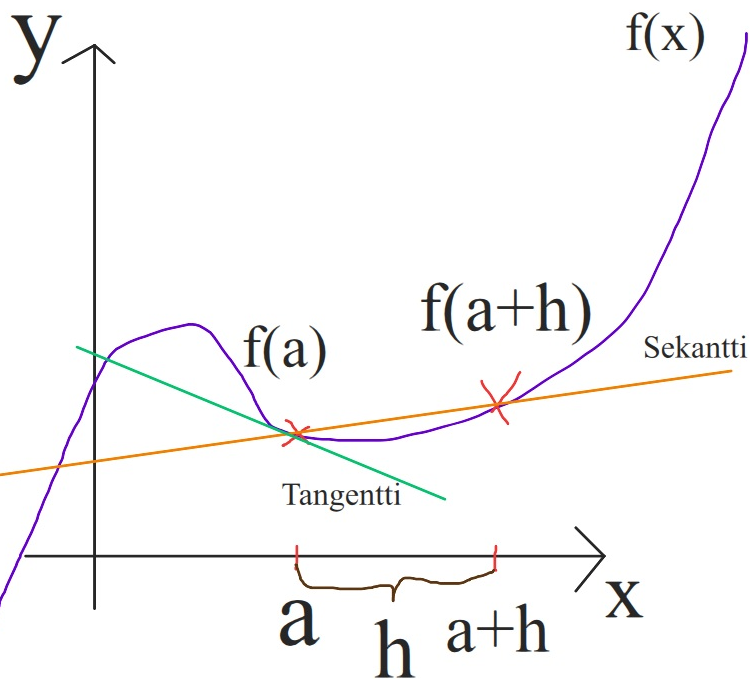


Erotusosamäärän raja-arvo

Muodostetaan jollekin funktiolle sekantin kulmakerroin



Sekantin kulmakerroin

$$k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Tätä kutsutaan erotusosamääräksi

Aletaan lyhentämään h :ta, eli sekantti lähestyy tangenttia, kun h lähestyy nollaa
-> Muodostetaan erotusosamäärän raja-arvo, joka on sama kuin tangentin kulmakerroin, eli derivaatta kohdassa a .

$$\rightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

MAFY

Esim. Määritä erotusosamäärän raja-arvon avulla funktion $f(x) = 3x^2$ derivaatta kohdassa $x=1$.
MAFY:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} . \text{ Nyt } a=1 \text{ ja } f(a)=f(1)=3 \text{ ja } f(a+h) = f(1+h) = 3 \cdot (1+h)^2$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+2h+h^2) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+6h+3h^2-3}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h+3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6+3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+3h) \rightarrow 6+3 \cdot 0 = 6$$

Esim. Määritä erotusosamäärän raja-arvon avulla funktion $f(x) = 5x + 7$ derivaatta kohdassa $x=-3$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ MAFY}$$

$$f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(-3+h) + 7 - (5(-3) + 7)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-15 + 5h + 7 + 15 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 5 = 5$$

5.8



Määritä funktion $f(x) = \frac{3}{x}$ derivaatta kohdassa -1 .

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ MAFY}$$

$$\begin{aligned}
 f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{-1+h} - \frac{3}{-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{-1+h} + \frac{3}{1}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{-1+h} + \frac{-3+3h}{-1+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3h}{-1+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(-1+h)} \\
 &\rightarrow \frac{3}{-1+0} = -3
 \end{aligned}$$