t. 450, s. 108

Lukujono $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 5a_n + 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$ on määritelty *rekursiivisesti*.

Tiedetään ensimmäinen jäsen ja sääntö, jolla seuraava saadaan aina edellisestä. (”Kerro viidellä ja lisää yksi.”)

Väite: $a_n \equiv 2 \pmod 3$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Todistus: Käytetään *induktioperiaatetta* eli todistetaan seuraavat kaksi ominaisuutta:

1. Jonon ensimmäinen jäsen a_1 toteuttaa väitteen.
2. Jos jonon jäsen a_n toteuttaa väitteen, niin tästä seuraa aina, että myös seuraava jäsen a_{n+1} toteuttaa väitteen.

Kohdista 1 ja 2 seuraa, että kaikki jonon jäsenet toteuttavat väitteen.

”Ensimmäinen domino kaatuu.”

”Jos edellinen kaatuu, niin seuraavakin aina kaatuu.”

”Johtopäätös: kaikki dominot kaatuvat.”

Kohta 1. on selvästi tosi, sillä $a_1 = 2 \equiv 2 \pmod 3$.

Kohta 2: Oletetaan, että $a_n \equiv 2 \pmod 3$.

Nyt $a_{n+1} = 5a_n + 1 \equiv 5 \cdot 2 + 1 = 11 \equiv 2 \pmod 3$.

Luvuilla a_n ja 2 on sama jakojäännös (ne kuuluvat samaan jäännösluokkaan), joten ne voidaan korvata modulolaskennassa toisillaan.

Induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu. $\square$