

Funktioiden keksiminen: tehtävät

Tehtävä 1 (K23/12):

12. Polynomikonstruktio 12 p.

Anna esimerkki polynomista $P(x)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

Yhtälöllä $P(x) = 1$ on täsmälleen kaksi erisuurta ratkaisua, ja yhtälöllä $P(x) = -1$ on ainakin neljä erisuurta ratkaisua.

Täysien pisteiden arvoinen ratkaisu sisältää laskut, joista voidaan nähdä, että esimerkki toteuttaa vaaditut ehdot. Graafinen perustelu tai yhtälön ratkaisukäskyn käyttö eivät yksinään riitä täysiin pisteisiin.

Tehtävä 2 (S23/11):

11. Väliarvolauseen ehdot 12 p.

Tässä tehtävässä tutkitaan, milloin välillä $[-1, 1]$ määritelty funktio f toteuttaa väliarvolause-ehdon:

$$f'(a) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \quad \text{jollakin luvulla } a \in]-1, 1[.$$

Vastaa perustellen seuraaviin osatehtäviin.

1. Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$, derivoituva avoimella välillä $] -1, 1[$ ja toteuttaa väliarvolause-ehdon. (4 p.)
2. Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$ mutta joka ei ole derivoituva avoimella välillä $] -1, 1[$ eikä toteuta väliarvolause-ehtoa. (4 p.)
3. Anna esimerkki funktiosta, joka on derivoituva avoimella välillä $] -1, 1[$ mutta joka ei ole jatkuva suljetulla välillä $[-1, 1]$ eikä toteuta väliarvolause-ehtoa. (4 p.)

Tehtävä 3 (24/9):

9. Kääntävä, muttei monotoninen 12 p.

Anna esimerkki funktiosta $f : A \rightarrow B$, jolla on käänteisfunktio, mutta joka ei ole monotoninen. Muista kertoa, mitkä ovat funktiosi määrittelyjoukko A ja arvojoukko B .