2} dx = e^{x^2} + C$   
 c)  $D(x^5 + 5)^{10} = 10(x^5 + 5)^9 \cdot 5x^4$   $\int 50x^4 (x^5 + 5)^9 dx = (x^5 + 5)^{10} + C$   
        $= 50x^4 (x^5 + 5)^9$   
 d)  $D \ln|x^2 + x| = \frac{2x+1}{x^2+x}$   $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \ln|x^2 + x| + C$

## 5 Yhdistetyn funktion integrointi

61. a)  $\int \frac{3}{3x+4} dx = \ln|3x+4| + C$   
 b)  $\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{3x+5} = \frac{1}{3} \ln|3x+5| + C$   
 c)  $\int \frac{dx}{100-x} = -\int \frac{-1dx}{100-x} = -\ln|100-x| + C$
62. a)  $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = \ln|x^2+3x| + C$   
 b)  $\int \frac{x+1}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x| + C$   
 c)  $\int \frac{x}{1-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{-4x}{1-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \ln|1-2x^2| + C$
63. a)  $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int 3e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$  b)  
 $\int e^{2-x} dx = -\int (-1)e^{2-x} dx = -e^{2-x} + C$   
 c)  $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

64. a)  $\int \sin 4x dx = \frac{1}{4} \int \sin 4x dx = \frac{1}{4} (-\cos 4x) + C = -\frac{1}{4} \cos 4x + C$   
 b)  $\int \cos(x-1) dx = \sin(x-1) + C$   
 c)  $\int \cos(1-2x) dx = -\frac{1}{2} \int (-2) \cos(1-2x) dx = -\frac{1}{2} \sin(1-2x) + C$
65. a)  $\int \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx = 2 \sin \frac{x}{2} + C$   
 b)  $\int \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx = -\int (-1) \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx = -\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\right) + C = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C$   
 c)  $\int \sin^3 x \cos x dx = \int \cos x (\sin x)^3 dx = \frac{1}{4} (\sin x)^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$
66. Koska  $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ , niin  $y = \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot 2(2x+1)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x+1} + C$ .  
 Ehdosta  $y(4) = 4$  saadaan  $3 + C = 4$ , josta  $C = 1$ . Haettu käyrän yhtälö on  
 $y = \sqrt{2x+1} + 1, x > -\frac{1}{2}$ .
67.  $f(x) = \int (e^x - 1)^2 dx = \int (e^{2x} - 2e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x + x + C$ . Ehto  $f(0) = 1\frac{1}{2}$   
 antaa yhtälöstä  $\frac{1}{2} - 2 + C = 1\frac{1}{2}$  vakion  $C$  arvoksi 3. Kysytty funktio on näin ollen  
 $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - 2e^x + x + 3$ .
68. a)  $\int \frac{6x}{\sqrt[3]{2+3x^2}} dx = \int 6x(2+3x^2)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} (2+3x^2)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(2+3x^2)^2} + C$   
 b)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = -\int (-1)(1-x)^{-\frac{1}{3}} dx = -\frac{3}{2} (1-x)^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{(1-x)^2} + C$   
 c)  $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2+4x}} dx = \frac{1}{2} \int (2x+4)(x^2+4x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} (x^2+4x)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2+4x)^2} + C$
69. a)  $\int \frac{dx}{e^x} = -\int (-1)e^{-x} dx = -e^{-x} + C = -\frac{1}{e^x} + C$   
 b)  $\int \frac{dx}{e^{2-x}} = \int e^{x-2} dx = e^{x-2} + C$   
 c)  $\int e^{-x}(e^x + e^{3x}) dx = \int (1 + e^{2x}) dx = x + \frac{1}{2} e^{2x} + C$
70. a)  $\int \sin x \cos x dx = \int \cos x (\sin x)^1 dx = \frac{1}{2} (\sin x)^2 + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$   
 Toisin:  $\int \sin x \cos x dx = -\int (-\sin x)(\cos x)^1 dx = -\frac{1}{2} (\cos x)^2 + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C$   
 Toisin:  $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{4} \int 2 \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$

$$\text{b) } \int \tan 2x dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \sin 2x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \ln|\cos 2x| + C$$

$$\text{c) } \int (2 \sin 3x - 3 \cos x) dx = 2 \cdot \frac{1}{-3} \int (-3 \sin 3x) dx - 3 \int \cos x dx = -\frac{2}{3} \cos 3x - 3 \sin x + C$$

$$\text{71. a) } \int (\sin x + \cos x)^2 dx = \int (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) dx = \int (1 + 2 \sin x \cos x) dx \\ = x + \sin^2 x + C \quad (\text{ks. 70. a})$$

$$\text{b) } \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \cos x (\sin x)^{-2} dx = -(\sin x)^{-1} + C = -\frac{1}{\sin x} + C$$

$$\text{c) } \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \ln|1 + \sin x| + C$$

$$\text{72. a) } \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \ln|\sin 2x| + C$$

$$\text{b) } \int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\text{c) } \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x\right) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C$$

$$\text{73. a) } \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \ln|1 + e^x| + C = \ln(1 + e^x) + C$$

$$\text{b) } \int \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} dx = \int e^x (1 + e^x)^{-2} dx = -(1 + e^x)^{-1} + C = -\frac{1}{1 + e^x} + C$$

$$\text{c) } \int \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C$$

$$\text{74. a) } \int \frac{x-1}{x+1} dx = \int \frac{x+1-2}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) dx = x - 2 \ln|x+1| + C$$

$$\text{b) } \int \frac{2x}{x-1} dx = \int \frac{2(x-1)+2}{x-1} dx = \int \left(2 + \frac{2}{x-1}\right) dx = 2x + 2 \ln|x-1| + C$$

$$\text{c) } \int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| + C$$

$$\text{75. Funktion } f(x) = e^x \sqrt{1 + e^x} \text{ integraalifunktiot ovat } F(x) = \frac{2}{3} (1 + e^x) \sqrt{1 + e^x} + C. \text{ Eh-}$$

dosta  $F(0) = \sqrt{2}$  saadaan yhtälö  $\frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} + C = \sqrt{2}$ , josta  $C = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ . Haettu integraa-

lifunktio on  $F(x) = \frac{2}{3} (1 + e^x) \sqrt{1 + e^x} - \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

**76.** Olkoon  $F$  mikä tahansa funktion  $f(x) = 1 - 2 \sin x + \sin^2 x$  integraalifunktio, jolloin  $F'(x) = f(x) = 1 - 2 \sin x + \sin^2 x = (1 - \sin x)^2$ . Huomataan, että aina  $F'(x) \geq 0$ . Koska lisäksi derivaatan nollakohdat ovat yksittäisiä, funktio  $F$  on aidosti kasvava.

$$\text{77. } \int \frac{1}{1 + e^x} dx = \int \frac{1 + e^x - e^x}{1 + e^x} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1 + e^x}\right) dx = x - \ln(1 + e^x) + C \quad (1 + e^x \text{ on aina positiivinen.})$$

- 78.** Funktion  $f(x) = \cos x + \sin 2x$  integraalifunktiot ovat  $F(x) = \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$ .  
Kun integraalikäyrä kulkee origon kautta, niin  $0 = 0 - \frac{1}{2} + C$ , josta  $C = \frac{1}{2}$ . Kysytty integraalifunktio on  $F(x) = \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$ . Se on jaksollinen, joten ääriarvoja haettaessa voidaan rajoittua välille  $[0, 2\pi]$ . Tälle välille kuuluvat derivaatan  $F'(x) = \cos x + 2 \sin x \cos x = \cos x(1 + 2 \sin x)$  nollakohdat ovat  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  ja  $\frac{11\pi}{6}$ . Vastaavat integraalifunktion arvot ovat  $2$ ,  $-\frac{1}{4}$ ,  $0$  ja  $-\frac{1}{4}$ . Koska  $F(0) = F(2\pi) = 0$ , funktion suurin arvo on  $2$  ja pienin  $-\frac{1}{4}$ .
- 79.** Funktion  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$  kaikki integraalifunktiot ovat  $F(x) = \sqrt{2x+6} + C$ . Integraalikäyrälle, joka sivuaa suoraa  $y = \frac{1}{2}(x-1)$ , pätee sivuamiskohdassa  $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{2}$ , josta saadaan sivuamiskohta  $x = -1$ . Sivuamispisteen  $y$ -koordinaatti lasketaan suoran yhtälöstä:  $y(-1) = \frac{1}{2}(-1-1) = -1$ . Koska myös  $F(-1) = -1$ , niin  $\sqrt{-2+6} + C = -1$  ja  $C = -3$ . Kysytty integraalikäyrän yhtälö on  $F(x) = \sqrt{2x+6} - 3$ .
- 80.** Funktion  $f(x) = 2e^{-0,1x} - \frac{x}{50}$  integraalifunktiot ovat  $F(x) = -20e^{-0,1x} - \frac{x^2}{100} + C$ . Ehto  $F(-10) = -20e$  antaa yhtälön  $-20e - 1 + C = -20e$ , josta  $C = 1$ . Haettu integraalifunktio on  $F(x) = -20e^{-0,1x} - \frac{x^2}{100} + 1$ .
- 81.** Koska  $s'(t) = v(t) = 16e^{-0,40t}$ , niin  $s(t) = \int 16e^{-0,40t} dt = -40e^{-0,40t} + C$ . Kappale kulkee aikavälillä  $2,5$  s –  $4,5$  s matkan  $s(4,5 \text{ s}) - s(2,5 \text{ s}) = (-6,61 + C) - (-14,71 + C) = 8,1$  m.
- 82.** a)  $v'(t) = a(t) = A \cos kt$ , joten  $v(t) = \int A \cos kt dt = \frac{A}{k} \sin kt + C_1$ . Alkuehdosta  $v(0) = 0$  saadaan  $C_1 = 0$ . Nopeus on siis  $v(t) = \frac{A}{k} \sin kt$ , joten sen suurin arvo on  $\frac{A}{k}$ .  
b)  $s'(t) = v(t) = \frac{A}{k} \sin kt$ , joten  $s(t) = \int \frac{A}{k} \sin kt dt = -\frac{A}{k^2} \cos kt + C_2$ . Käyttämällä tietoa  $s(\frac{\pi}{2k}) = 0$  saadaan  $-\frac{A}{k^2} \cos \frac{\pi}{2} + C_2 = 0$ , josta  $C_2 = 0$ . Etäisyydelle tasapainokohdasta tulee suurin arvo  $\frac{A}{k^2}$ , kun  $\cos kt = -1$ .

83. Kun  $f''(x) = \sin 2x + \cos 2x$ , niin  $f'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C_1$  ja  $f(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C_1 x + C_2$ . Funktion  $f$  kuvaaja kulkee origon kautta, joten  $f(0) = -\frac{1}{4} + C_2 = 0$  ja siis  $C_2 = \frac{1}{4}$ . Koska origoon piirretty tangentti on  $y = -\frac{1}{4}x$ , niin  $f'(0) = -\frac{1}{4}$  eli  $-\frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{4}$ , josta  $C_1 = \frac{1}{4}$ . Funktion  $f$  lausekkeeksi tulee  $-\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$  eli  $-\frac{1}{4}(\sin 2x + \cos 2x - x - 1)$ .

## Määrätty integraali

### 1 Pinta-ala suorakulmioiden avulla

84. Funktio  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$  on aidosti kasvava, joten alasumman termit lasketaan osavälien alkupisteissä ja yläsumman termit loppupisteissä.

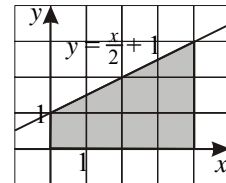
$$\text{Alasumma } s_4 = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 = 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} = 7$$

$$\text{Yläsumma } S_4 = f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 = 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + 3 = 9$$

$$\text{Välisumma} = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{7}{2}\right) \cdot 1 = 1\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{4} + 2\frac{3}{4} = 8$$

Kuvio on puolisuunnikas. Sen pinta-alan tarkka arvo on

$$A = \frac{1}{2}(1 + 3) \cdot 4 = 8 \text{ eli sama, jonka antaa keskipisteitä käyttävä välisumma.}$$



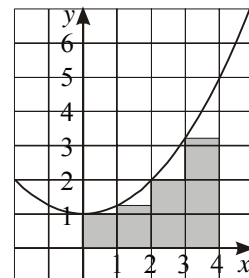
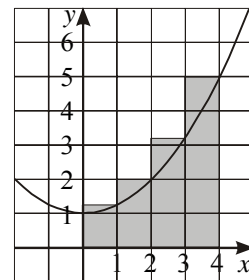
85. Muodostetaan funktion  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$  kuuluva alasumma ja yläsumma välin  $[0, 4]$  tasajaossa  $n = 4$ .

$$\begin{aligned} \text{Alasumma } s_4 &= f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 \\ &= 1 + 1\frac{1}{4} + 2 + 3\frac{1}{4} = 7\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Yläsumma } S_4 &= f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 \\ &= 1\frac{1}{4} + 2 + 3\frac{1}{4} + 5 = 11\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Yläsumma} - \text{alasumma} = 4$$

Oheisista kuvista ylempi esittää yläsummaa ja alempi alasummaa.



86. Välisumma funktiolle  $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$ , kun väli  $[-2, 3]$  on jaettu viiteen yhtä suureen osaan ja laskentakohtina ovat osavälien keskipisteet:

$$S = f(-1,5) \cdot 1 + f(-0,5) \cdot 1 + f(0,5) \cdot 1 + f(1,5) \cdot 1 + f(2,5) \cdot 1$$

$$= 3,4375 + 3,9375 + 3,9375 + 3,4375 + 2,4375 = 17,1875 = 17\frac{3}{16}$$

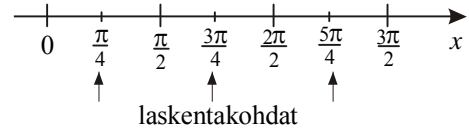
87. Ensimmäisessä neljänneksessä  $y = \sqrt{1-x^2}$ . Muodostetaan ala- ja yläsummat  $s_{10}$  ja  $S_{10}$ .

$$s_{10} = (\sqrt{1-0,1^2} + \sqrt{1-0,2^2} + \dots + \sqrt{1-1^2}) \cdot 0,1 \approx 0,7261$$

$$S_{10} = (\sqrt{1-0^2} + \sqrt{1-0,1^2} + \dots + \sqrt{1-0,9^2}) \cdot 0,1 \approx 0,8261$$

Summien keskiarvo  $\frac{1}{2}(s_{10} + S_{10}) \approx 0,7761$ . Koska tarkka arvo on  $\pi/4$ , virhe on yhden prosentin suuruusluokkaa.

88. Välisumma funktiolle  $f(x) = \sin x + 1$ , kun väli  $[0, 3\pi/2]$  on jaettu kolmeen yhtä suureen osaan ja laskentakohtina ovat osavälien keskipisteet:



$$S = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{2} + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{2} + f\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \left(f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{4} + 1 + \sin \frac{3\pi}{4} + 1 + \sin \frac{5\pi}{4} + 1\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right) \cdot \frac{\pi}{2} \approx 5,8$$

89. a) Funktio  $f(x) = \sqrt{x} + 1$  on aidosti kasvava, joten ylä- ja alasummien erotus on  $S_n - s_n = (f(4) - f(0)) \cdot \frac{4}{n} = (3 - 1) \cdot \frac{4}{n} = \frac{8}{n}$ . Tämä on pienempi kuin 0,01, kun  $n > 800$ . Väli on siis jaettava vähintään 801 osaan.

- b) Funktio  $f(x) = \frac{5}{x}$  on aidosti vähenevä, joten ylä- ja alasummien erotus on  $S_n - s_n = (f(1) - f(5)) \cdot \frac{4}{n} = (5 - 1) \cdot \frac{4}{n} = \frac{16}{n}$ . Tämä on pienempi kuin 0,01, kun  $n > 1600$ . Väli on jaettava vähintään 1601 osaan.

## 2 Määrätyn integraalin käsite

91. Välisumma on  $f(0,5) \cdot 1 + f(1,5) \cdot 1 + f(2,5) \cdot 1 + f(3,5) \cdot 1 = -4$ .

$$\text{(Vertailun vuoksi: } \int_0^4 (2x - 5) dx = -4)$$

92. Välisumma on  $f(-2) \cdot 1 + f(-1) \cdot 1 + f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 = 10$ .

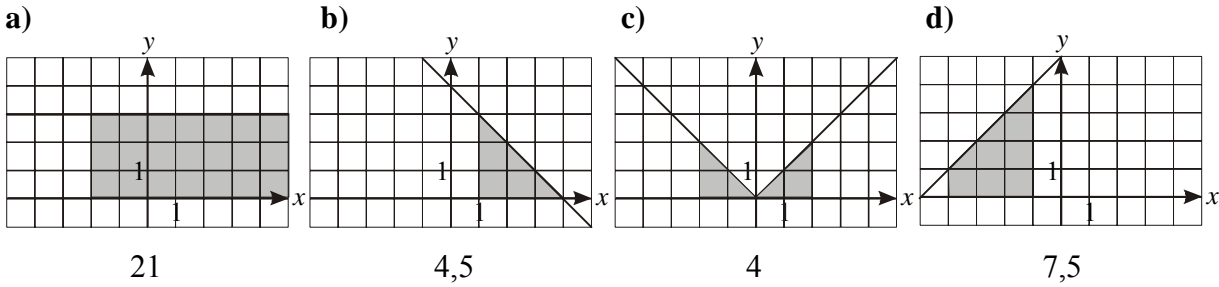
$$\text{(Vertailun vuoksi: } \int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx = 9\frac{1}{3})$$

93. Muodostetaan välisumma funktiolle  $f(x) = 1 - \ln x$ , kun väli  $[1, 6]$  on jaettu viiteen yhtä suureen osaan ja laskentakohtina ovat osavälien keskipisteet:

$$S = f(1,5) \cdot 1 + f(2,5) \cdot 1 + f(3,5) \cdot 1 + f(4,5) \cdot 1 + f(5,5) \cdot 1 \\ = 1 - \ln 1,5 + 1 - \ln 2,5 + 1 - \ln 3,5 + 1 - \ln 4,5 + 1 - \ln 5,5 \approx -0,7833$$

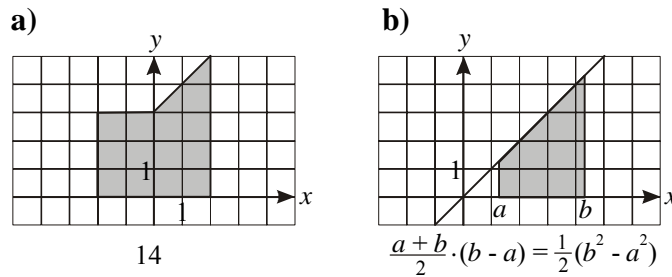
94. Integraalin  $\int_1^6 (1 - \ln x) dx$  likiarvo on  $-0,7506$  (ja tarkka arvo  $10 - 6 \ln 6$ ).

95. Alla olevassa kuvassa nähdään integraalia vastaava kuvio ja pinta-alan arvo.

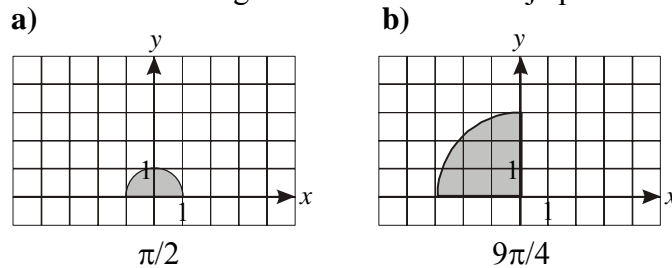


96. a)  $\int_0^4 (x^3 - 4x^2) dx \approx -21,33$       b)  $\int_{-1}^3 \sqrt{x^3 + 1} dx \approx 8,18$       c)  $\int_0^1 \frac{4}{x^2 + 1} dx \approx 3,14$

97. Alla olevassa kuvassa nähdään integraalia vastaava kuvio ja pinta-alan arvo.



98. Alla olevassa kuvassa nähdään integraalia vastaava kuvio ja pinta-alan arvo.



99. Funktion  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  derivaatta on  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ . Sillä on origossa ainoa

nollakohta, ja arvoilla  $x > 0$  se on positiivinen, joten funktio  $f$  on aidosti kasvava integroimisvälillä  $[0, 5]$ . Kullakin osavälillä pienin arvo tulee välin alkupisteessä ja suurin loppupisteessä.

$$s_5 = \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{5} \cdot 1 + \sqrt{10} \cdot 1 + \sqrt{17} \cdot 1 \approx 11,936$$

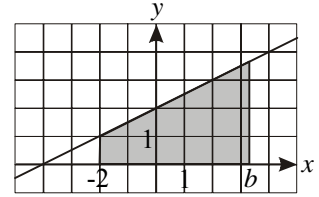
$$S_5 = \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{5} \cdot 1 + \sqrt{10} \cdot 1 + \sqrt{17} \cdot 1 + \sqrt{26} \cdot 1 \approx 16,035$$

Alasumman ja yläsumman keskiarvoksi tulee yhden desimaalin tarkkuudella 14,0.

100. Määrätty integraali  $\int_{-2}^b (\frac{x}{2} + 2) dx$  voidaan laskea oheisessa

kuvassa olevan alueen alana, jolloin saadaan

$$\frac{1 + \frac{b}{2} + 2}{2} \cdot (b - (-2)). \text{ Arvo on } 15, \text{ kun } b = 4.$$



101. Jaetaan väli  $[a, b]$   $n$ :ään yhtä suureen osaan, jolloin kunkin osan pituus on  $\frac{b-a}{n}$ .

Muodostetaan jakoon liittyvä välisumma  $\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n c \cdot \frac{b-a}{n} = c \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}$ . Koska kaikkien osavälien summa on  $b-a$ , välisummalla on vakioarvo  $c(b-a)$ . Tällöin myös välisumman raja-arvo jaon rajatta tihentyessä on  $c(b-a)$ , joten

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

102. a)  $a = 1, b = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (t_k)^3 \Delta x = \int_1^3 x^3 dx$

b)  $a = -3, b = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k t_k (1 - 3t_k) \Delta x = \int_{-3}^3 x(1 - 3x) dx = \int_{-3}^3 (x - 3x^2) dx$

### 3 Määrätyn integraalin ominaisuuksia

103.  $\int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^1 \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{*}{=} \int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 0$  (Tai  $\stackrel{*}{=} \int_1^1 \frac{\sin x}{x} dx = 0$ )

104.  $\int_1^4 (3f(x) - g(x)) dx = 3 \int_1^4 f(x) dx - \int_1^4 g(x) dx = 3 \cdot 2 - 10 = -4$

105.  $1 = \int_0^5 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = -2 + \int_1^5 f(x) dx$ , joten  $\int_1^5 f(x) dx = 3$ .

106.  $\int_3^{-2} f(x) dx = - \int_{-2}^3 f(x) dx = - \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = -2 + 6 = 4$

107.  $2 \int_1^{11} (\frac{1}{2} - \sqrt{x}) dx + \int_1^{11} 2\sqrt{x} dx = \int_1^{11} (1 - 2\sqrt{x}) dx + \int_1^{11} 2\sqrt{x} dx = \int_1^{11} (1 - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}) dx$   
 $= \int_1^{11} 1 dx = 1 \cdot (11 - 1) = 10$

$$108. \text{ a) } \int_{-2}^2 (9x^2 - 1) dx - \int_{-2}^2 (3x + 2)(3x - 2) dx = \int_{-2}^2 (9x^2 - 1) dx - \int_{-2}^2 (9x^2 - 4) dx$$

$$= \int_{-2}^2 (9x^2 - 1 - 9x^2 + 4) dx = \int_{-2}^2 3 dx = 3 \cdot (2 - (-2)) = 12$$

$$\text{b) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1 \cdot (\pi - (-\pi)) = 2\pi$$

109. Koska  $f(x) \leq g(x)$ , niin  $g(x) - f(x) \geq 0$  välillä  $[a, b]$ . Silloin  $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$ .

Mutta epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon  $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$ , josta termin

siirrolla saadaan epäyhtälö  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

## 4 Analyysin peruslause

$$114. \text{ a) } \int_0^1 (x-1)^5 dx = \left. \frac{1}{6} (x-1)^6 \right|_0^1 = 0 - \frac{1}{6} (-1)^6 = -\frac{1}{6}$$

$$\text{b) } \int_0^{1/3} (3x+1)^3 dx = \frac{1}{3} \int_0^{1/3} 3(3x+1)^3 dx = \frac{1}{3} \left. \frac{1}{4} (3x+1)^4 \right|_0^{1/3} = \frac{1}{12} \left. \frac{1}{4} (3x+1)^4 \right|_0^{1/3}$$

$$= \frac{1}{12} (16 - 1) = 1 \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2(2x+1)^{-2} dx = \frac{1}{2} \left. \frac{1}{-1} (2x+1)^{-1} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{1}{3}$$

$$115. \text{ a) } \int_1^3 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^3 \left( x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \left. \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right|_1^3 = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - \left( \frac{2}{3} - 2 \right) = 1 \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \int_{-2}^0 \sqrt{1-4x} dx = -\frac{1}{4} \int_{-2}^0 (-4)(1-4x)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{4} \left. \frac{2}{3} (1-4x)^{\frac{3}{2}} \right|_{-2}^0 = -\frac{1}{6} (1 - 27) = 4 \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{1}{3} \int_1^5 3(3x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \left. \frac{1}{2} (3x+1)^{\frac{1}{2}} \right|_1^5 = \frac{2}{3} (4 - 2) = 1 \frac{1}{3}$$

$$116. \text{ a) } \int_0^1 e^{x+1} dx = \left. \frac{1}{1} e^{x+1} \right|_0^1 = e^2 - e$$

$$\text{b) } \int_1^2 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_1^2 (-2)e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \left. \frac{1}{-1} e^{-2x} \right|_1^2 = -\frac{1}{2} (e^{-4} - e^{-2}) = \frac{e^2 - 1}{2e^4}$$

$$\text{c) } \int_0^{\ln 5} e^x (3 - 4e^x) dx = \int_0^{\ln 5} (3e^x - 4e^{2x}) dx = \left. \frac{1}{1} (3e^x - 2e^{2x}) \right|_0^{\ln 5} = 15 - 50 - (3 - 2) = -36$$

$$117. \text{ a) } \int_0^e \frac{dx}{x+e} = \int_0^e \ln|x+e| = \ln 2e - \ln e = \ln \frac{2e}{e} = \ln 2$$

$$\text{b) } \int_0^1 \frac{dx}{1+4x} = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4dx}{1+4x} = \frac{1}{4} \int_0^1 \ln|1+4x| = \frac{1}{4} (\ln 5 - \ln 1) = \frac{1}{4} \ln 5$$

$$\text{c) } \int_{-e}^e \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_{-e}^e \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_{-e}^e \ln(1+x^2) = \frac{1}{2} (\ln(1+e^2) - \ln(1+e^2)) = 0$$

$$118. \text{ a) } \int_0^\pi \sin x dx = \int_0^\pi -\cos x = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{b) } \int_0^\pi \cos x dx = \int_0^\pi \sin x = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\text{c) } \int_0^{\pi/8} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} 2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \sin 2x = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$119. \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_0^{\ln 2} \ln(1+e^x) = \ln(1+2) - \ln(1+1) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

$$120. \int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2} = \frac{1}{2} (e-1)$$

$$121. \int_1^e \frac{x+2}{x} dx = \int_1^e (1 + \frac{2}{x}) dx = \int_1^e (x + 2 \ln|x|) = e + 2 \ln e - (1 + 2 \ln 1) = e + 2 - 1 - 0 = e + 1$$

$$122. \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin^2 0 - \frac{1}{2} \sin^2(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Toisin: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x \cos x dx &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2 \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2x dx = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2 \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-\cos 2x) = \frac{1}{4} (-\cos 0 - (-\cos(-\pi))) = \frac{1}{4} (-1 - 1) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$123. \int_a^{a+1} (2x+3) dx = \int_a^{a+1} (x^2+3x) = a^2 + 2a + 1 + 3a + 3 - a^2 - 3a = 2a + 4 = \frac{1}{2}, \text{ josta}$$

$$a = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}.$$

$$124. \text{ Olkoon } f(x) = ax + b, \text{ jolloin } \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 (\frac{1}{2}ax^2 + bx) = 2a + 2b - \frac{a}{2} + b = 0. \text{ Eh-}$$

dosta  $f(-1) = 1$  saadaan  $-a + b = 1$ . Syntyneestä yhtälöparista ratkeaa  $a = -\frac{2}{3}$  ja  $b = \frac{1}{3}$ . Haettu lineaarinen funktio on siis  $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ .

$$125. \text{ a) } \int_0^k \frac{dx}{(2x+1)^2} = \int_0^k -\frac{1}{2(2x+1)} = -\frac{1}{4k+2} + \frac{1}{2} = 0,4. \text{ Saadaan } k = 2.$$

$$\text{ b) } \int_1^k \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \int_1^k x^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} (k^{\frac{1}{3}} - 1) = 12, \text{ josta } k^{\frac{1}{3}} = 9 \text{ ja } k = 27 \text{ (} k > 1 \text{)}.$$

126. Funktion  $f(x) = \int_0^x (t^2 - 5t + 6)dt$  derivaatta on  $x^2 - 5x + 6$ . Derivaatan nollakohdat ovat  $x = 2$  ja  $x = 3$ .

$$127. \text{ a) } \int_1^5 |x-2|dx = \int_1^2 (-x+2)dx + \int_2^5 (x-2)dx = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5 \quad \text{Myös pinta - alatulkinta on sovellettavissa.}$$

$$\text{ b) } \int_{-1}^3 \sqrt{1+|x|}dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1-x}dx + \int_0^3 \sqrt{1+x}dx = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}\right) + \frac{14}{3} = 4 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$128. \text{ a) } \int_1^3 (x^2 + 3y)dy = \int_1^3 (x^2 y + \frac{3}{2} y^2) = 2x^2 + 12$$

$$\text{ b) } \int_0^x \sin(t-x)dt = \int_0^x -\cos(t-x) = -\cos 0 - (-\cos(-x)) = -1 + \cos x$$

129. a)  $D(\sin x - x \cos x) = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$ . Tämän tuloksen perusteella  $\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + C$ .

$$\text{ b) } \int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} (\sin x - x \cos x) = 0 - \pi \cdot (-1) - (0 - 0) = \pi$$

130.  $D \sin^2 x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ . Käytetään saatua tulosta integraalin laskemisessa:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 1} dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin^2 x + 1) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$131. \text{ a) } F(0) = \int_0^0 e^t \cos t dt = 0 \quad \text{ b) } F'(x) = e^x \cos x, \text{ joten } F'(0) = e^0 \cos 0 = 1$$

$$\text{ c) } F''(x) = e^x \cos x - e^x \sin x, \text{ joten } F''(0) = e^0 \cos 0 - e^0 \sin 0 = 1.$$

$$132. F(x) = \int_0^x (ae^t + b)dt = \int_0^x (ae^t + bt) = ae^x + bx - a \text{ ja } F'(x) = ae^x + b.$$

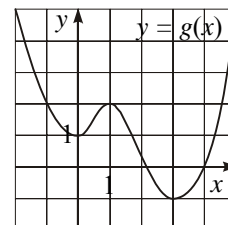
Yhtälöparista  $F(1) = ae - a + b = 0$  ja  $F'(1) = ae + b = 3$  ratkeavat arvot  $a = 3$  ja  $b = 3 - 3e$ .

133. Funktion  $f(x) = \int_2^x (t-3)dt$  derivaatta on  $f'(x) = x-3$ . Lasketaan funktion arvot

derivaatan nollakohdassa  $x = 3$  ja välin  $2 \leq x \leq 6$  päätepisteissä.

Näistä  $f(6) = 4$  on suurin ja  $f(3) = -\frac{1}{2}$  on pienin.

$$134. \int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^3 g(x) = g(3) - g(-1) = -1 - 2 = -3$$



135. Esimerkiksi sopii jatkuva funktio  $f(x) = 6 - 12x$ , sillä

$$f(0) = 6 \text{ ja } \int_0^1 f(x) dx = 0. \text{ Koska integraali yli välin } [0, 1] \text{ on nolla, jokainen ehdot}$$

täyttävä funktio saa positiivisten arvojen ohella myös negatiivisia arvoja. Jatkuvana funktiona se saa silloin myös arvon nolla jossakin em. välin pisteessä.

136. Kun  $x > 0$ , niin  $x + t \geq x > 0$  välillä  $[0, 1]$ .

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x+t} = \int_0^1 \ln|x+t| = \ln|x+1| - \ln|x| = \ln(x+1) - \ln x, \quad x > 0$$

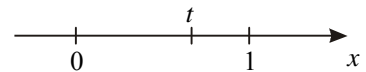
$$-\int_0^1 \frac{dt}{(x+t)^2} = \int_0^1 (x+t)^{-1} = \int_0^1 \frac{1}{x+t} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = f'(x)$$

137. a) Kun  $t < 0$ , niin muuttuja  $x$  on integroimisvälillä suurempi kuin  $t$ . Siksi

$$|x-t| = x-t \text{ ja } \int_0^1 |x-t| dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - tx\right) = \frac{1}{2} - t.$$

b) Kun  $t > 1$ , niin  $x < t$  integroimisvälillä, joten  $|x-t| = -x+t$ . Tällöin

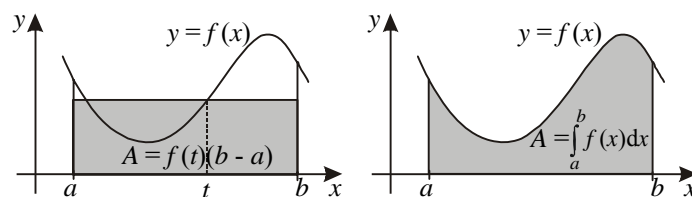
$$\int_0^1 |x-t| dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + tx\right) = -\frac{1}{2} + t.$$



c) Kun  $0 < t < 1$ , integroiminen on tehtävä kahdessa osassa.

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x-t| dx &= \int_0^t (-x+t) dx + \int_t^1 (x-t) dx = \int_0^t \left(-\frac{1}{2}x^2 + tx\right) + \int_t^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - tx\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}t^2 + t^2\right) + \left(\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}t^2 + t^2\right) = t^2 - t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

138. a) Kun  $f$  on ei-negatiivinen funktio, väliarvolause voidaan tulkita geometrisesti niin, että ainakin yhdessä välin  $[a, b]$  pisteessä  $t$  funktio saa sellaisen arvon  $f(t)$ , että suorakulmion ala  $f(t)(b-a)$  on yhtä suuri kuin käyrän alle jäävän kuvion ala.



b1) Funktion  $f(x) = \frac{x}{2} + 1$  keskiarvo välillä  $[0, 6]$  on luku  $f(t)$ , joka toteuttaa yhtä-

$$\text{lön } \int_0^6 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx = f(t) \cdot (6-0) \text{ eli } 15 = 6f(t). \text{ Tästä } f(t) = 2\frac{1}{2}.$$

b2) Funktion  $g(x) = x^2 - 2x - 3$  keskiarvo välillä  $[-1, 3]$  on luku  $f(t)$ , joka toteuttaa

$$\text{yhtälön } \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx = f(t) \cdot (3 - (-1)) \text{ eli } -10\frac{2}{3} = 4f(t). \text{ Tästä } f(t) = -2\frac{2}{3}.$$

c) Funktion  $f(x) = 9x(6-x)$  keskiarvo välillä  $[0, 6]$  on luku  $f(t)$ , joka toteuttaa yhtälön  $\int_0^6 9x(6-x)dx = f(t)(6-0)$  eli  $324 = f(t) \cdot 6$ . Tästä  $f(t) = 54$ . Funktion  $f$  maksimiarvo on kuvaajana olevan paraabelin huipun  $y$ -koordinaatti eli  $f(3) = 81$ . Keskiarvo 54 on tästä kaksi kolmasosaa.

## 5 Pinta-alan laskeminen

$$140. \text{ a) } A = \int_{-2}^2 (4-x^2)dx = 2 \int_0^2 (4-x^2)dx = 2 \left[ 4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = 10 \frac{2}{3}$$

$$\text{ b) } A = \int_{-1}^2 (2+3x-x^3)dx = \left[ 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-1}^2 = 6 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 6 \frac{3}{4}$$

$$\text{ c) } A = \int_1^3 \frac{3}{x} dx = \left[ 3 \ln x \right]_1^3 = 3 \ln 3 - 3 \ln 1 = 3 \ln 3 = \ln 27$$

$$141. \text{ a) } A = - \int_{-1}^1 (x^2 - 3)dx = -2 \int_0^1 (x^2 - 3)dx = -2 \left[ \frac{1}{3}x^3 - 3x \right]_0^1 = -2 \left( \frac{1}{3} - 3 \right) = 5 \frac{1}{3}$$

$$\text{ b) } A = \int_{-1}^2 (x^2 + 1 - x)dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{6}\right) = 4 \frac{1}{2}$$

$$\text{ c) } A = \int_0^4 \left( \sqrt{x} + \frac{x}{4} \right) dx = \left[ \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{8}x^2 \right]_0^4 = \frac{16}{3} + 2 = 7 \frac{1}{3}$$

142. Suoran  $y = 3x - 2$  ja paraabelin  $y = x^2 - 2$  leikkauskohdat ovat  $x = 0$  ja  $x = 3$ . Näiden kohtien välillä suora on paraabelin yläpuolella.

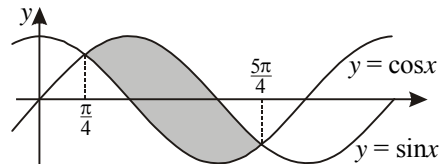
$$A = \int_0^3 (3x - 2 - (x^2 - 2))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left[ \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = 4 \frac{1}{2}$$

143. Paraabelit  $y = x^2 - x - 1$  ja  $y = -x^2 + x + 3$  leikkaavat kohdissa  $x = -1$  ja  $x = 2$ . Niiden väliin jäävän alueen ala on

$$\int_{-1}^2 (-x^2 + x + 3 - (x^2 - x - 1))dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4)dx = 9.$$

144. Käyrät  $y = \sin x$  ja  $y = \cos x$  leikkaavat välillä  $[0, 2\pi]$  kohdissa  $\pi/4$  ja  $5\pi/4$ . Kysytty pinta-ala

$$\text{ on } \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)dx = 2\sqrt{2}.$$



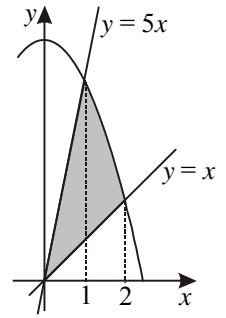
145.  $f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$$A = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$x$	-	+	+	+				
$x-1$	-	-	+	+				
$x-2$	-	-	-	+				
$f(x)$	-	0	+	1	-	2	+	$x$

146. Käyrät  $y = 6 - x^2$  ja  $y = 5x$  leikkaavat kohdassa  $x = 1$  ja käyrät  $y = 6 - x^2$  ja  $y = x$  kohdassa  $x = 2$ . Lasketaan ala kahdessa osassa:

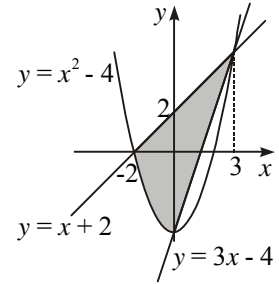
$$A = \int_0^1 (5x - x) dx + \int_1^2 (6 - x^2 - x) dx = 2 + 2 \frac{1}{6} = 4 \frac{1}{6}$$



147. Lasketaan käyrien leikkauskohdat ja sitten pinta-ala kahdessa osassa.

$$A = \int_{-2}^0 (x + 2 - x^2 + 4) dx + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 7 \frac{1}{3} + 9 = 16 \frac{1}{3}$$

kolmion ala

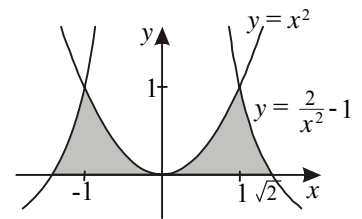


148. Oheisessa kuvassa näkyvät käyrien leikkauskohdat ja kaksiosainen alue. Symmetrian vuoksi riittää laskea osa-alueista vain toinen.

$$A = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-\frac{2}{x} - x\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{3} + (3 - 2\sqrt{2}) = 3 \frac{1}{3} - 2\sqrt{2}$$

Koko pinta-ala on  $6 \frac{2}{3} - 4\sqrt{2} \approx 1,01$ .

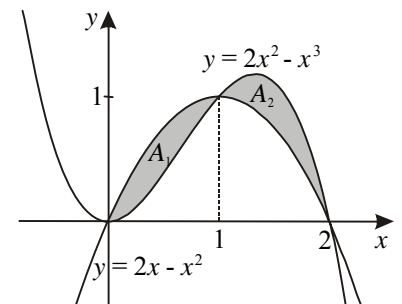


149. Oheisessa kuvassa nähdään käyrien  $y = 2x^2 - x^3$  ja  $y = 2x - x^2$  muodostamat silmukat. Käyrien leikkauskohdiksi lasketaan  $x = 0$ ,  $x = 1$  ja  $x = 2$ . Lasketaan silmukoiden pinta-alat.

$$A_1 = \int_0^1 (2x - x^2 - (2x^2 - x^3)) dx = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (2x^2 - x^3 - (2x - x^2)) dx = \frac{1}{4}$$

Silmukoiden alat osoittautuvat yhtä suuriksi.



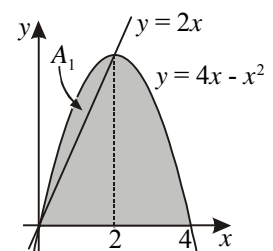
150. Paraabelin  $y = 4x - x^2$  ja  $x$ -akselin rajaaman alueen ala on

$$A = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = 10 \frac{2}{3}$$

Paraabelin ja suoran  $y = 2x$  rajaaman segmentin ala on

$$A_1 = \int_0^2 (4x - x^2 - 2x) dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 1 \frac{1}{3}$$

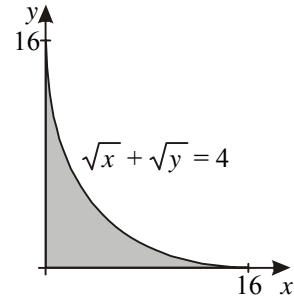
Kysytty suhde on  $A_1 : (A - A_1) = \frac{4}{3} : \frac{28}{3} = 4 : 28 = 1 : 7$ .



151. Käyrä  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$  on määritelty ehdoilla  $x \geq 0$  ja  $y \geq 0$ .

Käyrän ja koordinaattiakselien leikkauskohdiksi lasketaan  $(0, 16)$  ja  $(16, 0)$ . Kuvassa näkyvän alueen pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{16} (4 - \sqrt{x})^2 dx = \int_0^{16} (16 - 8\sqrt{x} + x) dx \\ &= \int_0^{16} (16x - \frac{16}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2) dx = 42\frac{2}{3}. \end{aligned}$$



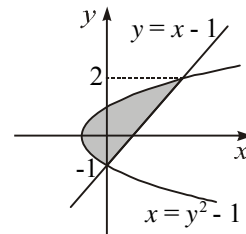
152. Alueen pinta-alan lauseke on  $A(x) = \int_0^x (\frac{1}{4}t^2 + 1) dt$  (tai muodostettuna  $\frac{1}{12}x^3 + x$ ).

Derivaatta  $A'(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$  ilmoittaa pinta-alan kasvunopeuden. Sen kysytyt arvot

ovat  $A'(1) = 1\frac{1}{4}$ ,  $A'(2) = 2$  ja  $A'(4) = 5$ .

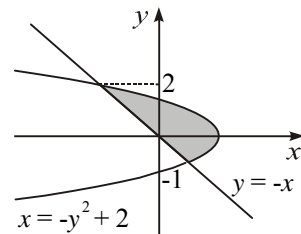
153. a) Käyrien  $y = x - 1$  ja  $x = y^2 - 1$  leikkauspisteiden  $y$ -koordinaatit ovat  $y = -1$  ja  $y = 2$ . Integroidaan  $y$ -akselin suunnassa.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (y + 1 - (y^2 - 1)) dy = \int_{-1}^2 (\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + 2y) dy \\ &= \frac{10}{3} - (-\frac{7}{6}) = 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$



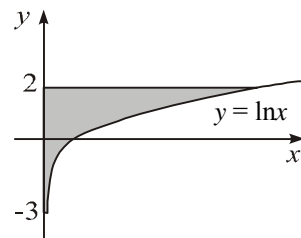
- b) Käyrien  $x = -y^2 + 2$  ja  $y = -x$  leikkauspisteiden  $y$ -koordinaatit ovat  $y = -1$  ja  $y = 2$ . Integroidaan  $y$ -akselin suunnassa.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (-y^2 + 2 - (-y)) dy = \int_{-1}^2 (-\frac{1}{3}y^3 + 2y + \frac{1}{2}y^2) dy \\ &= \frac{10}{3} - (-\frac{7}{6}) = 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$



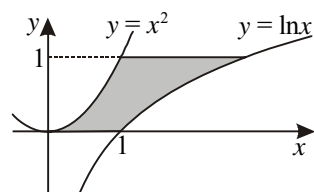
- c) Yhtälöstä  $y = \ln x$  saadaan  $x = e^y$ . Integroidaan  $y$ -akselin suunnassa.

$$A = \int_{-3}^2 e^y dy = \int_{-3}^2 e^y = e^2 - e^{-3} = e^2 - \frac{1}{e^3}$$



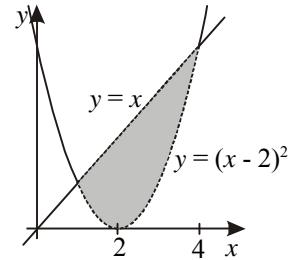
154. Yhtälöistä  $y = \ln x$  ja  $y = x^2$  saadaan  $x = e^y$  ja  $x = \sqrt{y}$ , kun  $x \geq 0$ . Integroidaan näiden erotus  $y$ -akselin suunnassa välillä  $[0, 1]$ . Pinta-alaksi saadaan

$$A = \int_0^1 (e^y - \sqrt{y}) dy = \int_0^1 (e^y - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}) dy = e - 1\frac{2}{3} \approx 1,052.$$



155. Ehdot  $y > (x-2)^2$  ja  $y < x$  toteutuvat samanaikaisesti alueessa, joka on korostettu oheiseen kuvaan. Reunan, joka ei kuulu alueeseen, määräävät käyrät  $y = (x-2)^2$  ja  $y = x$ . Ne leikkaavat kohdissa  $x = 1$  ja  $x = 4$ . Kysytty pinta-ala on

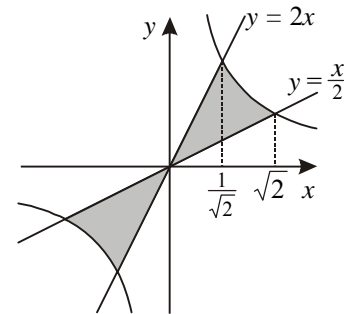
$$A = \int_1^4 (x - (x-2)^2) dx = 4 \frac{1}{2}.$$



156. Symmetrian takia riittää laskea ensimmäisessä neljänneksessä olevan alueen ala.

Kuvaan on laskettu suorien  $y = \frac{1}{2}x$  ja  $y = 2x$  sekä hyperbelin  $xy = 1$  leikkauskohdat.

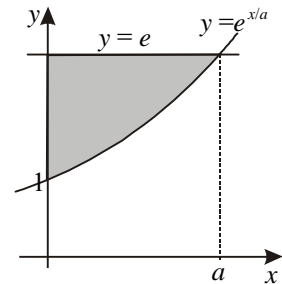
$$\begin{aligned} A &= \int_0^{1/\sqrt{2}} (2x - \frac{x}{2}) dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\frac{1}{x} - \frac{x}{2}) dx \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{3}{2}x dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\ln x - \frac{1}{2}x^2) dx = \frac{3}{8} + 2 \ln \sqrt{2} - \frac{3}{8} = \ln 2 \end{aligned}$$



Kysytty pinta-ala on siis  $2 \ln 2 \approx 1,39$ .

157. Käyrät  $y = e$  ja  $y = e^{x/a}$ ,  $a > 0$ , leikkaavat kohdassa  $x = a$ . Kysytty pinta-ala on

$$A = \int_0^a (e - e^{x/a}) dx = \int_0^a (ex - ae^{x/a}) = ea - ae + a = a.$$



158. Yhtälö  $y = (x-a)(x-b)$  esittää ylöspäin aukeavaa paraabelia, joka leikkaa  $x$ -akselin kohdissa  $a$  ja  $b$ ,  $a < b$ . Paraabelin ja  $x$ -akselin välisen alueen pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= -\int_a^b (x-a)(x-b) dx = \int_a^b (x-a)(x-b) dx = \int_a^b (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}bx^2 + abx) \\ &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^2b + a^2b - \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}b^3 - ab^2 \\ &= \frac{1}{6}b^3 - \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{6}(b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3) = \frac{1}{6}(b-a)^3. \end{aligned}$$

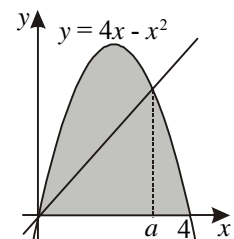
159. Ehto  $A = B$  toteutuu, kun  $\int_0^p x(p-x) dx = \int_0^p x^2(p-x) dx$  eli kun  $\frac{p^3}{6} = \frac{p^4}{12}$ . Tästä saadaan positiivinen nollakohta  $p = 2$ .

160. Origin ja pisteen  $(a, f(a))$  kautta kulkeva suora puolittaa oheiseen kuvaan korostetun alueen, kun  $a$  toteuttaa yhtälön

$$\frac{1}{2}a(4a - a^2) + \int_a^4 (4x - x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (4x - x^2) dx, \quad 0 < a < 4.$$

kolmion ala

$$\text{Siis } 2a^2 - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + 10\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot 10\frac{2}{3}, \text{ josta } a^3 = 32 \text{ ja } a = 2\sqrt[3]{4} \approx 3,17.$$



161. Käyrät  $y = x^2$  ja  $y = 9$  leikkaavat kohdissa  $x = \pm 3$ . Niiden välisen alueen ala on

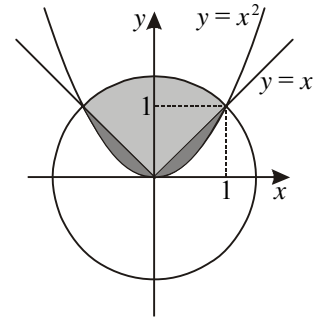
$$2 \int_0^3 (9 - x^2) dx = 36. \text{ Jos suora } y = c \text{ jakaa alueen kahteen yhtä suureen osaan, niin}$$

$$2 \int_0^{\sqrt{c}} (c - x^2) dx = 18 \text{ eli } \frac{2c\sqrt{c}}{3} = 9, \text{ josta } c = \frac{9\sqrt[3]{2}}{2}.$$

162. Yhtälöparista  $y = x^2$  ja  $x^2 + y^2 = 2$  saadaan  $x = \pm 1$ . Kysytty pinta-ala voidaan silloin laskea lisäämällä neljännesympyrän alaan  $\frac{\pi}{2}$  kaksi kertaa käyrien  $y = x$  ja  $y = x^2$  välinen ala

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \left/ \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \right/ = \frac{1}{6}. \text{ Haetun pinta-alan arvoksi}$$

tulee  $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ .

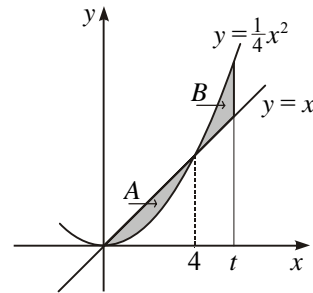


163. Käyrät  $y = x$  ja  $y = \frac{1}{4}x^2$  leikkaavat kohdassa 4, joten tulee olla  $t > 4$ . Alemman alueen pinta-ala on

$$A = \int_0^4 \left(x - \frac{1}{4}x^2\right) dx = \left/ \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3 \right) \right/ = \frac{8}{3} \text{ ja ylemmän}$$

$$B = \int_4^t \left(\frac{1}{4}x^2 - x\right) dx = \left/ \left( \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \right/ = \frac{1}{12}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{8}{3}.$$

Alat ovat yhtä suuret, kun  $\frac{1}{12}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$  eli kun  $t = 6$ . (Arvo  $t = 0$  ei käy.)



164. Kun  $x = t$ , niin  $y = t^2$ .

$$\text{Pinta-ala } A = \int_0^t (t^2 - x^2) dx = \left/ \left( t^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \right/ = \frac{2}{3} t^3.$$

$$\text{Pinta-ala } B = \int_t^2 (x^2 - t^2) dx = \left/ \left( \frac{1}{3} x^3 - t^2 x \right) \right/$$

$$= \frac{8}{3} - 2t^2 - \left( \frac{1}{3} t^3 - t^3 \right) = \frac{2}{3} t^3 - 2t^2 + \frac{8}{3}.$$

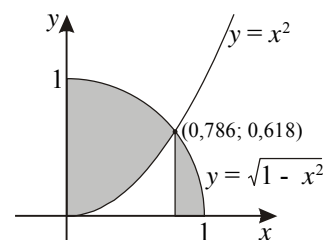
Pinta-alojen summa  $A + B = \frac{4}{3} t^3 - 2t^2 + \frac{8}{3} = f(t)$  on  $t$ :n jatkuva funktio välillä

$0 \leq t \leq 2$ . Derivaatan  $f'(t) = 4t^2 - 4t$  nollakohdat ovat 0 ja 1. Arvoista  $f(0) = 2\frac{2}{3}$ ,

$f(2) = 5\frac{1}{3}$  ja  $f(1) = 2$  valitaan suurin ja pienin

165. Väritetyn alueen yhtenä rajana on yksikköympyrän kaaren neljännes. Haettu pinta-ala saadaan vähentämällä ympyränneljänneksen alasta kuvassa olevan valkoisen alueen ala.

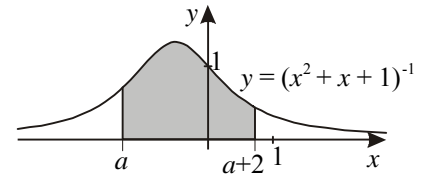
$$A \approx \frac{\pi}{4} - \int_0^{0,786} x^2 dx = \frac{\pi}{4} - \left/ \frac{1}{3} x^3 \right/ \approx 0,624$$



166. Pinta-alkio on  $dA = 2\pi x dx$ , joten  $A = \int_0^r 2\pi x dx = \pi \int_0^r x^2 = \pi r^2$ .

167. Olkoon  $F$  funktion  $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1}$  integraalifunktio. Silloin kuvaan merkitty pinta-ala on

$$A(a) = \int_a^{a+2} \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int_a^{a+2} F(x) = F(a+2) - F(a).$$



$$\begin{aligned} \text{Pinta-alan derivaatta } A'(a) &= F'(a+2) - F'(a) = \frac{1}{(a+2)^2 + (a+2) + 1} - \frac{1}{a^2 + a + 1} \\ &= \frac{-4a - 6}{(a^2 + 5a + 7)(a^2 + a + 1)} \text{ saa arvon nolla kohdassa } a = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

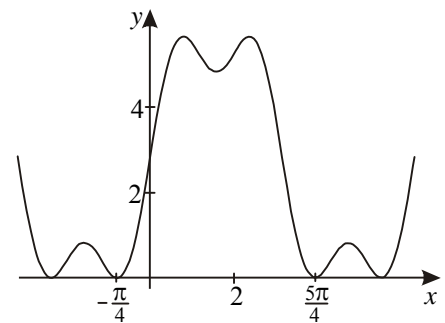
Merkkitarkastelu osoittaa, että siinä kohdassa pinta-ala saa suurimman arvonsa.

168. a)  $A = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^b = 1 - \frac{1}{b} \rightarrow 1$ , kun  $b \rightarrow \infty$ .

b)  $A = \int_1^b \frac{1}{x} dx = \left[ \ln x \right]_1^b = \ln b \rightarrow \infty$ , kun  $b \rightarrow \infty$ .

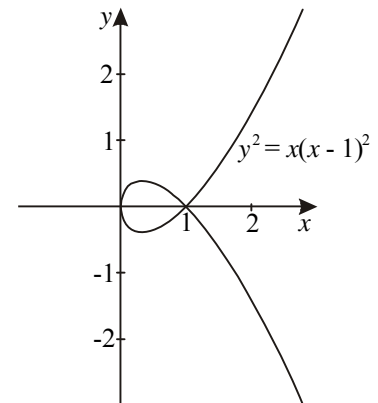
169. Välin  $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$  päätepisteet ovat käyrän  $y = 3 \sin x + \sin 3x + 2\sqrt{2}$  peräkkäisiä nollakohtia.

Pinta-alan likiarvoksi tulee 17,10.



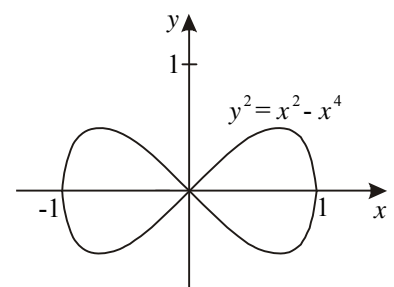
170. Käyrä  $y^2 = x(x-1)^2$  on symmetrinen  $x$ -akselin suhteen. Ensimmäisessä neljänneksessä  $y = |x-1|\sqrt{x}$ . Pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 (1-x)\sqrt{x} dx = 2 \int_0^1 (\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^{1/2} - x^{3/2}) dx = 2 \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$



171. Käyrä on  $y^2 = x^2 - x^4$  määritelty välillä  $-1 \leq x \leq 1$  ja on symmetrinen  $x$ -akselin suhteen. Ensimmäisessä ja kolmannessa neljänneksessä  $y = x\sqrt{1-x^2}$ . Pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^1 (-2x)\sqrt{1-x^2} dx \\ &= -2 \int_0^1 \frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} = -\frac{4}{3} (0-1) = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}. \end{aligned}$$



## 6 Tilavuuden laskeminen

$$172. \text{ a) } V = \pi \int_0^4 (\sqrt{4-x})^2 dx = \pi \int_0^4 (4-x) dx = \pi \int_0^4 (4x - \frac{1}{2}x^2) = 8\pi$$

$$\text{ b) } V = 2\pi \int_0^2 (4-x^2)^2 dx = 2\pi \int_0^2 (16-8x^2+x^4) dx = 2\pi \int_0^2 (16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5) = \frac{512\pi}{15}$$

$$\text{ c) } V = \pi \int_0^4 (16 - \frac{x^4}{16}) dx = \pi \int_0^4 (16x - \frac{1}{80}x^5) = \frac{256\pi}{5}$$

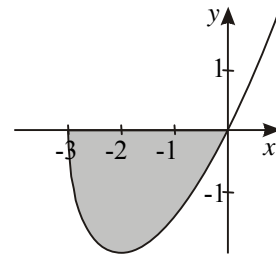
$$\text{ d) } V = \pi \int_0^2 (4-y^2)^2 dy = \pi \int_0^2 (16-8y^2+y^4) dy = \pi \int_0^2 (16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5) = \frac{256\pi}{15}$$

$$\text{ e) } V = \pi \int_{-4}^4 (\sqrt[3]{y+4})^2 dy = \pi \int_{-4}^4 (y+4)^{\frac{2}{3}} dy = \pi \int_{-4}^4 \frac{3}{5}(y+4)^{\frac{5}{3}} = \pi \frac{3}{5} \cdot 32 = \frac{96\pi}{5}$$

$$\text{ f) } V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 1 + \pi \int_1^2 (2-y) dy = \frac{\pi}{3} + \pi \int_1^2 (2y - \frac{1}{2}y^2) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

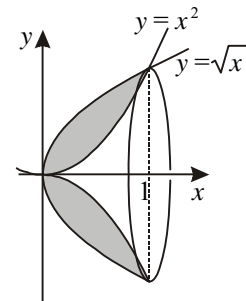
173. Käyrä  $y = x\sqrt{x+3}$  leikkaa  $x$ -akselin kohdissa  $-3$  ja  $0$ . Pyörähdysskappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_{-3}^0 x^2(x+3) dx = \pi \int_{-3}^0 (\frac{1}{4}x^4 + x^3) = \frac{27\pi}{4}.$$



174. Käyrät  $y = x^2$  ja  $y = \sqrt{x}$  leikkaavat kohdissa  $x = 0$  ja  $x = 1$ . Ky-sytty tilavuus on

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{3\pi}{10}.$$



175. Olkoon  $h$  kysytty veden korkeus. Silloin  $\pi \int_0^h y dy = \frac{1}{2} \pi \int_0^4 y dy$ ,

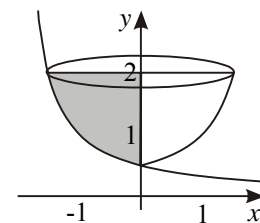
josta  $\frac{1}{2}h^2 = 4$  ja edelleen  $h = 2\sqrt{2}$ .

176. Käyrä  $y = \frac{1}{x+2}$  eli  $x = \frac{1}{y} - 2$  leikkaa  $y$ -akselin kohdassa  $y = \frac{1}{2}$ . Kyseessä olevan pyörähdysskappaleen tilavuus on

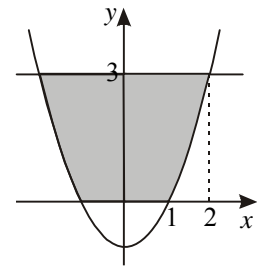
$$V = \pi \int_{1/2}^2 (\frac{1}{y} - 2)^2 dy = \pi \int_{1/2}^2 (\frac{1}{y^2} - \frac{4}{y} + 4) dy$$

$$= \pi \int_{1/2}^2 (-\frac{1}{y} - 4 \ln|y| + 4y)$$

$$= \pi(-\frac{1}{2} - 4 \ln 2 + 8 - (-2 - 4 \ln \frac{1}{2} + 2)) = \pi(7\frac{1}{2} - 8 \ln 2) \approx 6,14.$$



$$\begin{aligned}
 177. \text{ a) } V &= \pi \cdot 3^2 \cdot 4 - 2\pi \int_1^2 (x^2 - 1)^2 dx \\
 &= 36\pi - 2\pi \int_1^2 \left( \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right) dx \\
 &= 36\pi - \frac{76\pi}{15} = \frac{464\pi}{15}
 \end{aligned}$$

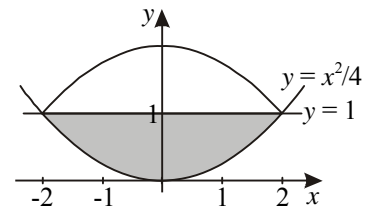


$$\text{b) } V = \pi \int_0^3 (y+1) dy = \pi \int_0^3 \left( \frac{1}{2}y^2 + y \right) dy = \frac{15\pi}{2}$$

$$178. \quad V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left[ x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

179. Käyrät  $4y = x^2$  ja  $y = 1$  leikkaavat kohdissa  $x = \pm 2$ .

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^2 \left( 1 - \frac{1}{4}x^2 \right)^2 dx = 2\pi \int_0^2 \left( 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^4 \right) dx \\
 &= 2\pi \left[ x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{80}x^5 \right]_0^2 = \frac{32\pi}{15}
 \end{aligned}$$



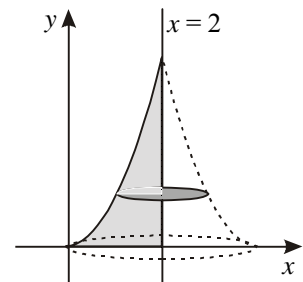
180. Käyrä  $y = 10x(k-x)$  on alaspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa  $x$ -akselin kohdissa  $x = 0$  ja  $x = k$ . Oletetaan aluksi, että  $k > 0$ .

$$V = \pi \int_0^k 100x^2(k-x)^2 dx = 100\pi \int_0^k \left( \frac{k^2}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right) dx = 100\pi \cdot \frac{k^5}{30} = \frac{10\pi k^5}{3}$$

Tilavuus on  $810\pi$ , kun  $k = 3$ . Olettamalla  $k$  negatiiviseksi saadaan tulos  $k = -3$ .

181. Integroidaan  $y$ -akselin suunnassa 0:sta käyrien leikkauskohtaan  $y = 4$ . Poikkileikkausympyrän säde on

$$2 - x = 2 - \sqrt{y}. \text{ Tilavuus } V = \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 dy = \frac{8\pi}{3}.$$



182. Välin  $\left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$  päätepisteet ovat käyrän  $y = \sin x + \cos x$  peräkkäisiä nollakohtia.

Kysytty tilavuus on

$$V = \pi \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\sin x + \cos x)^2 dx = \pi \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (1 + \sin 2x) dx = \pi \left[ x - \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{-\pi/4}^{3\pi/4} = \pi^2.$$

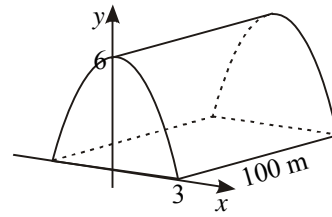
$$183. \text{ a) } V = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[ r^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^r = 2\pi \cdot \frac{2}{3}r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{b) } V = \int_0^r A(x) dx = \int_0^r 4\pi x^2 dx = 4\pi \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- 184.** Maavallin päätyä rajaa paraabeli, jonka yhtälöksi kuvaan piirrettyssä koordinaatistossa saadaan  $y = -\frac{2}{3}x^2 + 6$ . Päädyn pinta-ala neliömet-

$$\text{reinä on } A = 2 \int_0^3 \left(-\frac{2}{3}x^2 + 6\right) dx = 2 \int_0^3 \left(-\frac{2}{9}x^3 + 6x\right) dx = 24.$$

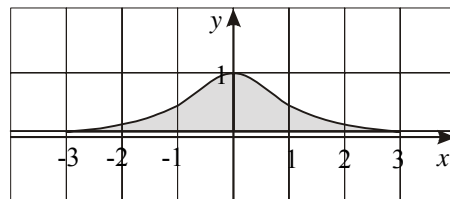
Vallin tilavuus on näin ollen  $12 \text{ m}^2 \cdot 100 \text{ m} = 2\,400 \text{ m}^3$ . Autokuormia tästä tulee 240.



- 185.** Käyrät  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  ja  $y = 0,1x$  leikkaavat kohdissa  $x = \pm 3$ . Pyörähdyškappaleen tila-

$$\text{vuus on } V = \pi \int_{0,1}^1 \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = \pi \int_{0,1}^1 (\ln y - y) = \pi(\ln 1 - 1 - (\ln 0,1 - 0,1)) \approx 4,41.$$

Koordinaatiston pituusyksikkö vastaa kolmea metriä luonnossa, joten koordinaatiston tilavuusyksikkö vastaa 27 kuutiometriä luonnossa. Hiekakasan tilavuus on noin  $27 \cdot 4,41 \text{ m}^3 \approx 120 \text{ m}^3$ .



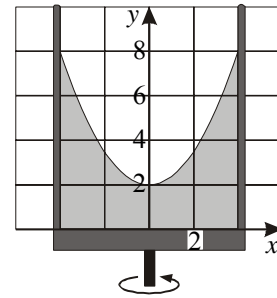
- 186. a)** Paraabelin yhtälö on muotoa  $y = ax^2 + 2$ . Sijoittamalla pisteen  $(4, 8)$  koordinaatit päädytään yhtälöön  $y = \frac{3}{8}x^2 + 2$ .

**b)** Pyörähdysparaboloidin tilavuus on

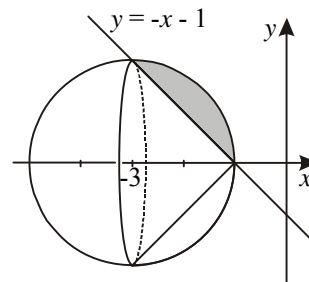
$$V_1 = \pi \int_2^8 x^2 dy = \pi \int_2^8 \frac{8}{3}(y - 2) dy = \frac{8\pi}{3} \int_2^8 \left(\frac{1}{2}y^2 - 2y\right) dy = 48\pi.$$

Nestemäärä on  $\pi \cdot 4^2 \cdot 8 - 48\pi = 80\pi \text{ (cm}^3\text{)}$  eli noin 2,5 dl.

**c)** Yhtälöstä  $\pi \cdot 4^2 \cdot y = 80\pi$  saadaan levossa olevan nesteen korkeudeksi  $y = 5$ .



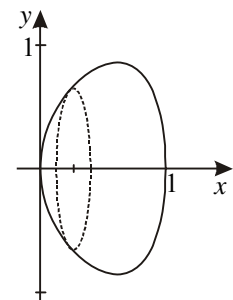
- 187.** Kun ympyrän  $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$  yhtälö kirjoitetaan muotoon  $(x + 3)^2 + y^2 = 4$ , nähdään keskipisteeksi  $(-3, 0)$  ja säteeksi 2. Ympyrän ja suoran  $y = -x - 1$  leikkauskohdiksi lasketaan  $x = -3$  ja  $x = -1$ . Pyörähdyškappaleen tilavuus saadaan vähentämällä puolipallon tilavuudesta suoran ympyräkartion tilavuus. Kartion pohjan säde on 2 ja korkeus 2.  $V = \frac{2}{3}\pi \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{8\pi}{3}$ .



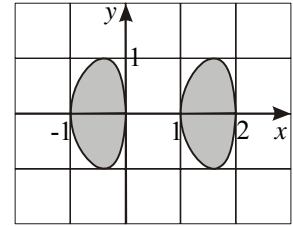
- 188.** Käyrä  $y^2 = (e^x - 1)(e - e^x)$  on määritelty, kun oikea puoli on ei-negatiivinen. Näin on tarkalleen välillä  $0 \leq x \leq 1$ . Käyrän pyörähtäessä  $x$ -akselin ympäri syntyy kappale, jonka tilavuus on

$$V = \pi \int_0^1 (e^x - 1)(e - e^x) dx = \pi \int_0^1 (ee^x - e^{2x} - e + e^x) dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left( ee^x - \frac{1}{2}e^{2x} - ex + e^x \right) dx = \pi \left( e^2 - \frac{1}{2}e^2 - e + e - e + \frac{1}{2} + 0 - 1 \right) = \pi \left( \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2} \right) \approx 1,50$$



189. Käyrä  $y^2 = x(x+1)(x-1)(2-x)$  on määritelty, kun tulolauseke on ei-negatiivinen. Tekijöiden merkkitarkastelu osoittaa, että näin on väleillä  $-1 \leq x \leq 0$  ja  $1 \leq x \leq 2$ . Kappaleen muodostuvat, kun näillä väleillä oleva käyrä pyöryhtää  $x$ -akselin ympäri.



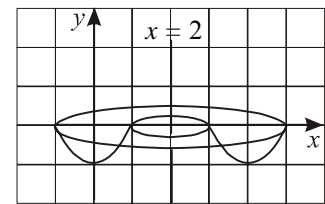
$$V_1 = \pi \int_{-1}^0 y^2 dx = \pi \int_{-1}^0 (-x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x) dx = \frac{19\pi}{30}$$

$$V_2 = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (-x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x) dx = \frac{19\pi}{30}$$

Kappaleet ovat yhtä suuret.

190. Integroidaan  $y$ -akselin suunnassa. Pyörähdyssäteet ovat  $R = 2 + \sqrt{y+1}$  ja  $r = 2 - \sqrt{y+1}$ . Tilavuudeksi saadaan

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^0 R^2 dy - \pi \int_{-1}^0 r^2 dy = \pi \int_{-1}^0 (R^2 - r^2) dy \\ &= \pi \int_{-1}^0 (R-r)(R+r) dy = 8\pi \int_{-1}^0 \sqrt{y+1} dy = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$



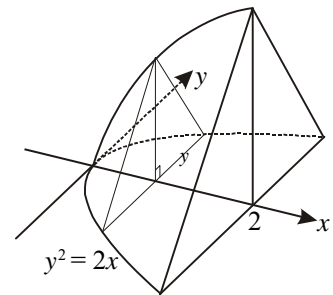
Astian tilavuus on noin 16,8 litraa.

191. a)  $V = 2\pi \int_0^a (b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2) dx = 2\pi \int_0^a (b^2 x - \frac{b^2}{3a^2} x^3) = 2\pi \cdot \frac{2}{3} b^2 a = \frac{4}{3} \pi ab^2$

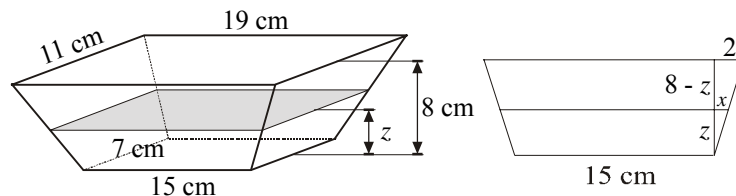
b)  $V = 2\pi \int_0^b (a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2) dy = 2\pi \int_0^b (a^2 y - \frac{a^2}{3b^2} y^3) = 2\pi \cdot \frac{2}{3} a^2 b = \frac{4}{3} \pi a^2 b$

192. Tasasivuisen kolmion kanta on  $2y$ , joten korkeus on  $y\sqrt{3}$  ja ala  $y^2\sqrt{3}$ . Kappaleen tilavuus on

$$V = \sqrt{3} \int_0^2 y^2 dx = \sqrt{3} \int_0^2 2x dx = 4\sqrt{3}.$$



193. Kuvassa oikealla nähdään rasian pitempien sivujen suuntainen pystysuora leikkaus.



Sen yhdenmuotoisista kolmioista voidaan muodostaa verranto  $\frac{x}{z} = \frac{2}{8}$ , josta  $x = \frac{z}{4}$ .

Koska laidat kallistuvat ulospäin kaikki samassa kaltevuudessa, korkeudella  $z$  olevan

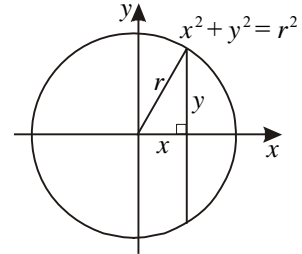
leikkauskuvion ala on  $A(z) = (15 + \frac{z}{2})(7 + \frac{z}{2}) = \frac{1}{4}z^2 + 11z + 105 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

Rasian tilavuus on  $V(z) = \int_0^8 A(z) dz = \int_0^8 \left( \frac{1}{12} z^3 + \frac{11}{2} z^2 + 105z \right) dz = 1\,234 \frac{2}{3} \text{ (cm}^3\text{)}.$

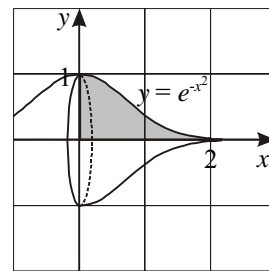
Vastaus: Pinta-ala on  $A(z) = \frac{1}{4} z^2 + 11z + 105$  ja tilavuus  $1\,235 \text{ cm}^3.$

194. Oheinen kuva esittää rakennuksen pohjana olevaa origokeskistä ympyrää. Leikkauskuvio kohdassa  $x, x > 0$ , on suorakulmio, jonka kanta on  $2y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$  ja korkeus  $y$ . Koska  $2r = 19,7 \text{ m}$ , rakennuksen tilavuus on

$$V = 2 \int_0^r 2(r^2 - x^2) dx = 4 \int_0^r \left( r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) dx = \frac{8r^3}{3} \approx 2\,550 \text{ (m}^3\text{)}.$$



195.  $V = \pi \int_0^2 (e^{-x^2})^2 dx = \pi \int_0^2 e^{-2x^2} dx \approx 1,97$

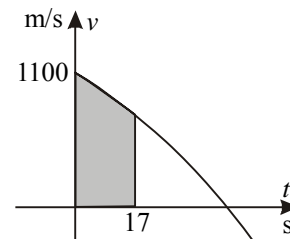


## 7 Määrätyn integraalin muita sovelluksia

196.  $s = \int_2^3 (12 + 10t) dt = \int_2^3 (12t + 5t^2) dt = 37.$  Kuljettu matka on 37 m.

197. Matka metreinä on

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_0^{17} (1100 - 16t - 0,18t^2) dt \\ &= \int_0^{17} (1100t - 8t^2 - 0,06t^3) dt \\ &\approx 18\,700 - 2\,312 - 295 = 16\,093. \end{aligned}$$



Luotain etenee noin 16 km. (Nopeus on integroimisvälillä positiivinen, joten luotain etenee tarkasteluvälillä samaan suuntaan.)

198. Koska kiihtyvyys ( $\text{m/min}^2$ ) on  $a(t) = 12\sqrt{t}$ , kappaleen nopeus ( $\text{m/min}$ ) on

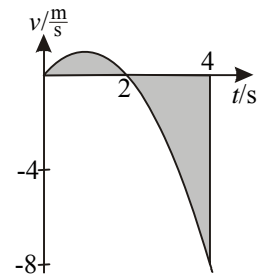
$$v(t) = 12 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = 8t\sqrt{t} + C, \text{ jossa } C \text{ on alkunopeus } 25 \text{ m/min. Kappaleen sijainti}$$

$$\begin{aligned} \text{neljän minuutin kuluttua lähdöstä on } &100 + \int_0^4 (8t\sqrt{t} + 25) dt = 100 + \int_0^4 \left( \frac{16}{5} t^{\frac{5}{2}} + 25t \right) dt \\ &= 302,4. \text{ Kappale on likimain kohdassa } x = 302 \text{ m.} \end{aligned}$$

- 199.** Hetkellä  $t = 2$  kappaleen liikesuunta muuttuu vastakkaiseksi, ja siksi kappaleen kulkeuma matka lasketaan kahdessa osassa.

$$s = \int_0^2 (2t - t^2) dt - \int_2^4 (2t - t^2) dt = \left[ t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^2 - \left[ t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_2^4$$

$$= 4 - \frac{8}{3} - \left( 16 - \frac{64}{3} - 4 + \frac{8}{3} \right) = 8$$



Kappale kulkee kaikkiaan 8 metriä.

- 200.** Koska  $s'(t) = v(t) = 16e^{-0,40t}$ , niin  $s(t) = \int 16e^{-0,40t} dt = -40e^{-0,40t} + C$ . Silloin aikavälillä 2,5 s - 4,5 s kuljettu matka on  $s(4,5 \text{ s}) - s(2,5 \text{ s}) \approx 8,1 \text{ m}$ .

- 201.** Nopeuden lauseke  $v(t) = 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}t)$  ei saa negatiivisia arvoja, joten kappale liikkuu aina samaan suuntaan. Sen kahden ensimmäisen sekunnin aikana kulkeuma matka

$$\text{on } s = \int_0^2 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}t) dt = \left[ 2t + \frac{8}{\pi} \sin \frac{\pi}{4}t \right]_0^2 = 4 + \frac{8}{\pi} \approx 6,5 \text{ (metriä)}.$$

- 202.** Pumppuamisnopeus on  $400 - 2t$  litraa minuutissa,  $0 \leq t \leq 200 \text{ min}$ . Puolen tunnin pumppuamisen jälkeen veden määrä on  $V = \int_0^{30} (400 - 2t) dt = 11\,100$  (litraa).

- 203.** Kun  $g(t)$  tarkoittaa laitoksen vedenkulutusnopeutta ( $\text{m}^3/\text{h}$ ) ja  $t$  keskiyöstä laskettua aikaa tunteina, niin yhtälö  $\int_0^{24} g(t) dt = 450$  ilmaisee, että kulutus vuorokauden aikana on  $450 \text{ m}^3$ .

- 204.** Nesteen tulo loppuu, kun  $60 - 0,01t = 0$  eli  $t = 6\,000$  (s).

$$V = \int_0^{6000} (60 - 0,01t) dt = 180\,000. \text{ Nestettä mahtuu } 180 \text{ m}^3.$$

- 205. a)**  $W = \int_0^{0,1} kx dx = \left[ \frac{1}{2} kx^2 \right]_0^{0,1} = 1,5$ . Työn suuruus on 1,5 J.

**b)**  $W = \frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2) = 4,5$ . Työn suuruus on 4,5 J.

- 206.** Yhtälöstä  $F = kx$  saadaan  $k = \frac{F}{x} = \frac{300 \text{ N}}{0,20 \text{ m}} = 1\,500 \text{ N/m}$ . Jousen venyttämiseen

kymmenen kertaa lepoasennosta 0,30 m tarvitaan työ  $W = 10 \int_0^{0,30} kx dx = 5 \int_0^{0,30} kx^2 dx$

$$= 675 \text{ (joulea)}.$$

- 207.** Jousen venyttämässä tehty työ on  $W = \int_{0,7}^{1,7} kx dx = k \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{0,7}^{1,7} = 1,2k = 6,0$ . Tästä  $k = 5,0$  (N/m).

**208.** Määritetään jousivakion arvo:  $\int_0^{0,3} kx dx = k \int_0^{0,3} \frac{1}{2} x^2 = 0,045k = 2,7$ . Tästä ratkeaa  $k = 60$  (N/m). Venyttäminen lepopituudesta kahden metrin mittaiseksi vaatii työn  $\frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 0,5^2 = 7,5$  (joulea).

**209.**  $W = \int_0^{60} (50 - 3\sqrt{t+4}) dt = \int_0^{60} (50t - 2(t+4)^{3/2}) = 1\,992$ . Työ on noin 2 kJ.

**210.**  $E = \int_0^3 (-\frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + 1) dt = \int_0^3 (-\frac{1}{9}t^3 + \frac{2}{3}t^2 + t) = 6$ . Energian määrä on 6 kWh.

**211.** Lasketaan funktion  $t(x) = 25,0 - \frac{1}{4}x^2$  keskiarvo  $t(k)$  välillä  $[0,5]$ . Se saadaan yhtälöstä  $\int_0^5 (25,0 - \frac{1}{4}x^2) dx = t(k) \cdot (5 - 0)$  eli  $114 \frac{7}{12} = 5 \cdot t(k)$ . Keskilämpötilaksi saadaan  $t(k) \approx 22,9^\circ\text{C}$ .

**212.** Olkoon keskiarvo  $v(k)$ . Se ratkaistaan yhtälöstä  $\int_0^{10} (7\,500t^2 + 2\,500) dt = v(k)(10 - 0)$  eli  $2\,525\,000 = 10v(k)$ . Keskiarvoksi tulee 252 500 €.

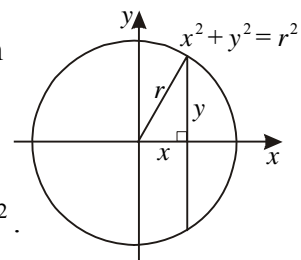
**213.** Jousen venyttäminen lepopituudesta  $6a$  pituuteen  $7a$  vaatii työn  $\int_0^a kx dx = \frac{1}{2}ka^2 = ta$ .

Tästä  $k = \frac{2t}{a}$ . Työ, joka tehdään, kun jousi venytetään pituudesta  $7a$  pituuteen  $8a$ , on

$$W = \int_a^{2a} \frac{2t}{a} x dx = \frac{t}{a} \int_a^{2a} x^2 = \frac{t}{a} \cdot 3a^2 = 3ta.$$

**214.** Sijoitetaan  $xy$ -koordinaatisto pallon keskipisteeseen ja leikataan pallo  $x$ -akselia vastaan kohtisuorilla tasoilla. Leikkausympyrän pinta-ala kohdassa  $x$  on  $\pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$ ,  $-r \leq x \leq r$ . Eri kohdissa saatujen ympyröiden alojen keskiarvo on

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^r \pi(r^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{r} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{r} \left( r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) = \frac{2}{3} \pi r^2.$$



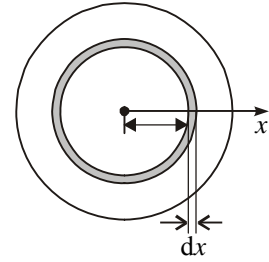
**215.** Merkitään kysyttyä keskiarvoa  $S(t)$ :llä, jolloin  $\int_5^{10} (e^{-0,20x} + 5,00) dx = S(t)(10 - 5)$  ja

$$\text{edelleen } \int_5^{10} (-5,0e^{-0,20x} + 5,00x) = 5S(t). \text{ Tästä } S(t) \approx \frac{26,16}{5} \approx 5,23.$$

- 216.** Henkilöluku ympyrärengaalla, jonka sisäsäde on  $x$  ja ala  $2\pi x dx$ , on  $dN = (1500 - x^3)2\pi x \cdot dx = (3000x - 2x^4)\pi dx$ . Asukasmäärä alueella, jonka etäisyys keskustasta on viiden ja kymmenen kilometrin välillä, on näin ollen

$$N = \int_5^{10} (3000x - 2x^4)\pi dx = \pi \int_5^{10} (1500x^2 - \frac{2}{5}x^5) dx$$

$$= \pi(150\,000 - 40\,000 - (37\,500 - 1250)) \approx 230\,000.$$



- 217.**  $m = \int_0^{100} \frac{200}{1+x^2} \cdot 2\pi x dx = \int_0^{100} 200\pi \ln(1+x^2) = 200\pi \ln 10001$ . Laskeuman määrä on noin 5 800 massayksikköä.

- 218.** Kun  $y = 2x\sqrt{x}$ , niin  $y' = 3\sqrt{x}$ . Käyrän kaaren pituus välillä  $[0, 7]$  on

$$\int_0^7 \sqrt{1 + (3\sqrt{x})^2} dx = \int_0^7 (1 + 9x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{9} \int_0^7 \frac{2}{3} (1 + 9x)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{27} \cdot (512 - 1) = 37 \frac{23}{27}.$$

- 219.** Virtalähteen tuottaman energian määrä saadaan graafisella integroinnilla. Yksi ruutu vastaa energia-arvoa 2 kWh. Lasketaan täydet ruudut, minkä jälkeen voidaan esimerkiksi laskea täysinä ne ruudut, joista käyrän alle jää yli puolet, ja jättää muut osaruudut huomiotta. Tällä arviointitavalla saadaan arvio 103–104 kWh.

- 220.** Keskiarvoon tarvittava määrätty integraali saadaan graafisesti arvioimalla käyrän alle jäävän kuvion pinta-ala. Pitäen alareunana suoraa  $t = 20$  saadaan pinta-alan arvio 84 yksikköä. Vastaava keskiarvo ratkaistaan yhtälöstä  $84 = t(k) \cdot 24$ . Kun tästä saatavaan arvoon lisätään  $20^\circ\text{C}$ , tulee vuorokauden keskilämpötilaksi  $23,5^\circ\text{C}$ . Jos pinta-alan arviossa päädytään lukuun 86, keskilämpötilaksi tulee  $23,6^\circ\text{C}$ .

- 221. a)** Kun  $v(t) = 5,6 + 18 \cdot e^{-0,42t}$ , niin  $v(1 \text{ s}) \approx 17,4 \text{ m/s} \approx 63 \text{ km/h}$ ,  
 $v(5 \text{ s}) \approx 7,80 \text{ m/s} \approx 28 \text{ km/h}$  ja  $v(10 \text{ s}) \approx 5,87 \text{ m/s} \approx 21 \text{ km/h}$ .

**b)**  $s = \int_0^{10} (5,6 + 18 \cdot e^{-0,42t}) dt = \int_0^{10} (5,6t - \frac{300}{7} e^{-0,42t}) \approx 98 \text{ (m)}$

**c)**  $s(t) = \int_0^t (5,6 + 18 \cdot e^{-0,42t}) dt = \int_0^t (5,6t - \frac{300}{7} \cdot e^{-0,42t}) = 5,6t - \frac{300}{7} \cdot e^{-0,42t} + \frac{300}{7}$

Tässä  $t$  on aika sekunteina varjon avautumisesta, josta hetkestä pudottu matka laskeaan.

Se aika sekunteina, jossa hyppääjä putoaa varjonsa varassa puoli kilometriä saadaan yhtälöstä  $5,6t - \frac{300}{7} \cdot e^{-0,42t} + \frac{300}{7} = 500$ . Aika voidaan etsiä graafisesti hakemalla käyrän  $y = s(t) - 500$  nollakohta. Ajaksi tulee 1 min 22 s.

# Lisätehtäviä

## Integraalifunktio

14. a)  $\int \frac{dx}{3x} = \frac{1}{3} \ln|x| + C$

b)  $\int \frac{\ln x}{3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} (\ln x)^1 dx = \frac{1}{6} (\ln x)^2 + C$

c)  $\int \frac{dx}{3x \ln x} = \frac{1}{3} \ln|\ln x| + C$

15. a)  $\int \frac{x}{x+2} dx = \int \frac{(x+2)-2}{x+2} dx = \int (1 - \frac{2}{x+2}) dx = x - 2 \ln|x+2| + C$

b)  $\int \frac{x+1}{x+2} dx = \int \frac{(x+2)-1}{x+2} dx = \int (1 - \frac{1}{x+2}) dx = x - \ln|x+2| + C$

c)  $\int \frac{x^2-3}{x+2} dx = \int \frac{(x^2-4)+1}{x+2} dx = \int (x-2 + \frac{1}{x+2}) dx = \frac{1}{2} x^2 - 2x + \ln|x+2| + C$

16. Funktion  $f(x) = x + \sin x \cos x$  derivaatta on  $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x + \cos^2 x = \cos^2 x + \cos^2 x = 2 \cos^2 x$ , joten funktio  $f$  on funktion  $g(x) = 2 \cos^2 x$  integraalifunktio.

17. Funktion  $u(x) = x(x-2)^4$  derivaatta on  $u'(x) = 1 \cdot (x-2)^4 + x \cdot 4(x-2)^3 = (x-2)^3(x-2+4x) = (x-2)^3(5x-2)$ , joten funktio  $u$  ei ole funktion  $v(x) = (3x-2)(x-2)^3$  integraalifunktio.

18. a)  $g'(x) = -(-\sin 2x) \cdot 2 = 2 \sin 2x$       b)  $h'(x) = -0,5(-\sin 2x) \cdot 2 = \sin 2x$

c)  $s'(x) = -2 \cos x \cdot (-\sin x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

d)  $t'(x) = -0,5 \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) = \sin x \cos x$

Huomataan, että funktiot  $h$  ja  $s$  ovat funktion  $f(x) = \sin 2x$  integraalifunktioita.

19. a)  $D(x \sin x + \cos x + C) = 1 \cdot \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$ , joten

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

b)  $D(2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x - 2) + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ,

joten  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C.$

20. Koska  $f'(x) = \frac{e^x + 2}{2} = \frac{1}{2}e^x + 1$ , on  $f(x) = \frac{1}{2}e^x + x + C$ . Ehto  $f(1) = e$  johtaa yhtälöön  $\frac{1}{2}e + 1 + C = e$ , josta  $C = \frac{1}{2}e - 1$ . Siis  $f(x) = \frac{1}{2}e^x + x + \frac{1}{2}e - 1$ .
21. Funktion  $f(x) = x + 2$  kaikki integraalifunktiot ovat  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$ . Erään integraalifunktion kuvaaja sivuaa suoraa  $y = 3x - 4$ , joten sivuamiskohdassa  $F'(x) = 3$ . Sivuamiskohdaksi tulee  $x = 1$ , ja siinä  $F(1) = 3 \cdot 1 - 4$ . Tämä ehto antaa  $C = -3\frac{1}{2}$ . Haettu integraalifunktio on  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3\frac{1}{2}$ .
22. Funktiot, joiden derivaattafunktio on  $f'(x) = 6 - 2x$ , ovat  $f(x) = 6x - x^2 + C$ . Näiden kuvaajat ovat alaspäin aukeavia paraabeleja, joten kunkin funktion suurin arvo liittyy paraabelin huippuun. Se on kaikilla derivaatan nollakohdassa  $x = 3$ . Ehto  $f(3) = 10$  antaa  $C$ :n arvoksi 1. Haettu funktio on  $f(x) = 6x - x^2 + 1$ .
23. a)  $y' = 2x(x+1) = 2x^2 + 2x$ , joten  $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 + C$ . Ehto  $f(2) = 0$  antaa  $C$ :n arvoksi  $-9\frac{1}{3}$ .
- b)  $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{x} + x = x^{\frac{1}{3}} + x$ , joten  $y = f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}x^2 + C$ . Ehto  $f(8) = 4$  antaa  $C$ :n arvoksi  $-40$ .
- c)  $f'(x) = x - \frac{x^3}{3} - \sin x$ , joten  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \cos x + C$ . Ehto  $f(0) = 3$  antaa  $C$ :n arvoksi 2.
24. a) Kun  $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$ , niin  $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + C$  ja  $f(3) - f(1)$   
 $= 27 - \frac{81}{2} + 18 + C - (1 - \frac{9}{2} + 6 + C) = 2$ .
- b) Kun  $f'(x) = 2\sin 2x + \cos 4x$ , niin  $f(x) = -\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 4x + C$  ja  
 $f(\frac{\pi}{2}) - f(0) = -\cos \pi + \frac{1}{4}\sin 2\pi + C - (-\cos 0 + \frac{1}{4}\sin 0 + C) = 2$ .
25. Funktion  $f(x) = ax^2 + x$  kaikki integraalifunktiot ovat  $F(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$ . Ehdot  $F(-1) = -1$  ja  $F(1) = 3$  antavat yhtälöparin  $-\frac{a}{3} + \frac{1}{2} + C = -1$  ja  $\frac{a}{3} + \frac{1}{2} + C = 3$ , josta ratkeaa  $a = 6$ .

26. Kun  $f''(x) = -6x + 2$ , niin  $f'(x) = -3x^2 + 2x + C_1$  ja  $f(x) = -x^3 + x^2 + C_1x + C_2$ . Ehdot  $f(0) = 3$  ja  $f(2) = 1$  antavat yhtälöparin  $C_2 = 3$  ja  $-8 + 4 + 2C_1 + C_2 = 1$ , josta  $C_1 = 1$ . Haettu funktio on  $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 3$ .
27. Kun  $y'' = 12x^2 - 12$ , niin  $y' = 4x^3 - 12x + C_1$  ja  $y = x^4 - 6x^2 + C_1x + C_2$ . Käyrä kulkee pisteen  $(1, 2)$  kautta, joten  $1 - 6 + C_1 + C_2 = 2$ . Käyrälle tähän pisteeseen piirretyn tangentin yhtälö on  $3x + y - 5 = 0$ , joten derivaatan arvo kohdassa 1 on  $-3$  eli  $4 - 12 + C_1 = -3$ . Saadaan  $C_1 = 5$  ja  $C_2 = 2$ . Käyrän yhtälö on näin ollen  $y = x^4 - 6x^2 + 5x + 2$ .
28. Koska  $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$ , niin  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = x + C_1$  eli  $\ln|f(x)| = x + C_1$ . Tästä  $|f(x)| = e^{x+C_1} = e^x \cdot e^{C_1} = C_2 e^x$  ja  $f(x) = \pm C_2 e^x = C e^x$ ,  $C \neq 0$ .
29. Koska  $f'(x) = g'(x) + 2x - 1$ , niin  $f(x) = g(x) + x^2 - x + C$ . Koska funktioiden  $f$  ja  $g$  kuvaajat kulkevat pisteen  $(3, 5)$  kautta, on  $f(3) = g(3) = 5$ . Saadaan yhtälö  $5 = 5 + 9 - 3 + C$ , josta  $C = -6$ . Epäyhtälö  $f(x) < g(x)$  saadaan nyt muotoon  $g(x) + x^2 - x - 6 < g(x)$  eli  $x^2 - x - 6 < 0$ , josta  $-2 < x < 3$ .
30. Kasvunopeudesta  $n(t) = 40t^2 - 80t^{3/2}$  päästään integroimalla väestömäärään:  

$$N(t) = \frac{40}{3}t^3 - 32t^{5/2} + C$$
 Koska  $N(0) = 20\,000$ , niin  $C = 20\,000$ . Väkiluku 15 vuoden kuluttua on  $N(15) = \frac{40}{3} \cdot 15^3 - 32 \cdot 15^{5/2} + 20\,000 \approx 37\,000$ .
31. a) Kappaleen nopeus (m/s)  $v(t) = t^{3/2} - \frac{t}{2} + 1$  voidaan helposti osoittaa positiiviseksi kaikilla ajanhetkillä  $t \geq 0$ , joten kappale etenee koko ajan samaan suuntaan. Integroimalla saadaan matkan lausekkeeksi  $s(t) = \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{1}{4}t^2 + t + C$ . Aikavälillä 4 s - 9 s kappale etenee matkan  $s(9) - s(4) = 73,15 \approx 73$  (m).
- b) Kiihtyvyys on nopeuden derivaatta, joten  $a(t) = \frac{3}{2}t^{1/2} - \frac{1}{2}$ . Kiihtyvyys ajanhetkellä  $t = 9$  s on  $a(9) = 4$  (m/s<sup>2</sup>).
32. Koska kiihtyvyys (m/s<sup>2</sup>) on  $a(t) = 0,2t - 0,4$ , niin nopeus on  $v(t) = 0,1t^2 - 0,4t + C$ . Nopeus hetkellä  $t = 2,0$  s on 2,5 m/s, joten  $2,5 = 0,1 \cdot 2,0^2 - 0,4 \cdot 2,0 + C$ . Tästä ratkeaa  $C = 2,9$  (m/s). Nopeus hetkellä  $t = 4,2$  s on  $0,1 \cdot 4,2^2 - 0,4 \cdot 4,2 + 2,9 = 2,984$  eli noin 3,0 m/s.

## Määrätyn integraalin laskeminen

$$1. \quad -6 = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = -10 + \int_1^3 f(x) dx, \text{ josta } \int_1^3 f(x) dx = 4.$$

$$2. \quad \text{a) } \int_1^2 (3x^4 - x^5) dx = \left/ \left( \frac{3}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 \right) \right/ = 8 \frac{1}{10} \quad \text{b) } \int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}} dx = \left/ 6\sqrt{x} \right/ = 6$$

$$3. \quad \text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{(3x-4)^2} = -\frac{1}{3} \left/ \frac{1}{3x-4} \right/ = \frac{1}{4} \quad \text{b) } \int_0^2 \frac{x}{1+4x^2} dx = \frac{1}{8} \left/ \ln(1+4x^2) \right/ = \frac{1}{8} \ln 17$$

$$4. \quad \text{a) } \int_{-e}^{-1} \frac{x-5}{x^2} dx = \left/ (\ln|x| + \frac{5}{x}) \right/ = \frac{5}{e} - 6 \quad \text{b) } \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \left/ \frac{1}{4} (\ln x)^4 \right/ = \frac{1}{4}$$

$$5. \quad \text{a) } \int_0^{2\pi} \cos x dx = \left/ \sin x \right/ = 0 \quad \text{b) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos(\pi - x) dx = - \left/ \sin(\pi - x) \right/ = -1$$

$$6. \quad \text{a) } \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x dx = \left/ \frac{1}{5} \sin^5 x \right/ = \frac{1}{5} \quad \text{b) } \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin x dx = \left/ -\frac{1}{5} \cos^5 x \right/ = \frac{1}{5}$$

$$7. \quad \text{a) } \int_0^1 e^{2x} dx = \left/ \frac{1}{2} e^{2x} \right/ = \frac{1}{2} (e^2 - 1) \quad \text{b) } \int_0^{\ln 2} (e^x + 1) dx = \left/ (e^x + x) \right/ = 1 + \ln 2$$

$$8. \quad \text{a) } \int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 x dx = \left/ -\frac{1}{2} x^2 \right/ + \left/ \frac{1}{2} x^2 \right/ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{b) } \int_0^2 |t-1| dt = \int_0^1 (-t+1) dt + \int_1^2 (t-1) dt = \left/ (-\frac{1}{2} t^2 + t) \right/ + \left/ (\frac{1}{2} t^2 - t) \right/ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$9. \quad \int_0^1 (2x-1)\sqrt{x} dx = \int_0^1 (2x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) dx = \left/ (\frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}) \right/ = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

$$10. \quad \int_0^1 x(\sqrt{x}+1) dx = \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + x) dx = \left/ (\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} x^2) \right/ = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$$

$$11. \quad \int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{2-3x}} = -\frac{1}{3} \int_0^{-1} (-3)(2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{3} \left/ 2(2-3x)^{\frac{1}{2}} \right/ = -\frac{2}{3} (\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

$$12. \int_0^1 (1-x^2)^r x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x)(1-x^2)^r dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{r+1} (1-x^2)^{r+1} = -\frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{r+1}\right) = \frac{1}{2(r+1)}$$

$$13. \text{ a) } \int_0^x (2t+1) dt = \int_0^x (t^2+t) = x^2+x=2, \text{ josta } x=1 \text{ tai } x=-2.$$

$$\text{ b) } \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_1^x t^{-\frac{1}{2}} = \int_1^x 2\sqrt{t} = 2\sqrt{x}-2=2, \text{ josta } x=4.$$

$$14. \text{ a) } \int_0^x e^t dt = \int_0^x e^t = e^x - 1 = 1, \text{ josta } x = \ln 2.$$

$$\text{ b) } x = \int_a^{a^2} \frac{dt}{t} = \int_a^{a^2} \ln|t| = \ln a^2 - \ln|a| = \ln a^2 - \ln a = \ln \frac{a^2}{a} = \ln a, a > 0$$

$$15. \text{ Kun } f(x) = 4x - 10, \text{ niin } \int_1^a f(x) dx = \int_1^a (2x^2 - 10x) = 2a^2 - 10a + 8 \text{ ja } f\left(3\frac{1}{4}\right) = 3.$$

$$\text{ Yhtälö } \int_1^a f(x) dx = f\left(3\frac{1}{4}\right) \text{ toteutuu kun } a = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{2}.$$

$$16. \text{ Olkoon toisen asteen polynomifunktio } f(x) = ax^2 + bx + c. \text{ Ehdot } f(0) = f(3) = 1 \text{ antavat yhtälöparin } c = 1 \text{ ja } 9a + 3b + c = 1. \text{ Ehdosta } \int_0^3 f(x) dx = 0 \text{ saadaan yhtälö}$$

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx\right) = 9a + \frac{9}{2}b + 3c = 0. \text{ Yhtälöryhmän ratkaisuksi tulee } a = \frac{2}{3},$$

$$b = -2 \text{ ja } c = 1. \text{ Kysytty polynomifunktio on } f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x + 1.$$

$$17. \text{ Jatkuva funktio } f(x) = 2x^7 - x^5 + 5x^3 + 4x \text{ on pariton, joten } \int_{-a}^a f(x) dx = 0. \text{ Siksi}$$

$$\int_{-2}^2 (2x^7 - x^5 + 5x^3 + 4x + 1) dx = \int_{-2}^2 (2x^7 - x^5 + 5x^3 + 4x) dx + \int_{-2}^2 1 dx = 0 + 4 = 4.$$

$$18. \text{ a) } \int_2^x (-3t^2 + 4t - 2) dt = \int_2^x (-t^3 + 2t^2 - 2t) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 4.$$

Epäyhtälö  $-x^3 + 2x^2 - 2x + 4 > 0$  kirjoitetaan esimerkiksi tekijäryhmittelyä käyttäen muotoon  $(-x+2)(x^2+2) > 0$ , josta nähdään helposti ratkaisu  $x < 2$ .

**b)** Integroitava funktio on määritelty, kun  $t < 3$ .

$$\int_0^x \frac{3-t}{\sqrt{3-t}} dt = \int_0^x (3-t)^{\frac{1}{2}} dt = -\int_0^x (-1)(3-t)^{\frac{1}{2}} dt = -\int_0^x \frac{2}{3} (3-t)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \left( (3-x)^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}} \right) > 0,$$

kun  $(3-x)^{\frac{3}{2}} < 3^{\frac{3}{2}}$ . Ehdot  $x < 3$  ja  $3-x < 3$  yhdessä määräävät ratkaisun  $0 < x < 3$ .

19. Funktio  $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{kun } x < 1, \\ 2x+1, & \text{kun } x \geq 1, \end{cases}$  on jatkuva, joten integraali  $\int_0^2 f(x)dx$  on olemassa.

$$\begin{aligned} \text{sa. } \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 (x+2)dx + \int_1^2 (2x+1)dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right) + \int_1^2 (x^2 + x) = 2\frac{1}{2} + 4 = 6\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

20.  $\int_{-1}^3 (x^2 + 1)dx \approx ((-0,5)^2 + 1) \cdot 1 + ((0,5)^2 + 1) \cdot 1 + ((1,5)^2 + 1) \cdot 1 + ((2,5)^2 + 1) \cdot 1 = 13$

21. a)  $\int_0^{30} \sin \sqrt{x} dx \approx -9,03$       b)  $\int_{0,01}^1 \ln x dx \approx -0,94$       c)  $\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx 0,88$

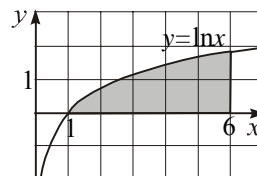
22. Laskimen antamat tulokset saattavat vaihdella erilaisesta laskentatarkkuudesta johtuen.

a)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \approx 0,78543$ . Tarkka arvo on  $\pi/4 \approx 0,78540$ .

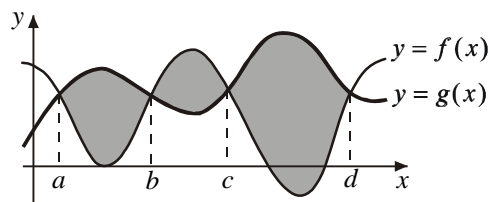
b)  $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^2(x^2+1)} \approx 0,14270$ . Tarkka arvo on  $\frac{\pi-2}{8} \approx 0,14270$ .

## Pinta-alan laskeminen

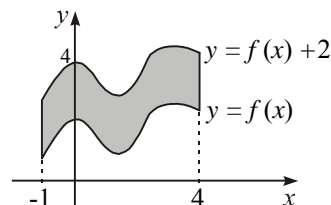
1.  $s_5 = \ln 1 \cdot 1 + \ln 2 \cdot 1 + \ln 3 \cdot 1 + \ln 4 \cdot 1 + \ln 5 \cdot 1 \approx 4,787$   
 $S_5 = \ln 2 \cdot 1 + \ln 3 \cdot 1 + \ln 4 \cdot 1 + \ln 5 \cdot 1 + \ln 6 \cdot 1 \approx 6,579$   
 $\frac{1}{2}(s_5 + S_5) \approx 5,68$



2.  $A = \int_a^b (g(x) - f(x))dx + \int_b^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^d (g(x) - f(x))dx$



3.  $A = \int_{-1}^4 (f(x) + 2 - f(x))dx = \int_{-1}^4 2x dx = 10$



4. Käyrät  $y = x^2$  ja  $y = x^3$  leikkaavat kohdissa 0 ja 1. Niiden välillä käyrä  $y = x^2$  on käyrän  $y = x^3$  yläpuolella. Välisen alueen ala on

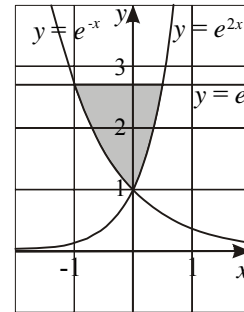
$$\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

5. Käyrä  $y = \frac{1+x}{x^3}$  on välillä  $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$  jatkuva ja  $x$ -akselin yläpuolella, joten kyseessä

$$\begin{aligned} \text{oleva pinta-ala on } A &= \int_{1/3}^{1/2} \frac{1+x}{x^3} dx = \int_{1/3}^{1/2} (x^{-3} + x^{-2}) dx = \int_{1/3}^{1/2} \left(-\frac{1}{2}x^{-2} - x^{-1}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 + \frac{1}{2} \cdot 9 + 3 = 3\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

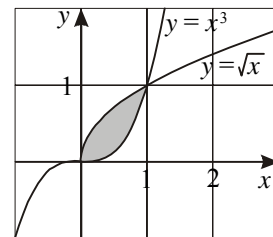
6. Suora  $y = e$  leikkaa käyrän  $y = e^{2x}$  kohdassa  $x = \frac{1}{2}$  ja käyrän  $y = e^{-x}$  kohdassa  $x = -1$ . Käyrät  $y = e^{2x}$  ja  $y = e^{-x}$  puolestaan leikkaavat toisensa kohdassa  $x = 0$ . Kysytty pinta-ala on näin ollen

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (e - e^{-x}) dx + \int_0^{1/2} (e - e^{2x}) dx \\ &= \int_{-1}^0 (ex + e^{-x}) + \int_0^{1/2} (ex - \frac{1}{2}e^{2x}) = 1 + e - e + \frac{e}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$



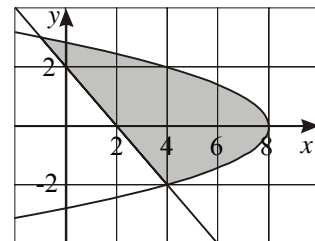
7. Käyrät  $y = \sqrt{x}$  ja  $y = x^3$  leikkaavat kohdissa 0 ja 1. Näiden kohtien välillä käyrä  $y = \sqrt{x}$  on käyrän  $y = x^3$  yläpuolella, joten kysytty pinta-ala on

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$



8. Käyrien  $x + y^2 = 8$  ja  $x + y = 2$  leikkauspisteiden  $y$ -koordinaateiksi lasketaan  $y = -2$  ja  $y = 3$ . Integroidaan  $y$ -akselin suunnassa, jolloin pinta-alaksi saadaan

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^3 (-y^2 + 8 - (-y + 2)) dy = \int_{-2}^3 (-y^2 + y + 6) dy \\ &= \int_{-2}^3 \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 6y\right) = \frac{27}{2} + \frac{22}{3} = 20\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

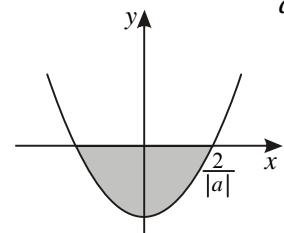


9. Käyrien  $y = kx$ ,  $k > 0$ , ja  $y = x^2$  leikkauskohdat ovat  $x = 0$  ja  $x = k$ . Käyrien välisen äärellisen alueen pinta-ala  $A(k) = \int_0^k (kx - x^2) dx = \int_0^k \left(\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{6}k^3$ . Silloin

$$A'(k) = \frac{1}{2}k^2.$$

10. Ylöspäin aukeava paraabeli  $y = a^2x^2 - 4$  ( $a \neq 0$ ) leikkaa  $x$ -akselin kohdissa  $x = \pm \frac{2}{a}$ .

$$\begin{aligned} \text{Symmetriasta johtuen } A &= -2 \int_0^{2/|a|} (a^2x^2 - 4) dx \\ &= -2 \int_0^{2/|a|} \left(\frac{a^2}{3}x^3 - 4x\right) = -2 \left(\frac{8}{3|a|} - \frac{8}{|a|}\right) = \frac{32}{3|a|}. \end{aligned}$$



11. Suora  $y = x$  leikkaa alaspäin aukeavan paraabelin  $y = -x^2 + ax$  kohdissa  $x = 0$  ja

$x = a - 1, a > 0$ . Käyrien rajaaman alueen pinta-ala on  $\int_0^{a-1} (-x^2 + ax - x) dx$

$$= \int_0^{a-1} \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{a-1}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{6}(a-1)^3. \text{ Ehto } \frac{1}{6}(a-1)^3 = 4\frac{1}{2} \text{ antaa } a = 4.$$

12. Alaspäin aukeavan paraabelin  $y = -x^2 + ax - 3$  ja suoran  $y = 2x - 3$  leikkauspisteiden kohdiksi lasketaan  $x = 0$  ja  $x = a - 2$ .

Jos  $a - 2 > 0$ ,  $A = \int_0^{a-2} (-x^2 + ax - 3 - 2x + 3) dx = \int_0^{a-2} \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{a-2}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{6}(a-2)^3$ .

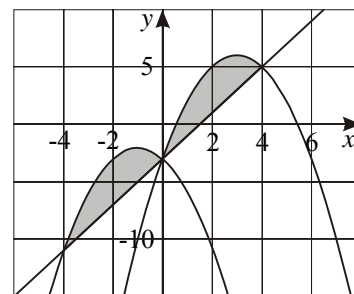
Ehto  $\frac{1}{6}(a-2)^3 = 10\frac{2}{3}$  antaa  $a = 6$ .

Jos  $a - 2 < 0$ ,  $A = \int_{a-2}^0 (-x^2 + ax - 3 - 2x + 3) dx = \int_{a-2}^0 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{a-2}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{6}(2-a)^3$ .

Ehto  $\frac{1}{6}(2-a)^3 = 10\frac{2}{3}$  antaa  $a = -2$ .

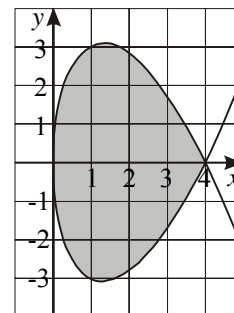
Jos  $a - 2 = 0$ , integraali on nolla, joten  $a$ :n arvo 2 ei ole ratkaisu.

Oheinen kuva esittää niitä tapauksia, joissa paraabelin  $y = -x^2 + ax - 3$  ja suoran  $y = 2x - 3$  rajaaman alueen pinta-ala on  $10\frac{2}{3}$ .



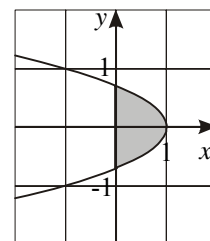
13. Käyrä  $y^2 - x(4-x)^2 = 0$  eli  $y^2 = x(4-x)^2$  on määritelty, kun  $x \geq 0$ . Käyrän rajaaman silmukan pinta-ala on

$$A = 2 \int_0^4 (4-x)\sqrt{x} dx = 2 \int_0^4 \left(\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) dx = 2\left(\frac{64}{3} - \frac{64}{5}\right) = 17\frac{1}{15}.$$



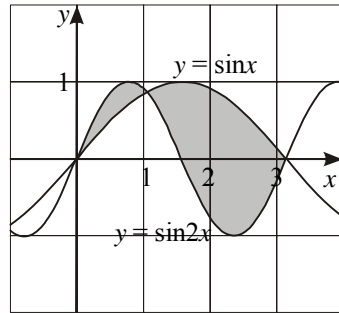
14.  $x = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ . Koska  $y = \sin t$ , niin  $x = -2y^2 + 1$ . Kuvaaja on oheinen vasemmalle aukeava paraabeli. Se leikkaa y-akselin kohdissa  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Käyrän ja y-akselin rajaaman kuvion pinta-ala on

$$A = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (-2y^2 + 1) dx = 2 \int_0^{1/\sqrt{2}} (-2y^2 + 1) dy \\ = 2 \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{3}y^3 + y\right) dy = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



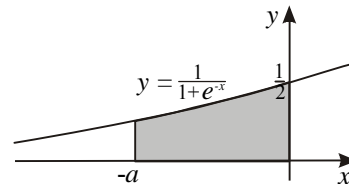
15. Käyrien  $y = \sin x$  ja  $y = \sin 2x$  leikkauskohdat välillä  $[0, \pi]$  ovat  $0$ ,  $\frac{\pi}{3}$  ja  $\pi$ . Kuvan perusteella pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\pi/3}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx \\ &= \int_0^{\pi/3} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x\right) dx + \int_{\pi/3}^{\pi} \left(-\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x\right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{1}{2} \cos 0 + \cos 0\right) + \left(-\cos \pi + \frac{1}{2} \cos 2\pi - \left(-\cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 2\frac{1}{2}. \text{ Pinta-alan tarkka arvo on } 2\frac{1}{2} \text{ km}^2 = 250 \text{ ha}. \text{ Korvaussumma on } \\ &250 \cdot 11\,500 \text{ mk} = 2\,875\,000 \text{ mk}. \end{aligned}$$



16. Käyrän  $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$  sekä suorien  $y = 0$ ,  $x = 0$  ja  $x = -a$  ( $a > 0$ ) rajaaman alueen pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \int_{-a}^0 \frac{dx}{1+e^{-x}} = \int_{-a}^0 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_{-a}^0 \ln(e^x + 1) \\ &= \ln 2 - \ln(e^{-a} + 1) = \ln \frac{2}{e^{-a} + 1}. \end{aligned}$$

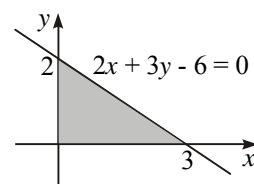


Kun  $a \rightarrow \infty$ , pinta-ala lähestyy arvoa  $\ln 2$ .

## Tilavuuden laskeminen

1. a) Suora  $2x + 3y - 6 = 0$  eli  $y = -\frac{2}{3}x + 2$  leikkaa  $x$ -akselin kohdassa 3. Pyörähdyskappaleen tilavuus on

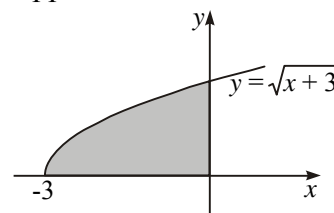
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 \left(-\frac{2}{3}x + 2\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4\right) dx \\ &= \pi \int_0^3 \left(\frac{4}{27}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 4x\right) dx = 4\pi. \end{aligned}$$



- b) Pyörähdyksessä syntyvän suoran ympyräkartion pohjan säde on 2 ja korkeus 3. joten tilavuus on  $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 4\pi$ .

2. Käyrä  $y = \sqrt{x+3}$  alkaa  $x$ -akselin kohdasta  $-3$ . Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-3}^0 (x+3) dx = \pi \int_{-3}^0 \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right) \\ &= \pi \left(0 - \left(\frac{9}{2} - 9\right)\right) = \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

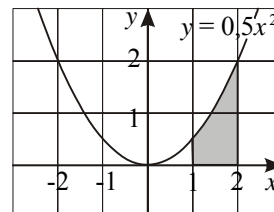


3. Kun paraabelin  $y = ax^2$ ,  $a > 0$ , ja suoran  $y = h$ ,  $h > 0$ , rajaama alue pyörrähtää  $y$ -akselin ympäri, syntyy pyörrähdysparaboloidi. Sen tilavuus on

$$V = \pi \int_0^h \frac{1}{a} y dy = \pi \int_0^h \frac{1}{2a} y^2 = \frac{\pi h^2}{2a}.$$

4. a)  $V = \pi \int_1^2 0,25x^4 dx = \pi \int_1^2 0,05x^5 = 1,55\pi = \frac{31\pi}{20}$

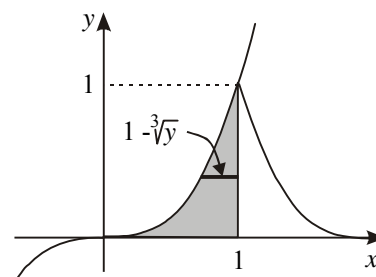
b) Paraabeli  $y = 0,5x^2$  leikkaa suoran  $x = 1$  kohdassa  $y = \frac{1}{2}$  ja suoran  $x = 2$  kohdassa  $y = 2$ . Ratkaistaan paraabelin yhtälö muotoon  $x = \pm\sqrt{2y}$  ja integroidaan  $y$ -akselin suunnassa.



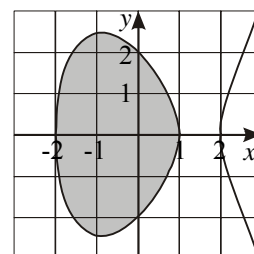
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (2^2 - (\sqrt{2y})^2) dy - \pi \int_0^{1/2} (1^2 - (\sqrt{2y})^2) dy = \pi \int_0^2 (4 - 2y) dy - \pi \int_0^{1/2} (1 - 2y) dy \\ &= \pi \int_0^2 (4y - y^2) - \pi \int_0^{1/2} (y - y^2) = 4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4} \end{aligned}$$

5. Kun kappaletta leikataan tasolla, joka on kohtisuorassa suoraa  $x = 1$  vastaan, saadaan ympyrä, jonka säde on  $1 - \sqrt[3]{y}$ . Integroidaan  $y$ -akselin suunnassa. Tilavuudeksi saadaan

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (1 - \sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \int_0^1 (1 - 2y^{1/3} + y^{2/3}) dy \\ &= \pi \int_0^1 (y - \frac{3}{2}y^{4/3} + \frac{3}{5}y^{5/3}) = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$



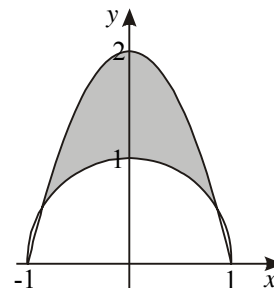
6. Kun muodostetaan tulon  $(2+x)(2-x)(1-x)$  tekijöiden merkikävaio, havaitaan, että tulo on  $\geq 0$ , kun  $-2 \leq x \leq 1$  tai  $x \geq 2$ . Käyrä  $y^2 = (2+x)(2-x)(1-x)$  muodostaa umpinaisen silmukan välillä  $-2 \leq x \leq 1$ . Sen pyörrähtäessä  $x$ -akselin ympäri, syntyy kappale, jonka tilavuus on



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^1 (2+x)(2-x)(1-x) dx = \pi \int_{-2}^1 (4 - x - x^2 + x^3) dx \\ &= \pi \int_{-2}^1 (4x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4) = \pi (\frac{23}{12} - (-\frac{28}{3})) = \frac{45\pi}{4}. \end{aligned}$$

7. Paraabelin  $y = -2x^2 + 2$  ja puoliympyrän  $y = \sqrt{1-x^2}$  leikkauspisteet saadaan yhtälöstä  $(-2x^2 + 2)^2 = 1 - x^2$  eli  $4x^4 - 7x^2 + 3 = 0$ . Tästä  $x^2 = 1$  tai  $x^2 = \frac{3}{4}$  ja edelleen

$$x = \pm 1 \text{ tai } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Kun kysymyksessä oleva tasokuvio}$$



pyörrähtää  $x$ -akselin ympäri, syntyy kappale, jonka tilavuuden laskemisessa voidaan käyttää symmetriaa:

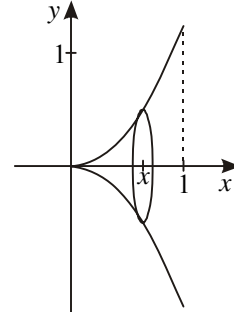
$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} ((-2x^2 + 2)^2 - (\sqrt{1-x^2})^2) dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} (4x^4 - 7x^2 + 3) dx$$

$$= 2\pi \left[ \frac{4}{5}x^5 - \frac{7}{3}x^3 + 3x \right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{17}{10}\pi\sqrt{3} \approx 9,3$$

8. Pyörähdysskappaleen tilavuus välillä  $[0, x]$  on  $\pi \int_0^x f(x)^2 dx = x^5$ .

Derivoidaan yhtälö, jolloin saadaan  $\pi f(x)^2 = 5x^4$ . Tästä

$$f(x) = \sqrt{\frac{5x^4}{\pi}} = \sqrt{\frac{5}{\pi}}x^2, \text{ sillä } f(x) \geq 0.$$

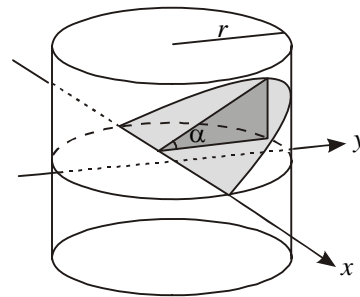


9. Leikkauskuviona olevan kolmion kateetit ovat  $y$  ja  $\frac{y}{\sqrt{3}}$

ja ala  $\frac{y^2}{2\sqrt{3}}$ . Koska  $x^2 + y^2 = 1$ , niin kolmion ala on

$\frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x^2)$ . Kysytyksi tilavuudeksi tulee

$$V = 2 \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x^2) dy = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

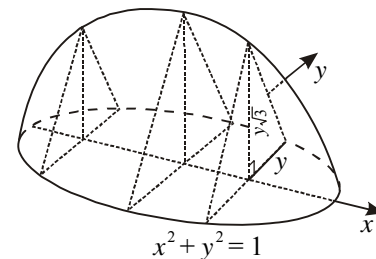


10. Pohjaympyrän yhtälö kuvan koordinaatistossa on  $x^2 + y^2 = 1$ . Leikkauskolmion kanta kohdassa  $x$  on  $2y$

ja ala  $\frac{1}{2} \cdot 2y \cdot y\sqrt{3} = y^2\sqrt{3} = \sqrt{3}(1-x^2)$ . Kappaleen

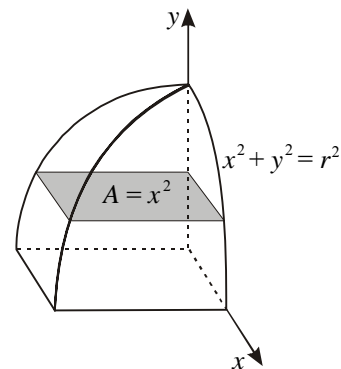
tilavuus on näin ollen

$$V = 2 \int_0^1 \sqrt{3}(1-x^2) dx = 2\sqrt{3} \left[ x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,3.$$



11. Kuvaan on piirretty kahdeksasosa tehtävässä mainitusta kappaleesta. Kun sitä leikataan pohjan suuntaisella tasolla, leikkauskuvio on neliö, jonka pinta-ala on  $A = x^2 = r^2 - y^2$ . Kappaleen koko tilavuus on

$$V = 8 \int_0^r (r^2 - y^2) dy = 8 \left[ r^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^r = \frac{16}{3} r^3.$$



## Määrätyn integraalin muita sovelluksia

1. Nopeus on matkan derivaatta ajan suhteen, joten kolmannen sekunnin aikana kuljettu

$$\text{matka on } s = \int_2^3 v(t) dt = 7,8 \int_2^3 t^{\frac{1}{2}} dt = 7,8 \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_2^3 = 5,2(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \approx 12,3 \text{ (m)}.$$

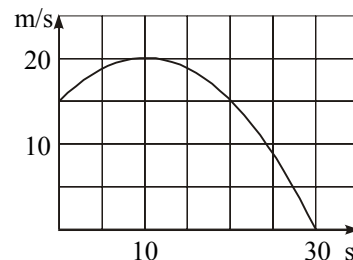
2. Kuten edellisessä tehtävässä

$$s = \int_4^9 (t^{3/2} + 16t + 1) dt = \left[ \frac{2}{5} t^{5/2} + 8t^2 + t \right]_4^9 = 754,2 - 144,8 = 609,4.$$

Kappale kulkee noin 610 metriä.

3. a) Kuvan paraabelille voidaan johtaa yhtälö  $v = -\frac{1}{20}t^2 + t + 15$ . Kysytty matka on

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{10} \left(-\frac{1}{20}t^2 + t + 15\right) dt \\ &= \left[ -\frac{1}{60}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 15t \right]_0^{10} = 183 \frac{1}{3} \approx 180 \text{ (m)} \end{aligned}$$



$$\text{b) } s = \int_0^{30} \left(-\frac{1}{20}t^2 + t + 15\right) dt = 450 \text{ (m)}$$

4. Määritetään ensin jousivakio  $k$  yhtälöstä  $\int_0^{0,5} kx dx = 19$ . Saadaan  $k = 152$  (N/m). Ky-

sytty työ on  $W = 16 \int_0^{0,9} 152x dx = 984,96$ . Tehdään noin 980 joulen työ.

$$5. W = \int_0^{60} (50 - 3\sqrt{t+4}) dt = \left[ 50t - 2(t+4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{60} = 1976. \text{ Työ on noin } 2,0 \text{ kJ}$$

$$6. \text{ Keskikulutus on } \frac{1}{6} \int_6^{12} (0,7t^3 - 18t^2 + 150t - 360) dt = \frac{1}{6} \cdot 270 = 45 \text{ (m}^3 / \text{h)}.$$

7. Vuoden keskilämpötila celsiusasteina on

$$\begin{aligned} \frac{1}{365} \int_0^{365} \left(-31,5 \cos \frac{2\pi}{365} x - 12,5\right) dx &= \frac{1}{365} \left( \frac{365}{2\pi} \cdot (-31,5) \int_0^{365} \frac{2\pi}{365} \cos \frac{2\pi}{365} x dx - 12,5 \int_0^{365} dx \right) \\ &= \frac{1}{365} \left( \frac{365}{2\pi} \cdot (-31,5) \left[ \sin \frac{2\pi}{365} x - 12,5 \right]_0^{365} \right) \\ &= \frac{1}{365} (0 - 12,5 \cdot 365) = -12,5. \end{aligned}$$

$$8. \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + 4x^2} dx \approx 16,819$$

$$9. \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx \approx 3,20$$

10. Keskiarvofunktion  $G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$  derivaatta on  $G'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x)$

$$= \frac{1}{x} (f(x) - \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt) = \frac{1}{x} (f(x) - G(x)).$$

Jos  $f$  on kasvava ja  $t < x$ , niin  $f(t) \leq f(x)$  eli  $f(x) - f(t) \geq 0$ . Tällöin myös

$$\int_0^x (f(x) - f(t)) dt \geq 0, \text{ josta } f(x) \cdot x \geq \int_0^x f(t) dt \text{ ja siis } f(x) \geq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = G(x).$$

Äskeinen tulos merkitsee, että  $G'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - G(x)) \geq 0$ , joten  $G$  on kasvava.

## Pikatesti

1. Jos funktio  $F(x) = e^{x^2}$  on funktion  $f$  integraalifunktio, niin  $f(x) = F'(x) = 2xe^{x^2}$ .

2. Kun  $F(x) = x - \ln x^2 + 1$ , niin  $F'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$ . Oikea vaihtoehto on c.

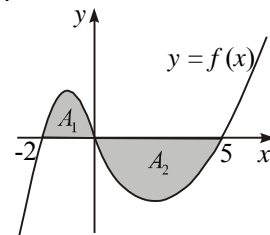
3. a) Kun  $\frac{dy}{dx} = 3x$ , niin  $y = \frac{3}{2}x^2 + C$ . b) Kun  $\frac{dy}{dx} = x^3$ , niin  $y = \frac{1}{4}x^4 + C$ .

c) Kun  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ , niin  $y = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$ .

d) Kun  $\frac{dy}{dx} = \frac{6}{x^3} = 6x^{-3}$ , niin  $y = 6 \cdot \frac{1}{-2} x^{-2} + C = -3x^{-2} + C = -\frac{3}{x^2} + C$ .

4.  $\int_1^3 (f(x) + 2) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 2 dx = \int_1^3 f(x) dx + \frac{3}{1} 2x = 10 + 4 = 14$

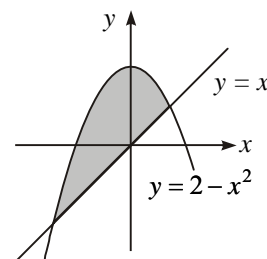
5.  $\int_{-2}^5 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx = 2,2 - 9,8 = -7,6$



6. Käyrien  $y = x$  ja  $y = 2 - x^2$  leikkauskohdiksi lasketaan  $x = 1$  ja  $x = -2$ . Kuvaan merkityn alueen pinta-ala on

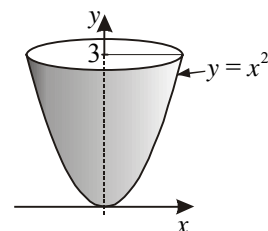
$$\int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left[ 2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^1$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left( -4 + \frac{8}{3} - 2 \right) = 4 \frac{1}{2}.$$



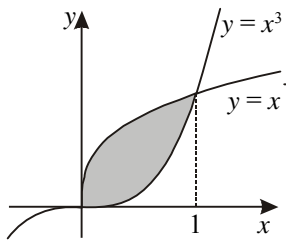
7. Käyrien  $y = x^2$  ja  $y = 3$  rajaama alue pyörittää  $y$ -akselin ympäri, joten integroidaan  $y$ -akselin suunnassa.

$$V = \pi \int_0^3 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^3 \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{9\pi}{2}$$



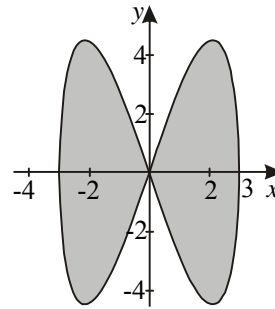
8. a)  $\int_0^1 e^{-x} dx = \int_0^1 -e^{-x} = -e^{-1} - (-e^0) = -\frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$
- b)  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x = \frac{1}{2} (\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$
- c)  $\int_{-2}^4 |x| dx = \int_{-2}^0 (-x) dx + \int_0^4 x dx = \int_{-2}^0 -\frac{1}{2} x^2 + \int_0^4 \frac{1}{2} x^2 = 2 + 8 = 10$
9. Kun  $F(x) = \int_0^x t \sqrt{1+2t^2} dt$ , niin  $F'(x) = x\sqrt{1+2x^2}$  ja  $F'(2) = 6$ .
10. Funktion  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  keskiarvo välillä  $[0, 3]$  on  $\frac{1}{3-0} \int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{6} \int_0^3 \ln(1+x^2) = \frac{1}{6} \ln 10 \approx 0,384$ .

## Kertauskoe 1

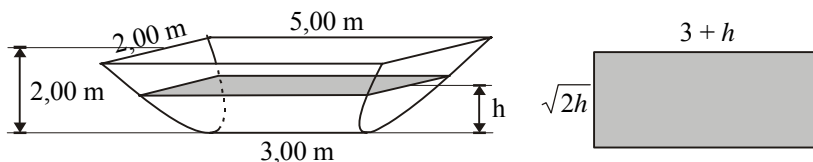
1. a)  $\int (x - \frac{1}{2})^2 dx = \frac{1}{3} (x - \frac{1}{2})^3 + C$     b)  $\int \cos 6x dx = \frac{1}{6} \sin 6x + C$
- c)  $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \int_1^4 (\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}) = \frac{28}{3} - \frac{8}{3} = 6\frac{2}{3}$
2. Funktion  $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x} + 1$  integraalifunktiot ovat  $F(x) = x^3 - 2 \ln x + x + C$ , kun  $x > 0$ . Ehdolla  $F(1) = 5$  on  $C = 3$ . Haettu funktio on  $F(x) = x^3 - 2 \ln x + x + 3, x > 0$ .
3. Käyrien  $y = x^3$  ja  $y = x^{1/3}$  yhteiset pisteet ovat kohdissa  $x = 0$  ja  $x = 1$ . Niiden välillä käyrä  $y = x^{1/3}$  on käyrän  $y = x^3$  yläpuolella. Käyrien välisen silmukan ala on
- $$A = \int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x^3) dx = \int_0^1 (\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{4} x^4) = \frac{1}{2}.$$
- 
4.  $V = \pi \int_0^a (e^x)^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_0^a e^{2x} = \frac{\pi}{2} (e^{2a} - 1)$ . Kun merkitään tilavuus yhtä suureksi kuin  $\pi$ , saadaan  $a = \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{3}$ .
5.  $N(t) = \int (125t - 3t^2) dt = 62,5t^2 - t^3 + C$ . Koska  $N(0) = 120$ , niin  $C = 120$ . Sairastuneiden määrän ilmaisee funktio  $N(t) = 62,5t^2 - t^3 + 120, t \geq 0$ .

6. Käyrä  $y^2 = x^2(9 - x^2)$  on määritelty arvoilla  $-3 \leq x \leq 3$ . Sen rajaaman alueen pinta-ala on

$$A = 4 \int_0^3 x \sqrt{9 - x^2} dx = -\frac{4}{3} \int_0^3 (9 - x^2)^{3/2} = 36.$$



7. Kone laskeutuu matkan  $s = \int_0^{300} (3 - 10^{-6}(t - 150)^3) dt = \int_0^{300} (3t - \frac{10^{-6}}{4}(t - 150)^4)$   
 $= 900$  (m). Keskimääräinen laskeutumisnopeus pystysuunnassa on siis 3 m/s.
8. Koska  $f''(x) = x^2 - 1$ , niin  $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + C_1$ . Tangentin kulmakerroin kohdassa  $x = 1$  on  $-\frac{1}{12} = f'(1)$ , josta saadaan vakion arvo  $C_1 = \frac{7}{12}$ . Silloin  $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + C_2$ . Yhtälö  $f(1) = 1$  määrää vakion arvon  $C_2 = \frac{5}{6}$ .  
 Näin on saatu  $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + \frac{5}{6}$ .
9. Poikkileikkaus on aina suorakulmio. Sen pinta-ala on  $A(h) = (3 + h)\sqrt{2h}$ . Tilavuus on näin ollen  $V = \int_0^2 (3 + h)\sqrt{2h} dh = \int_0^2 (3\sqrt{2h} + h\sqrt{2h}) dh = \int_0^2 (2\sqrt{2}h\sqrt{h} + \frac{2\sqrt{2}}{5}h^2\sqrt{h})$   
 $= \frac{56}{5} = 11,2$  (m<sup>3</sup>).



## Kertauskoe 2

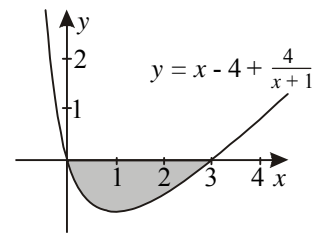
$$1. \quad \text{a)} \int \frac{x}{(x^2 + 4)^3} dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2 + 4)^{-3} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2} (x^2 + 4)^{-2} + C = -\frac{1}{4(x^2 + 4)^2} + C$$

$$\text{b)} \int_1^4 (6\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \int_1^4 (6x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) dx = \left[ 4x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = 28 - 2 = 26$$

2. Koska  $f'(x) = \frac{1}{2}x - 3$ , niin  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + C$ . Ehto  $f(0) = 2$  antaa  $C = 2$ . Käyrän yhtälö on näin ollen  $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 2$ .

3. Käyrän  $y = x - 4 + \frac{4}{x+1}$  ja  $x$ -akselin leikkauskohdiksi lasketaan  $x = 0$  ja  $x = 3$ . Niiden välillä käyrä on  $x$ -akselin alapuolella. Pinta-ala on

$$A = -\int_0^3 (x - 4 + \frac{4}{x+1}) dx = -\left[ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \ln(x+1) \right]_0^3 = 7\frac{1}{2} - 4 \ln 4 \approx 1,95.$$



4. Kysytty matka metreissä ilmaistuna on

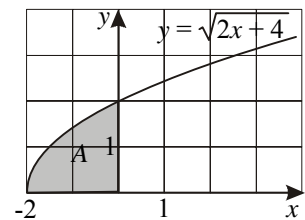
$$s(5) - s(0) = \int_0^5 v(t) dt = \int_0^5 850e^{0,5t} dt = 1700 \left[ e^{0,5t} \right]_0^5 \approx 19010 \text{ eli noin } 19 \text{ kilometriä.}$$

5. a) Käyrän ja koordinaattiakselien leikkauspisteiksi lasketaan  $(0, 2)$  ja  $(-2, 0)$ .

$$\text{b)} A = \int_{-2}^0 \sqrt{2x+4} dx = \frac{1}{3} \left[ (2x+4)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^0 = 2\frac{2}{3}$$

c) Yhtälöstä  $y = \sqrt{2x+4}$  ratkaistaan  $x = \frac{1}{2}y^2 - 2, y \geq 0$ .

$$V = \pi \int_0^2 \left( \frac{1}{2}y^2 - 2 \right)^2 dy = \pi \left[ \frac{1}{20}y^5 - \frac{2}{3}y^3 + 4y \right]_0^2 = \frac{64\pi}{15}$$



6. a) Kun tiheyden yksikkönä on kg/m, massa saadaan tiheyden ja pituuden tulona.

$$\text{Puun kokonaismassa on } m = \int_0^{24} \frac{50}{\sqrt{h+1}} dh = \left[ 100\sqrt{h+1} \right]_0^{24} = 500 - 100 = 400 \text{ (kg).}$$

b) Yhtälön  $\int_0^h \frac{50}{\sqrt{x+1}} dx = 200$  eli  $100\sqrt{h+1} - 100 = 200$  ratkaisuna  $h = 8$  (m).

$$7. \int_0^1 (1-x^2)^k x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x)(1-x^2)^k dx = -\frac{1}{2(k+1)} \left[ (1-x^2)^{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{6}$$

Tästä  $k = 2$ .

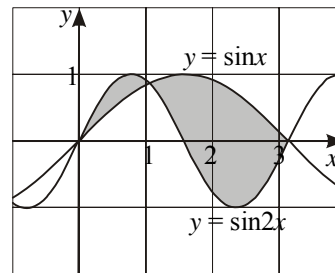
8. Käyrien  $y = \sin x$  ja  $y = \sin 2x$  leikkauskohdat välillä  $[0, \pi]$  ovat  $0$ ,  $\frac{\pi}{3}$  ja  $\pi$ .

Pienemmän silmukan ala on

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \sin x) dx = \int_0^{\pi/3} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x\right) \\ &= -\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{1}{2} \cos 0 + \cos 0\right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Suuremman silmukan ala on

$$\begin{aligned} \int_{\pi/3}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx &= \int_{\pi/3}^{\pi} \left(-\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x\right) \\ &= -\cos \pi + \frac{1}{2} \cos 2\pi - \left(-\cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3}\right) = 2\frac{1}{4}. \end{aligned}$$



9. Integroimisvälillä  $[0, 7]$  funktio  $f(x) = \sqrt{1+x^3}$  on aidosti kasvava, joten jokaisella osavälillä pienin arvo tulee välin alkupisteessä ja suurin loppupisteessä. Integroimisväli jaetaan seitsemään yhtä suureen osaan.

Alasumma on

$$s_7 = \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{9} \cdot 1 + \sqrt{28} \cdot 1 + \sqrt{65} \cdot 1 + \sqrt{126} \cdot 1 + \sqrt{217} \cdot 1 \approx 44,724.$$

Yläsumma on

$$S_7 = \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{9} \cdot 1 + \sqrt{28} \cdot 1 + \sqrt{65} \cdot 1 + \sqrt{126} \cdot 1 + \sqrt{217} \cdot 1 + \sqrt{344} \cdot 1 \approx 62,271.$$

Alasumman ja yläsumman keskiarvo yhden desimaalin tarkkuudella on 53,5.

Edellisiä tarkempi integraalin  $\int_0^7 \sqrt{1+x^3} dx$  likiarvo on 53,16142.