

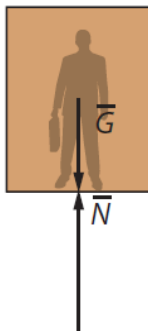
Kertaustehtävät

Tehtävien ratkaisut

1.

Monivalinta

- a) Mitkä väitteistä ovat oikein?
- Vauhti ja nopeus tarkoittavat samaa asiaa.
 - **Kun tiedämme liikkeen vauhdin ja suunnan, puhumme nopeudesta.**
 - **Keskimääräistä vauhtia liikkeen aikana sanotaan keskivauhdiksi.**
 - **Vauhti kuvaa liikettä silloin, kun liikkeen suuntaan ei kiinnitetä huomiota ja vain kuljetun matkan pituudella on merkitystä.**
- b) Kun kappaleen liike on tasaista,
- kappaleen paikan kuvaaja on vaakasuora suora
 - **kappaleen paikan kuvaaja on nouseva tai laskeva suora**
 - **kappaleen nopeuden kuvaaja on vaakasuora suora**
 - **kappale etenee vakionopeudella**
 - **kappale kulkee aina yhtä pitkät matkat samaan suuntaan samanpituisina aikaväleinä**
 - kappaleen paikan kuvaajasta saadaan kappaleen tiettynä aikana kulkema matka graafisella integroinnilla
 - **kappaleen nopeuden kuvaajasta saadaan kappaleen tiettynä aikana kulkema matka graafisella integroinnilla.**
- c) Kalle seisoo hississä. $\vec{G}$ on Kalleen kohdistuva paino, $\vec{N}$ hissien lattian Kalleen kohdistama tukivoima.



Hissi

- liikkuu vakionopeudella alas
 - on paikallaan viidennessä kerroksessa
 - **on laskeutumassa alas ja jarruttaa ennen pysähtymistä**
 - lähtee viidennessä kerroksesta alas
 - **on juuri lähtenyt nousemaan ylös**
 - pysähtyy ylimpään kerrokseen.
- d) Kokonaisvoiman
- **suuruudesta voi päätellä, onko kappale paikallaan**
 - suunta on aina sama kuin liikkeen suunta
 - **suuruus on aina nolla, kun kappale on tasaisessa liikkeessä**
 - **suuruus eroaa nolasta, kun kappaleen nopeus kasvaa**
 - suuruus on nolla, kun kappaleen nopeus pienenee.

Kertaustehtävät

- e) Kappaleeseen vaikuttavan kokonaisvoiman tekemä työ
- on aina positiivinen
 - **on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian muutos**
 - **voi vaikuttaa kappaleen nopeuteen**
 - **voi olla negatiivinen**
 - **voi muuttaa kappaleen liike-energiaa**
 - **on kaikkien kappaleeseen kohdistuvien voimien tekemien töiden summa.**
- f) Jos kappale on vaakasuoralla alustalla paikallaan,
- **paino ja pinnan tukivoima ovat yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset**
 - paino ja tukivoima tekevät työtä
 - lepokitka tekee työtä, jotta kappale pysyisi paikallaan
 - **mikään siihen vaikuttava voima ei tee työtä.**
- g) Ansan massa on 48 kg. Kun Ansa seisoo hississä vaa'an päällä, se näyttää lukemaa 51 kg. Tällöin hissi
- **liikkuu alas ja on pysähtymässä ensimmäiseen kerrokseen**
 - liikkuu ylös ja on pysähtymässä ylimpään kerrokseen
 - **on juuri lähtenyt ylös**
 - on juuri lähtenyt alas.
- h) Paino
- ilmaisee kappaleen ominaisuutta, joka ilmenee kappaleen taipumuksena vastustaa liikkeensä muuttumista
 - on yksi kappaleen ominaisuuksista
 - ilmaisee kappaleen ominaisuutta, joka ilmenee kykynä aiheuttaa ja kokea gravitaatiovuorovaikutus
 - **on gravitaatiovuorovaikutuksen aiheuttama voima**
 - ilmenee kappaleen taipumuksena vastustaa liikkeensä muuttumista.
- i) Gravitaatiovuorovaikutuksen potentiaalienergiaa hyödynnetään, kun energiaa tuotetaan
- tuulivoimalaitoksessa
 - **vesivoimalaitoksessa**
 - **vuorovesivoimalaitoksessa**
 - ydinvoimalaitoksessa
 - aurinkopaneelien avulla.
- j) Liikemäärä
- on kappaleen massan ja kappaleeseen vaikuttavat voiman tulo
 - **määritellään kappaleen massa ja nopeuden tulona**
 - on skalaarisuure, eli sillä ei ole suuntaa
 - **on vektorisuure ja sen suunta on sama kuin kappaleen nopeuden suunta.**
 - **riippuu kappaleen massasta.**

Kertaustehtävät

2.

a) Oikein on kohta iii).

$$\text{Kiihtyvyys on } a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{18 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 72 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{15 \text{ s}} = -1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Kolmessa sekunnissa kuljettu matka on

3

Kahdessa sekunnissa kuljettu matka saadaan vastaavalla tavalla,

$$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,0 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (-1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot (2,0 \text{ s})^2 = 38 \text{ m}.$$

Kolmannen sekunnin aikana kuljettu matka on $s = s_3 - s_2 = 55,5 \text{ m} - 38 \text{ m} = 17,5 \text{ m} \approx 18 \text{ m}$.

b)

i. Moottoripyörän loppunopeus 8,0 sekunnin kuluttua on $v = at = 3,0 \text{ m/s}^2 \cdot 8,0 \text{ s} = 24 \text{ m/s}$.

ii. Keskinopeus on $v_k = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{0 \text{ m/s} + 24 \text{ m/s}}{2} = 12 \text{ m/s}$.

iii. Kahdeksassa sekunnissa kulkema matka on $s = v_k t = 12 \text{ m/s} \cdot 8,0 \text{ s} = 96 \text{ m}$.

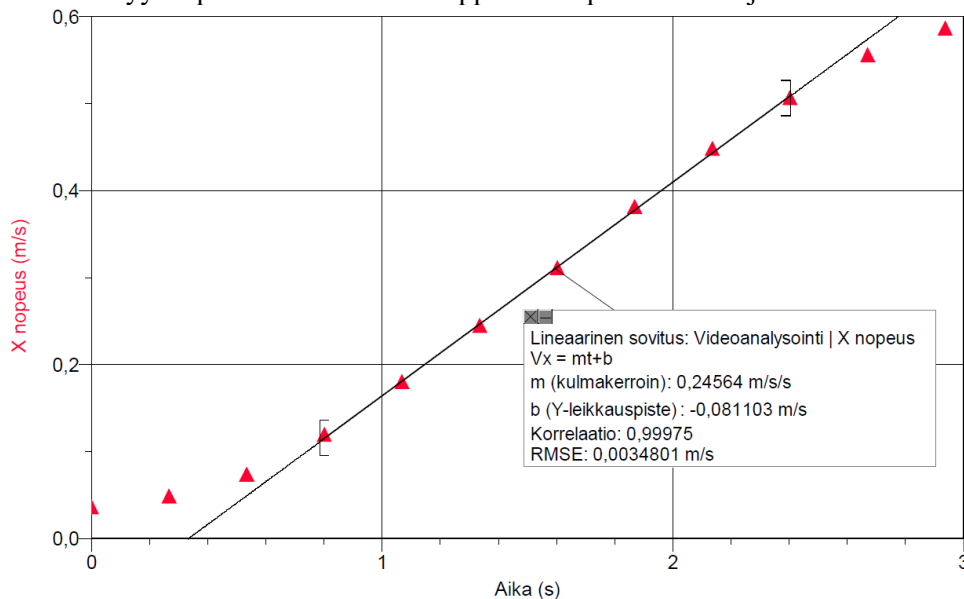
(Toinen tapa: $s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,0 \text{ m/s}^2 \cdot (8,0 \text{ s})^2 = 96 \text{ m}$.)

3.

Vastaavuudet: a5, b4, c7, d1, e2, f6

4.

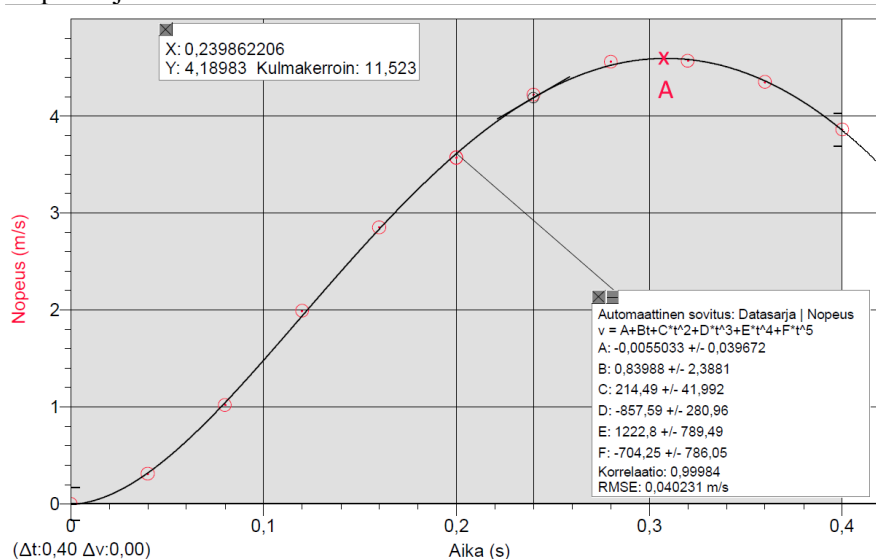
Videoanalyysin perusteella saadaan kappaleen nopeuden kuvaaja.



Kappaleen nopeuden kuvaaja on likimain suora kuvaajan aikavälillä 0,7... 2,5 s, joten kappaleen liike on tasaisesti kiihtyvää ko. välillä. Videoanalyysissä virhettä aiheuttaa vaunun paikan arvioiminen varsinkin liikkeen alussa ja lopussa kameran kuvakulmasta johtuen, joten vastauksessa voi ilmetä pieni poikkeamia.

5.

a) Nopeus ajan funktiona.



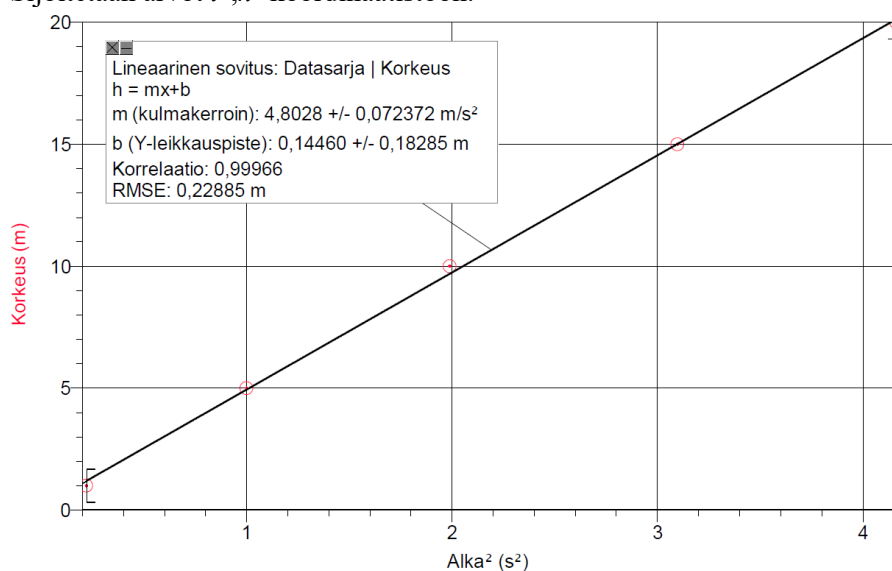
b) Ratanopeus on suurin pisteessä A.

c) Asetetaan kuvaajalle tangentti kohtaan 0,24 s. Sammakon kiihtyvyys hetkellä 0,24 s on tämän tangentin fysikaalinen kulmakerroin. Mittausohjelman mukaan sammakon kiihtyvyys on $11,523 \text{ m/s}^2 \approx 12 \text{ m/s}^2$.

6.

a) Lasketaan taulukkoon t^2 -arvot.

h (m)	1,00	5,00	10,0	15,0	20,0
t (s)	0,47	1,00	1,41	1,76	2,04
t^2 (s ²)	0,2209	1,0000	1,9881	3,0976	4,1616

Sijoitetaan arvot t^2, h -koordinaatistoon.

Kertaustehtävät

- b) Kuula on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jolloin putoamismatka on $h = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. Kuula lähtee levosta eli $v_0 = 0$, joten mittaustuloksiin sovitettun kuvaajasuoran yhtälö on $h = \frac{1}{2} a t^2$ ja kulmakerroin $\frac{1}{2} a$. Sovitetun suoran fysikaalinen kulmakerroin on $4,8028 \text{ m/s}^2$.
Saadaan yhtälö $\frac{1}{2} a = 4,8028 \text{ m/s}^2$, josta kiihtyvyys on $a = 2 \cdot 4,8028 \text{ m/s}^2 \approx 9,6 \text{ m/s}^2$.

7.

$$s = 150 \text{ km}, v_1 = 120 \text{ km/h}, v_2 = 82 \text{ km/h}$$

Auton keskivauhti on $v = \frac{s}{t}$, jossa s on auton kulkema kokonaismatka ja t matkaan kulunut aika.

$$\text{Menomatkaan kulunut aika on } t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{75 \text{ km}}{120 \text{ km/h}} = 0,625 \text{ h ja}$$

$$\text{paluumatkaan kulunut aika on } t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{75 \text{ km}}{82 \text{ km/h}} \approx 0,915 \text{ h.}$$

$$\text{Matkaan kulunut kokonaisaika on } t = t_1 + t_2 = 0,625 \text{ h} + 0,915 \text{ h} = 1,540 \text{ h.}$$

$$\text{Näin ollen keskivauhti } 150 \text{ km:n matkalla on } v = \frac{s}{t} = \frac{150 \text{ km}}{1,540 \text{ h}} \approx 97 \text{ km/h.}$$

8.

$$t = 10,16 \text{ s}$$

Kiveen kohdistuva ilmanvastus voidaan olettaa vähäiseksi. Oletetaan, että kaivoskuilun pohjalla ilman lämpötila on myös $20,0 \text{ }^\circ\text{C}$. Kokonaisaika $t = 10,16 \text{ s}$ muodostuu kiven putoamisajasta t_1 ja äänen ylöstuloon kuluva ajasta t_2 . Merkitään veden pinnan etäisyyttä kiven lähtökohdasta x :llä.

$$\text{Kiven pudotus: } x = \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$\text{Äänen kulkema matka: } x = v t_2 = v(t - t_1).$$

$$\text{Saadaan yhtälö } \frac{1}{2} g t_1^2 = v(t - t_1) \text{ eli } \frac{1}{2} g t_1^2 + v t_1 - v t = 0.$$

Ratkaistaan yhtälöstä t_1 :

$$t_1 = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot (-v t)}}{2 \cdot \frac{1}{2} g} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 2 g v t}}{g}$$

$$= \frac{-343 \text{ m/s} \pm \sqrt{(343 \text{ m/s})^2 + 2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 343 \text{ m/s} \cdot 10,16 \text{ s}}}{9,81 \text{ m/s}^2}.$$

Vain positiivinen ratkaisu hyväksytään: putoamisaika on $t_1 = 9,00133 \text{ s}$.

Äänen nopeus lämpötilassa $20,0 \text{ }^\circ\text{C} = 293,15 \text{ K}$ on

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 331,4 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{293,15 \text{ K}}{273,15 \text{ K}}} = 343,318 \text{ m/s.}$$

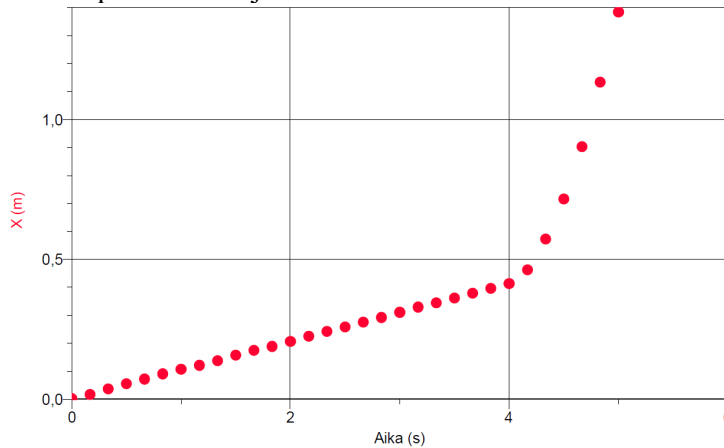
Äänen ylöstuloon kuluva aika on $t_2 = t - t_1 = 10,16 \text{ s} - 9,00133 \text{ s} = 1,15867 \text{ s}$, joten veden pinta on syvyydellä $x = v_2 t_2 = 343,318 \text{ m/s} \cdot 1,15867 \approx 398 \text{ m}$.

9.

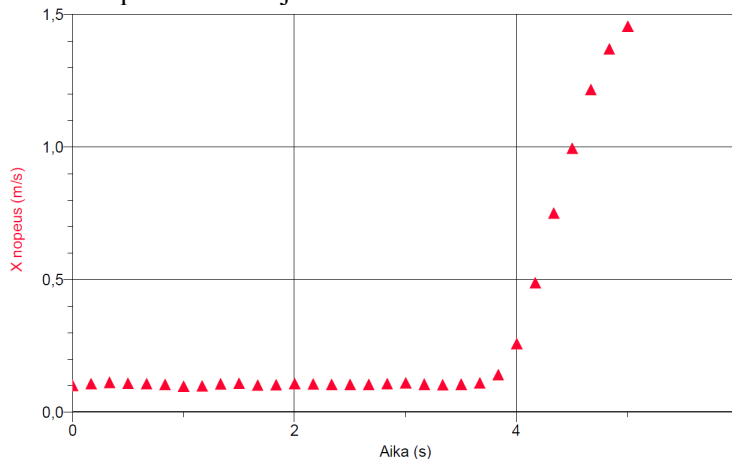
Auton paikan kuvaajasta voi päätellä, että auton etenee aluksi vakionopeudella 0...40 cm, kunnes likimäärin paikassa 40 cm auton liike muuttuu kiihtyväksi.

(Auton paikan kuvaajasta voi päätellä, että auton etenee aluksi vakionopeudella ajanhetkeen 3,8 s saakka, kunnes sen jälkeen auton liike muuttuu kiihtyväksi. *Huomaa, että ajanhetki riippuu siitä, miten origo on asetettu mittausohjelmaan.*)

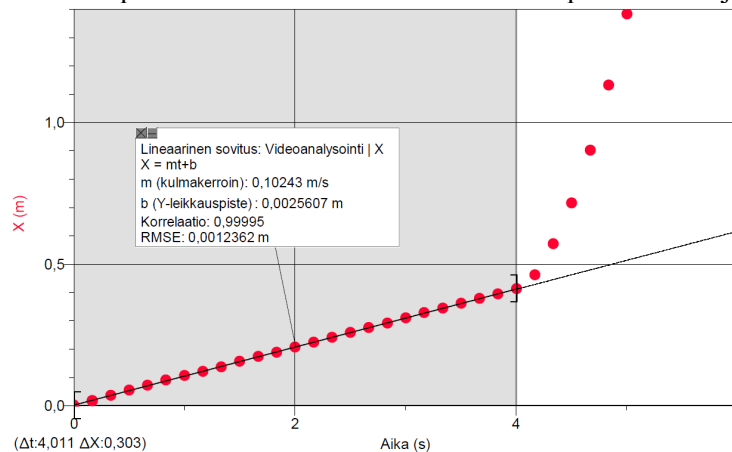
Autoon paikan kuvaaja.



Auton nopeuden kuvaaja.

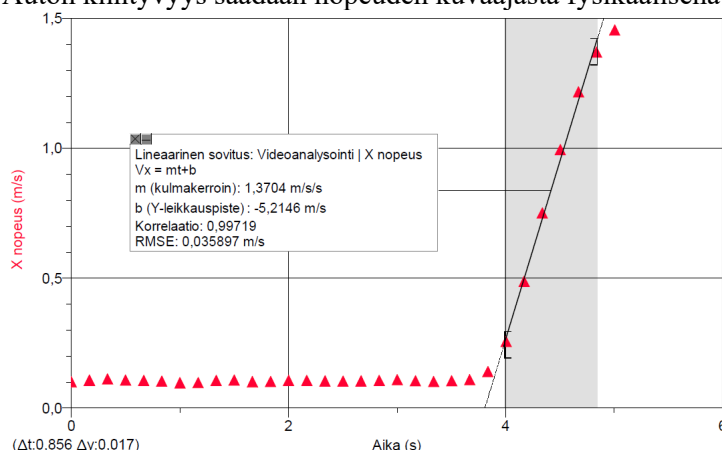


Auton nopeus tasaisen liikkeen aikana saadaan paikan kuvaajasta fysikaalisena kulmakertoimena.



Auto etenee vakionopeudella 0,1 m/s 3,8 sekunnin ajan.

Auton kiihtyvyys saadaan nopeuden kuvaajasta fysikaalisena kulmakertoimenä.



Auton (keski)kiihtyvyys kiihtyvän liikkeen aikana on noin $1,4 \text{ m/s}^2$.

Huomaa, että ratkaisun numeroarvot voivat hieman vaihdella valituista sovituksista johtuen.

10.

- a) Pallo vierii kuviossa (ii).

$\vec{F}_1$ on palloon kohdistuva paino,

$\vec{F}_3$ on pallon ja pinnan välinen kitkavoima ja

$\vec{F}_4$ on pinnan tukivoima.

- b) Pallo on heittoliikkeessä kuviossa (i).

$\vec{F}_1$ on palloon kohdistuva paino ja

$\vec{F}_2$ on ilmanvastus, joka on vastakkaissuuntainen pallon nopeudelle.

- c) Pallo riippuu langan varassa kuviossa (iii).

$\vec{F}_1$ on palloon kohdistuva paino ja

$\vec{F}_5$ on langan palloon kohdistama voima.

Palloon kohdistuvat voimat ovat yhtä suuret ja vastakkaissuuntaiset, joten Newtonin II lain mukaan pallo on paikallaan.

11.

Junan nopeus on $v = \frac{s}{t} = \frac{210 \text{ km}}{3,0 \text{ h}} = 70 \text{ km/h}$.

Tehon yhtälöstä $P = Fv$ junan kulkua vastustava keskimääräinen voima on

$$F = \frac{P}{v} = \frac{750 \text{ kW}}{\frac{70}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 39 \text{ kN}.$$

12.

- a) Väärin. Kirjaan vaikuttavat voimat ovat paino ja pöydän pinnan tukivoima.

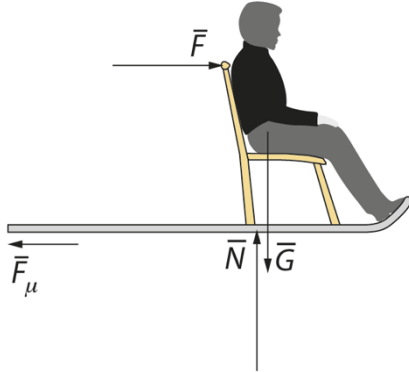
- b) Oikein. Avaruusalus jatkaa matkaansa suoraviivaisesti jatkavuuden lain mukaisesti.

- c) Väärin. Kun kappaleet törmäävät, molempiin kappaleisiin kohdistuvat voimat ovat yhtä suuret mutta vastakkaissuuntaiset voiman ja vastavoiman lain mukaisesti.

13.

$$s = 2,5 \text{ m}, F = 140 \text{ N}, m = 65 \text{ kg}, \mu = 0,036, g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

- a) Potkukelkkaan vaikuttavat voimat ovat työntövoima $\vec{F}$ jään tukivoima $\vec{N}$, kitkavoima $\vec{F}_\mu$ ja paino $\vec{G}$. Oletetaan ilmanvastus pieneksi.



Potkukelkan liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kelkkaan kohdistuvan kokonaisvoiman tekemä työ. Työ-energiaperiaatteen mukaan on $W_{\text{työntö}} - W_\mu = \Delta E_{\text{kin}}$ eli $Fs - F_\mu s = \frac{1}{2}mv^2$.

Potkukelkan nopeudeksi saadaan

$$v = \sqrt{\frac{2(Fs - F_\mu s)}{m}} = \sqrt{\frac{2s(F - \mu mg)}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5 \text{ m} \cdot (140 \text{ N} - 0,036 \cdot 65 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2)}{65 \text{ kg}}} \approx 3,0 \text{ m/s}.$$

työntövoiman suuntaan.

- b) Kelkka pysähtyy, kun kitkavoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kelkan liike-energia alussa. Siten työ-energiaperiaatteen mukaan on $E_{\text{kin}} - W_\mu = 0$ eli $\frac{1}{2}mv^2 - F_\mu s_\mu = 0$.

Kelkan liukumaksi matkaksi saadaan

$$s_\mu = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{(3,00 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0,036 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \approx 13 \text{ m}.$$

- c) Kitkavoiman tekemä työ on

$$W = -F_\mu s_{\text{kok}} = \mu m g s_{\text{kok}}$$

$$= -0,036 \cdot 65 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (2,5 \text{ m} + 12,75 \text{ m}) \approx -350 \text{ J}.$$

Työ on 350 J ja suunta kelkan liikkeelle vastakkainen.

14.

$$m_1 = 86,5 \text{ kg}, g_{\text{näpa}} = 9,83 \text{ m/s}^2, g_{\text{ekvaattori}} = 9,78 \text{ m/s}^2$$

Vaaka mittaa Tatuun vaakaan kohdistamaa voimaa, joka on yhtä suuri kuin Tatuun kohdistuva paino. Vaaka on kalibroitu siten, että se näyttää pohjoisnavalla Tatuun massan. Tatu kohdistaa siis vaakaan pohjoisnavalla voiman

$$G = m g_{\text{näpa}} = 86,5 \text{ kg} \cdot 9,83 \text{ m/s}^2 = 850,295 \text{ N}.$$

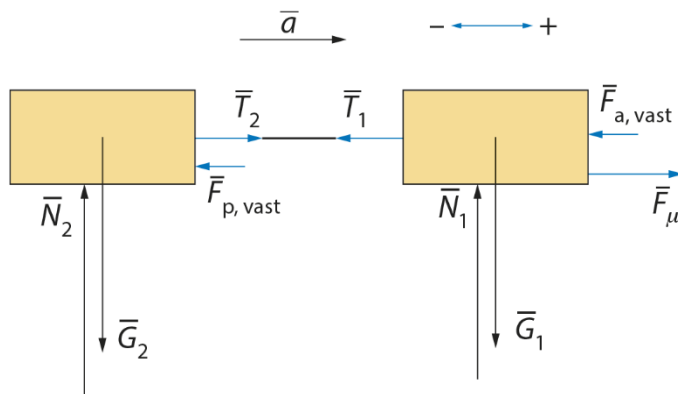
Jotta Tatu kohdistaisi vaakaan saman voiman päiväntasaajalla, Tatuun massan tulee olla

$$m_2 = \frac{G}{g_{\text{ekvaattori}}} = \frac{850,295 \text{ N}}{9,78 \text{ m/s}^2} = 86,9422 \text{ kg}.$$

Tatu tulisi saada lisää massaa $m_2 - m_1 = 86,9422 \text{ kg} - 86,5 \text{ kg} \approx 0,4 \text{ kg}$.

15.

$m_1 = 1450 \text{ kg}$, $m_2 = 370 \text{ kg}$, $F_\mu = 5,7 \text{ kN}$, $F_{a,vast} = 1,7 \text{ kN}$, $a = 1,7 \text{ m/s}^2$
 Piirretään voimakuvio.



Newtonin II lain mukaan on

autolle $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_\mu + \vec{F}_{a,vast} + \vec{T}_1 + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 = m_1 \vec{a}_1$ ja

perävaunulle $\Sigma \vec{F} = \vec{T}_2 + \vec{F}_{p,vast} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 = m_2 \vec{a}_2$

Koska vetokoukku on yhtä kappaletta, vetokoukkuun kohdistuvat voimat ovat yhtä suuret eli

$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$. Koska auto ja perävaunu liikkuvat yhdessä, kummankin kiihtyvyyden suuruus on yhtä suuri eli $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$. Kappaleita voidaan tarkastella erillisinä systeemeinä.

Koska liike tapahtuu vaakasuunnassa, pystysuuntaa ei tarvitse tarkastella.

Kun suunta oikealle on positiivinen, auton skalaariyhtälö on $F_\mu - F_{a,vast} - T = m_1 a$, josta

$$T = F_\mu - F_{a,vast} - m_1 a.$$

Perävaunun skalaariyhtälö on $T - F_{p,vast} = m_2 a$.

Sijoitetaan auton skalaariyhtälö $T = F_\mu - F_{a,vast} - m_1 a$ perävaunun skalaariyhtälöön $T - F_{p,vast} = m_2 a$, jolloin saadaan

$$F_\mu - F_{a,vast} - m_1 a - F_{p,vast} = m_2 a.$$

Perävaunuun kohdistuvan liikevastusvoiman suuruus

$$F_{p,vast} = F_\mu - F_{a,vast} - m_1 a - m_2 a = 5,7 \text{ kN} - 1,7 \text{ kN} - 1450 \text{ kg} \cdot 1,7 \text{ m/s}^2 - 370 \text{ kg} \cdot 1,7 \text{ m/s}^2 = 906 \text{ N} \approx 910 \text{ N}.$$

b) Vetokoukkuun kohdistuva voiman suuruus

$$T = F_{p,vast} + m_2 a = 906 \text{ N} + 370 \text{ kg} \cdot 1,7 \text{ m/s}^2 \approx 1,5 \text{ kN}.$$

16.

Vedessä alumiinipalaan kohdistuvan nosteen suuruus on $N = 1,02 \text{ N} - 0,63 \text{ N} = 0,39 \text{ N}$.

Nosteen yhtälöstä $N = \rho V g$ syrjäytetyn vesimäärän ja samalla alumiinipalan tilavuus on

$$V = \frac{N}{\rho g} = \frac{0,39 \text{ N}}{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \approx 3,97554 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3.$$

Noste bensiinissä on $1,02 \text{ N} - 0,75 \text{ N} = 0,27 \text{ N}$.

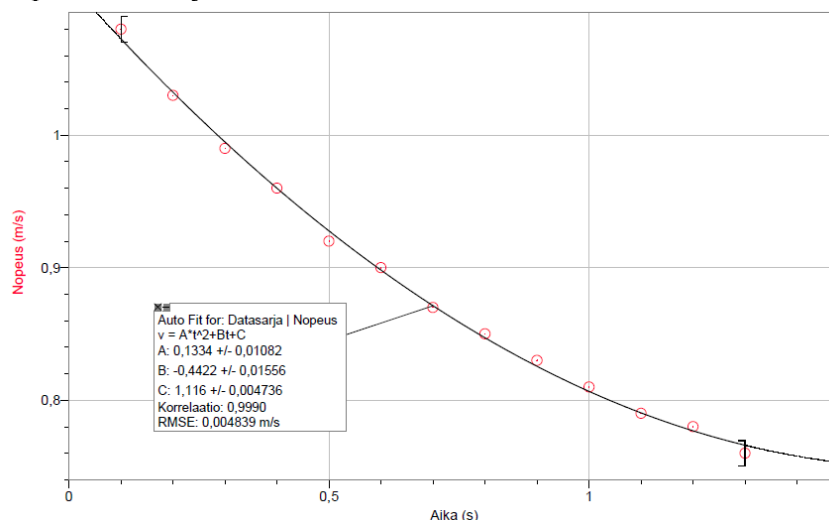
Nosteen yhtälöstä $N = \rho V g$ bensiinin tiheys on

$$\rho = \frac{N}{V g} = \frac{0,27 \text{ N}}{3,97554 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \approx 690 \text{ kg/m}^3.$$

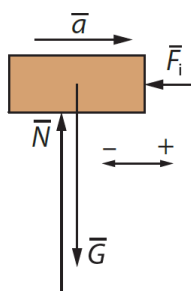
17.

a) $m = 290 \text{ g}$

Nopeuden kuvaaja:



- b) Kuvaaja ei ole lineaarinen, koska ilmanvastuksen suuruus on verrannollinen nopeuden neliöön ($F \sim v^2$) ja ilmanvastus samoin kuin vaunun hidastuvuus pienenee nopeuden pienentyessä.
- c) Piirretään tilanteesta voimakuvio.

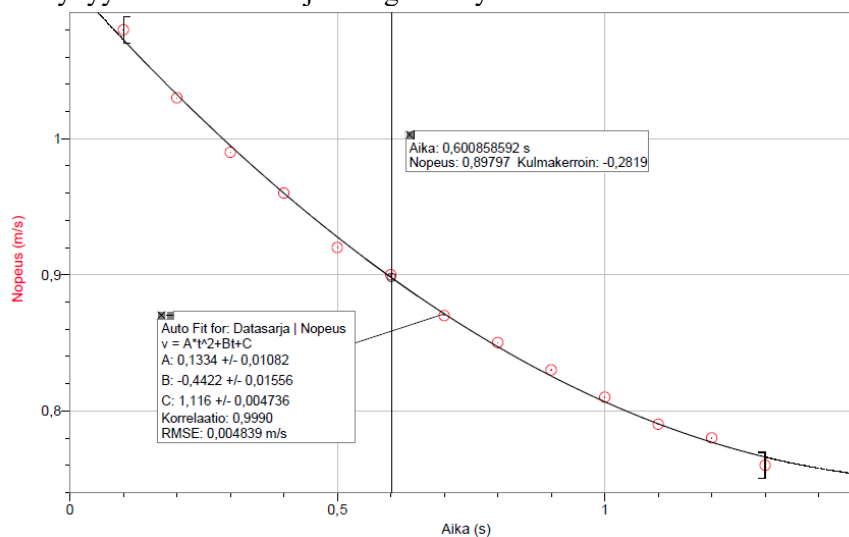


Vaunulla ei ole pystysuuntaista kiihtyvyyttä, joten pystysuunnassa vastakkaisiin suuntiin vaikuttavat ilmatyynyradan tukivoima ja vaunuun kohdistuva paino kumoavat toistensa vaikutuksen.

Tarkastellaan tilannetta vaakasuunnassa. Ilmatyynyradalla liikkuvaan kappaleeseen vaikuttava kitkavoima on likimain 0 N, joten vaunun kiihtyvyyden voidaan ajatella aiheutuvan pelkästään ilmanvastuksesta $\vec{F}_i$.

Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ eli $\Sigma \vec{F}_i = m\vec{a}$. Valitaan suunta oikealle positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö $-F_i = ma$, josta $F_i = -ma$.

Kiihtyvyys saadaan kuvaajan tangentin fysikaalisena kulmakertoimen kohdassa $t = 0,6$ s:



Kiihtyvyys hetkellä $t = 0,6$ s on $-0,2819 \text{ m/s}^2$. Negatiivinen etumerkki kertoo, että liike on hidastuvaa (eli kiihtyvyys on liikkeen suunnalle vastakkainen).

Ilmanvastuksen suuruus on $F_i = -ma = -0,29 \text{ kg} \cdot (-0,2819 \text{ m/s}^2) \approx 0,08 \text{ N}$.

Ilmanvastuksen suuruus on $0,08 \text{ N}$ ja suunta vaunun liikkeen suunnalle vastakkainen.

Tai ilman Newtonia ja liikeyhtälöä

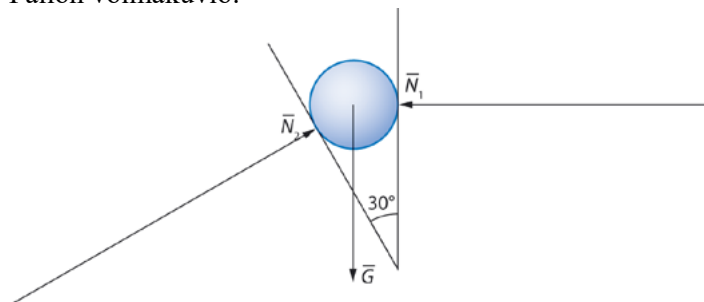
Mittausohjelman mukaan vaunun kiihtyvyys hetkellä $t = 0,6$ s on $\approx 0,2819 \text{ m/s}^2$. Negatiivinen etumerkki johtuu siitä, että kappaleen liike on hidastuvaa eli kiihtyvyyden suunta on päinvastainen kuin liikkeen suunta.

Ilmanvastuksen suuruus on

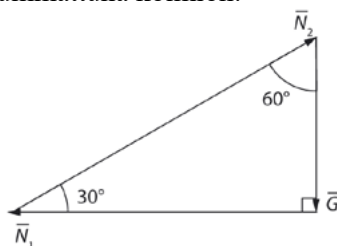
$$F_i = ma = 0,290 \text{ kg} \cdot 0,2819 \text{ m/s}^2 \approx 0,08 \text{ N}.$$

18.

Pallon voimakuvio:



Pallo on tasapainossa, joten ehto $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ on voimassa. Palloon kohdistuvat voimat muodostavat summattuna kolmion:



Kolmio on suorakulmainen, joten

$$\tan 60^\circ = \frac{N_1}{G}, \text{ josta voiman } \bar{N}_1 \text{ suuruus on}$$

$$N_1 = mg \cdot \tan 60^\circ = 4,7 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \tan 60^\circ \approx 80 \text{ N ja}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{G}{N_2}, \text{ josta voiman } \bar{N}_2 \text{ suuruus on}$$

$$N_2 = \frac{G}{\cos 60^\circ} = \frac{mg}{\cos 60^\circ} = \frac{4,7 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{\cos 60^\circ} \approx 90 \text{ N}.$$

19.

$$m_1 = 89 \text{ tn} = 89\,000 \text{ kg}, m_2 = 1800 \text{ tn} = 1800\,000 \text{ kg}, \mu = 0,15, v = 65 \text{ km/h}$$

Veturin liikettä jarruttavan kitkavoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin junan liike-energian muutos eli $F_\mu s = \Delta E_k$.

Koska kitkan suunta on liikkeelle vastakkainen ja koska juna lopuksi pysähtyy, saadaan yhtälö

$$-F_\mu s = -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2, \text{ jossa } F_\mu = \mu N = \mu m_1 g.$$

Jarrutusmatkaksi saadaan

$$s = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\mu m_1 g} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (89\,000 \text{ kg} + 1800\,000 \text{ kg}) \cdot \left(\frac{65}{3,6} \text{ m/s}\right)^2}{0,15 \cdot 89\,000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \approx 2,4 \text{ km}.$$

20.

$$m = 4,0 \text{ kg}$$

- a) Työ saadaan kuvasta graafisella integroinnilla eli kuvaajan ja x -akselin välissä olevan alueen fysikaalisena pinta-alana.

Kun kappale liikkuu kohdasta $x = 0,0$ kohtaan $x = 3,0$ m, voima tekee työn

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1,0 \text{ m} \cdot 4,0 \text{ N} + 2,0 \text{ m} \cdot 4,0 \text{ N} = 10 \text{ J}.$$

- b) Kun kappale liikkuu kohdasta $x = 3,0$ m kohtaan $x = 6,0$ m, voima tekee työn

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1,0 \text{ m} \cdot 4,0 \text{ N} + \frac{1}{2} \cdot 1,0 \text{ m} \cdot (-4,0 \text{ N}) + 1,0 \text{ m} \cdot (-4,0 \text{ N}) = -4,0 \text{ J}.$$

- c) Työ-energiaperiaatteen mukaan kappaleen liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman tekemä työ. Koska kappaleen nopeus on alussa nolla, saadaan yhtälö

$$W = \Delta E_k = E_{k,l} - E_{k,a} = \frac{1}{2}mv_l^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_l^2,$$

josta ratkaistaan nopeus lopussa:

$$v_l = \sqrt{\frac{2W}{m}}.$$

Kun kappale siirtyy kohdasta $x = 0,0$ kohtaan $x = 3,0$ m, voima tekee tehtävän a-kohdan työn 7,5 J, joten kappaleen liike-energia pisteessä $x = 3,0$ m on 10 J ja nopeus

$$v_l = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ J}}{4,0 \text{ kg}}} = 2,2 \text{ m/s}.$$

- d) Kun kappale siirtyy kohdasta $x = 0,0$ kohtaan $x = 6,0$ m, voima tekee tehtävän a- ja b-kohtien mukaan työn $10 \text{ J} + (-4,0 \text{ J}) = 6,0 \text{ J}$, joten kappaleen liike-energia pisteessä $x = 6,0$ m on 6,0 J ja nopeus

Kertaustehtävät

$$v_1 = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,0 \text{ J}}{4,0 \text{ kg}}} \approx 1,7 \text{ m/s}.$$

21.

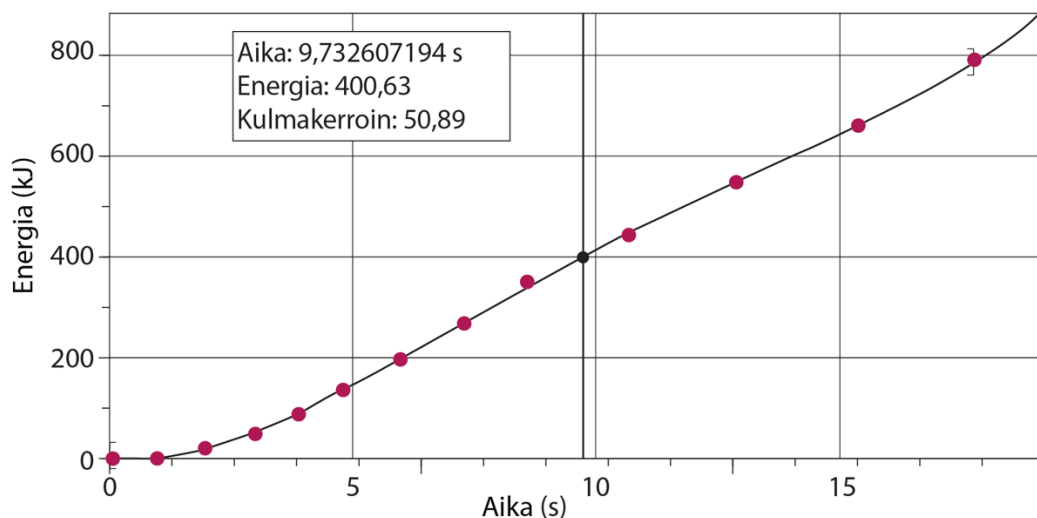
$$m = 1420 \text{ kg}, P_{\max} = 77 \text{ kW}$$

- a) Autoon kohdistuva kokonaisvoima tekee työtä, jolloin työ on työperiaatteen mukaan yhtä suuri kuin liike-energian muutos: $W = \Delta E_k$. Kokonaisvoiman teho on $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E_k}{\Delta t}$. Teho saadaan $E_k(t)$ -kuvaajan fysikaalisesta kulmakertoimesta.

Lasketaan annetun kuvaajan avulla liike-energian arvoja eri ajan hetkinä yhtälöstä $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.

Esimerkiksi kun $t = 7,3 \text{ s}$, liike-energia on $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1420 \text{ kg} \cdot \left(\frac{70}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 268,4 \text{ kJ}$.

$t \text{ (s)}$	$v \text{ (km/h)}$	$E_k \text{ (kJ)}$
0,0	0,0	0,0
1,0	10	5,47
2,0	20	21,91
3,0	30	49,31
3,9	40	87,65
4,8	50	137,0
6,0	60	197,2
7,3	70	268,4
8,6	80	350,6
10,7	90	443,8
12,9	100	547,8
15,4	110	662,9
17,8	120	788,9



Auton teho saadaan kuvaajan sovitetun tangentin kulmakertoimena; teho on $P = 50,89 \text{ kJ/s} \approx 51 \text{ kW}$.

- b) Testin perusteella auton teho on pienempi kuin ilmoitettu teho. Ilmoitettu teho on tehtaan mittaama moottorin teho, jolloin liikkeessä olevaan autoon kohdistuvien vastusvoimien aiheuttamat tehohäviöt eivät ilmene tehtaan tekemässä mittauksessa.

Kertaustehtävät

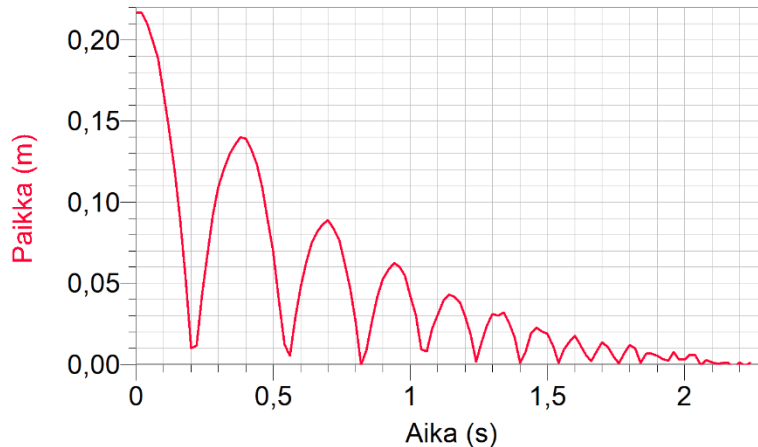
Auton kiihtyvyyttä tutkittaessa tehoon vaikuttaa esimerkiksi seuraavat seikat:

1. Ilmanvastuksen merkitys kasvaa, kun auton nopeus kasvaa.
2. Pyörien vierimisvastus aiheuttaa tehohäviöitä.
3. Voimansiirrossa osien välillä on kitkaa.
4. Renkaat saattavat luistaa varsinkin liikkeelle lähtiessä.
5. Moottorin teho muuttuu kierrosluvun muuttuessa.

22.

a) $m = 297 \text{ g} = 0,297 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Paikan kuvaajasta nähdään, että pallon pudotuskorkeus on $h = 0,216 \text{ m}$.

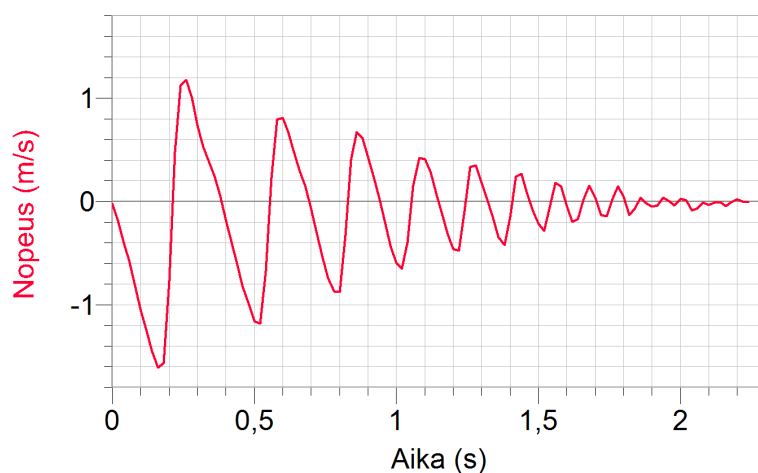


Asetetaan potentiaalienergian nollassa se, jolla pallo osuu lattiaan. Tällöin pallon potentiaalienergia pudotuskorkeudella on

$$E_p = mgh = 0,297 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,216 \text{ m} \approx 629 \text{ mJ}.$$

b) $m = 0,297 \text{ kg}$

Nopeuden kuvaajasta nähdään, että pallon nopeus kasvaa ensimmäisessä pudotuksessa arvoon $v = -1,60 \text{ m/s}$.



Kuvaajan suuntasopimuksen nojalla suunta on alaspäin. Pallon liike-energia on suurimmillaan

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,297 \text{ kg} \cdot (-1,60 \text{ m/s})^2 = 0,380160 \text{ J} \approx 380 \text{ mJ}.$$

Kertaustehtävät

- c) Pallon mekaaninen energia on suurimmillaan juuri ennen ensimmäistä pudotusta, kun vastusvoimat eivät ole vielä tehneet työtä. Tuolloin kaikki mekaaninen energia on potentiaalienergiaa, jolloin sen määrä on kohdan a mukaisesti 629 mJ.
- d) Energiaperiaatteen mukaan on $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$. Koska törmäys alkaa ja päättyy samalla korkeudella on $E_{p,a} = E_{p,l}$ ja termi voidaan vähentää suureyhtälön molemmilta puolilta, jolloin saadaan $E_{k,a} + W = E_{k,l}$. Tästä vastusvoimien tekemäksi työksi saadaan $W = E_{k,l} - E_{k,a}$.

Liike-energia juuri ennen törmäystä laskettiin kohdassa b, $E_{k,a} = 0,380160 \text{ J} \approx 380 \text{ mJ}$.

Kuvaajasta nähdään, että nopeus törmäyksen jälkeen on $v = 1,15 \text{ m/s}$, jolloin liike-energiaksi juuri törmäyksen jälkeen saadaan

$$E_{k,l} = \frac{1}{2}mv_l^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,297 \text{ kg} \cdot (1,20 \text{ m/s})^2 = 0,213840 \text{ J} \approx 214 \text{ mJ}.$$

Vastusvoimien tekemäksi työksi saadaan

$$W = E_{k,l} - E_{k,a} = 0,213840 \text{ J} - 0,380160 \text{ J} = -0,166230 \text{ J} \approx -166 \text{ mJ}.$$

Pallo siis menettää törmäyksessä 166 mJ mekaanisesta energiastaan.

23.

$$v_a = 1,5 \text{ m/s}, h_a = 5,0 \text{ m}, m = 25 \text{ kg}$$

- a) Liikevastukset ovat vähäisiä, joten mekaaninen energia mäen päällä on yhtä suuri kuin missä tahansa kohdassa mäkeä: $E_{p,a} + E_{k,a} = E_{p,l} + E_{k,l}$ eli

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 = mgh_l + \frac{1}{2}mv_l^2.$$

Valitaan potentiaalienergian nollassoksi Tiinan asema alemmalla tasolla, joten $h_l = 0 \text{ m}$. Yhtälöstä

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_l^2$$

saadaan loppunopeudeksi 5,0 m lähtöpaikkaa alempana

$$v_l = \sqrt{2gh_a + v_a^2} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 5,0 \text{ m} + (1,5 \text{ m/s})^2} = 10,0175 \text{ m/s} \approx 10 \text{ m/s} \text{ (36 km/h)}.$$

Huomaa, että tulos ei riipu Tiinan massasta.

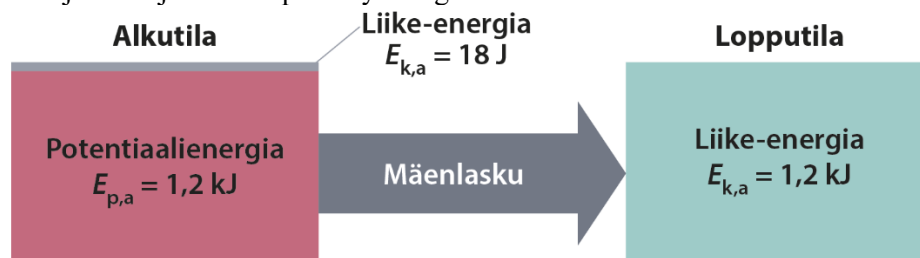
- b) Liike-energia mäen laella on $E_{k,a} = \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \text{ kg} \cdot (1,2 \text{ m/s})^2 = 18 \text{ J}$.

Potentiaalienergia mäen laella on $E_{p,a} = mgh_a = 25 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 5,0 \text{ m} = 1226,25 \text{ J} \approx 1,2 \text{ kJ}$.

Kohdassa a lasketun nopeuden perusteella liike-energia 5,0 metriä lähtöpaikkaa alempana on

$$E_{k,l} = \frac{1}{2}mv_l^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \text{ kg} \cdot (10,0175 \text{ m/s})^2 = 1254,38 \text{ J} \approx 1,3 \text{ kJ}.$$

Saatujen arvojen avulla piirretty energiakaavio on



Kertaustehtävät

Huomaa, että saat lohkojen suhteelliset korkeudet oikein, kun asetat niiden korkeudet vastaavien energioiden suhteessa. Jos esimerkiksi valitset koko mekaanista energiaa kuvaavan suorakulmion korkeudeksi 4,0 cm, on liike-energiaa alussa kuvaavan lohkon korkeus

$$\frac{18 \text{ J}}{1226,25 \text{ J} + 18 \text{ J}} \cdot 4,0 \text{ cm} \approx 0,06 \text{ cm}$$

ja potentiaalienergiaa alussa kuvaavan lohkon korkeus

$$\frac{1226,25 \text{ J}}{1226,25 \text{ J} + 18 \text{ J}} \cdot 4,0 \text{ cm} \approx 3,94 \text{ cm}.$$

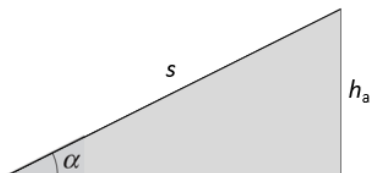
Suorakulmioiden korkeudet kannattaa syöttää piirto-ohjelmaan lukuarvoina.

Kaaviosta nähdään, että mekaanisen energian kannalta Tiinalle annettu alkunopeus on lähes merkityksetön. Alkunopeus kuitenkin helpottaa liikkeelle lähtöä.

24.

$$v_a = 5,3 \text{ m/s}, v_l = 5,3 \text{ m/s} + 3,7 \text{ m/s} = 9,0 \text{ m/s}, s = 8,2 \text{ m}, \alpha = 25^\circ, m = 76 \text{ kg}, g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi se, johon mäki päättyy. Tällöin rinne alkaa nollatasoon verrattuna korkeudelta $h_a = s \cdot \sin \alpha = 8,2 \text{ m} \cdot \sin 25^\circ = 3,46547 \text{ m}$.

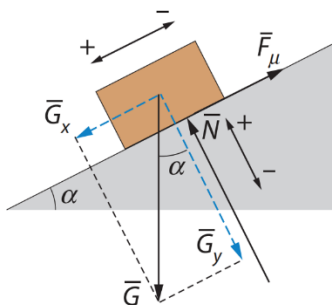


Energiaperiaatteen yhtälöstä $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$ saadaan kitkan tekemäksi työksi

$$\begin{aligned} W &= E_{p,l} + E_{k,l} - E_{p,a} - E_{k,a} = 0 + \frac{1}{2}mv_l^2 - mgh_a - \frac{1}{2}mv_a^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 76 \text{ kg} \cdot \left(9,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 76 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3,46547 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 76 \text{ kg} \cdot \left(5,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\ &= -573,136 \text{ J}. \end{aligned}$$

Kitkan tekemä työ on toisaalta $W = F_\mu s = -\mu N s$.

Tarkastellaan tukivoiman N määrittämiseksi hiihtäjän voimakuvioita:



Newtonin II lain mukaan kaltevaa tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa on $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{N} + \vec{G}_y = \vec{0}$.

Kun suunta tasosta kohtisuorasti ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $N - G_y = 0$.

Tukivoiman suuruus on

$$N = G_y = G \cos \alpha = mg \cos \alpha$$

Näin ollen kitkan tekemä työ saadaan muotoon $W = F_\mu s = -\mu N s = -\mu mg \cos \alpha \cdot s$, josta saadaan liukukitkakertoimeksi

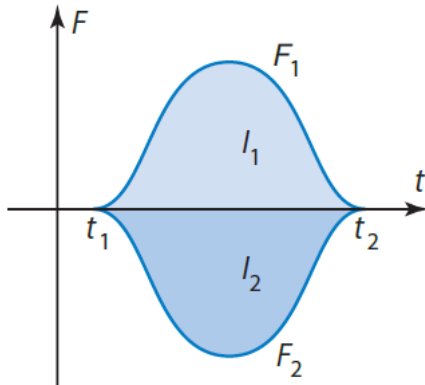
Kertaustehtävät

$$\mu = \frac{W}{-mg \cos \alpha \cdot s} = \frac{-573,136 \text{ J}}{-76 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 25^\circ \cdot 8,2 \text{ m}} \approx 0,10.$$

Suksien ja lumen välinen liukukitkerroin on 0,10.

25.

- a) Newtonin III lain eli voiman ja vastavoiman lain mukaan kahden kappaleen 1 ja 2 vuorovaikutuksessa kumpikin kappale kohdistaa toiseen kappaleeseen yhtä suuren voiman. Voimat ovat vastakkaissuuntaisia.
- b) Periaatekuva kumpaankin vaunuun kohdistuvista voimista.



- c) Voiman ja vastavoiman lain mukaan voimat ovat joka hetki yhtä suuria ja vuorovaikutuksen kesto-aika on kummallekin kappaleelle sama eli $t_2 - t_1$. Näin ollen kumpaankin vaunuun kohdistuvan voiman impulssi on yhtä suuri.
- d) Liikemäärä säilyy törmäyksessä, joten liikemäärän muutos on nolla.

26.

$$m = 0,060 \text{ kg}, h = 1,0 \text{ m}$$

Kananmunan potentiaalienergia $E_p = mgh$ muuttuu putoamisen aikana liike-energiaksi $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.

Yhtälöstä $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ voidaan ratkaista kananmunan nopeus sen osuessa lattiaan:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,0 \text{ m}} = 4,42945 \text{ m/s}.$$

Kananmunan liikemäärä sen osuessa lattiaan on $p = mv = 0,060 \text{ kg} \cdot 4,42945 \text{ m/s} \approx 0,27 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Koska kananmuna särkyy lattiaan osuessaan, törmäyksen jälkeen sen liikemäärä on nolla, joten liikemäärän muutos Δp on sama kuin liikemäärä ennen törmäystä eli $\Delta p = p$. Impulssi on liikemäärän muutos eli $I = \Delta p = 0,27 \text{ Ns}$ ja suunta on alaspäin.

27.

$$m = 0,20 \text{ kg}, h_2 = 3,1 \text{ m}, \Delta p = 0,91 \text{ kgm/s}$$

Lasketaan ensin pallon nopeus törmäyksen jälkeen. Törmäyksen jälkeen pallo pomppaa korkeudelle $h_2 = 3,1 \text{ m}$, jolloin sen liike-energia on muuttunut potentiaalienergiaksi eli $\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_2$.

Ratkaistaan tästä nopeuden suuruus törmäyksen jälkeen:

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 3,1 \text{ m}} = 7,79885 \text{ m/s}.$$

Kertaustehtävät

Valitaan suunta ylös positiiviseksi suunnaksi, jolloin $v_2 = 7,79885 \text{ m/s}$. Liikemäärän muutos törmäyksessä on $\Delta p = mv_2 - mv_1$. Koska pallon nopeus pienenee pompussa, on liikemäärän muutoksen suunta alas eli $\Delta p = -0,91 \text{ kgm/s}$.

Pallon nopeus ennen törmäystä on silloin

$$v_1 = \frac{mv_2 - \Delta p}{m} = \frac{0,20 \text{ kg} \cdot 7,79885 \text{ m/s} - (-0,91 \text{ kgm/s})}{0,20 \text{ kg}} = 12,3489 \text{ m/s}.$$

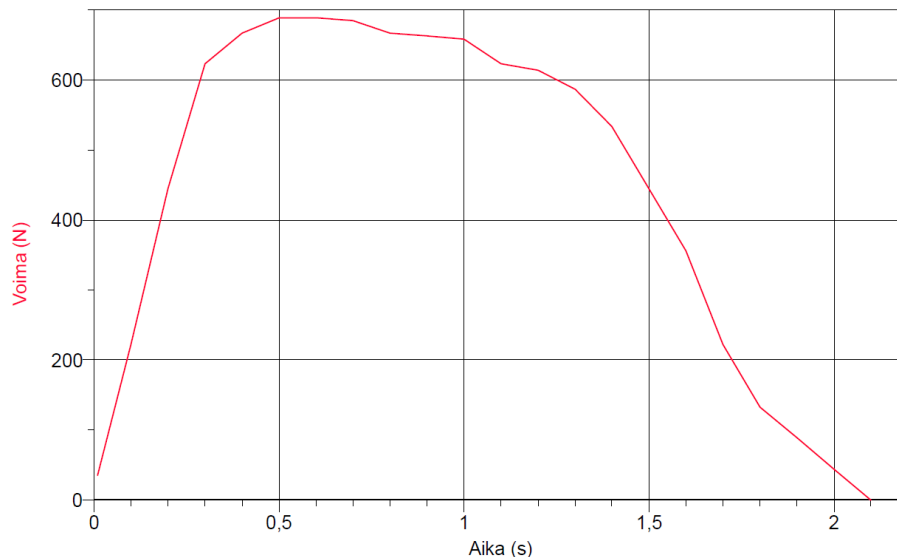
Mekaanisen energian säilymislain mukaan on $\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1$, josta saadaan pudotuskorkeudeksi

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{(12,3489 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \approx 7,8 \text{ m}.$$

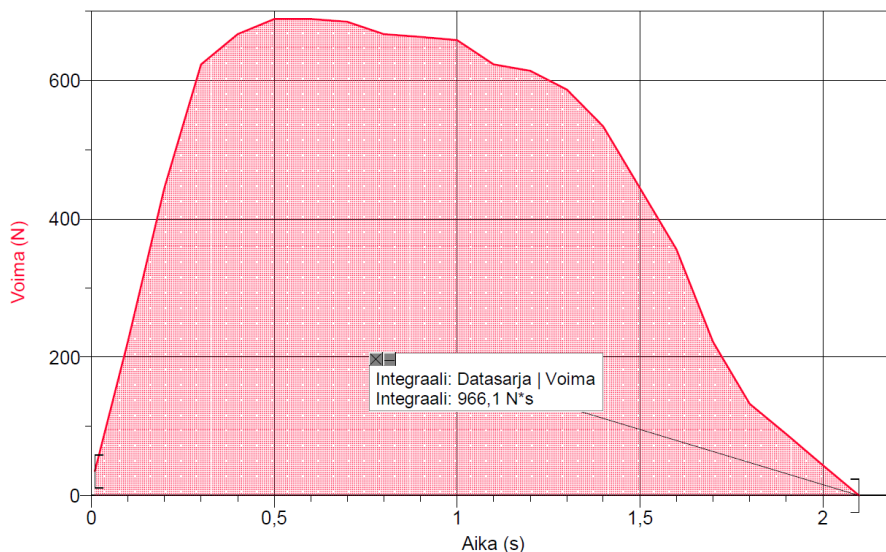
28.

$$m = 3,4 \text{ kg}$$

a) Mittaustulokset t, F -koordinaatistossa:



Voiman impulssi saadaan fysikaalisen pinta-alan avulla.



Impulssi on $I = 966,1 \text{ Ns} \approx 970 \text{ Ns}$.

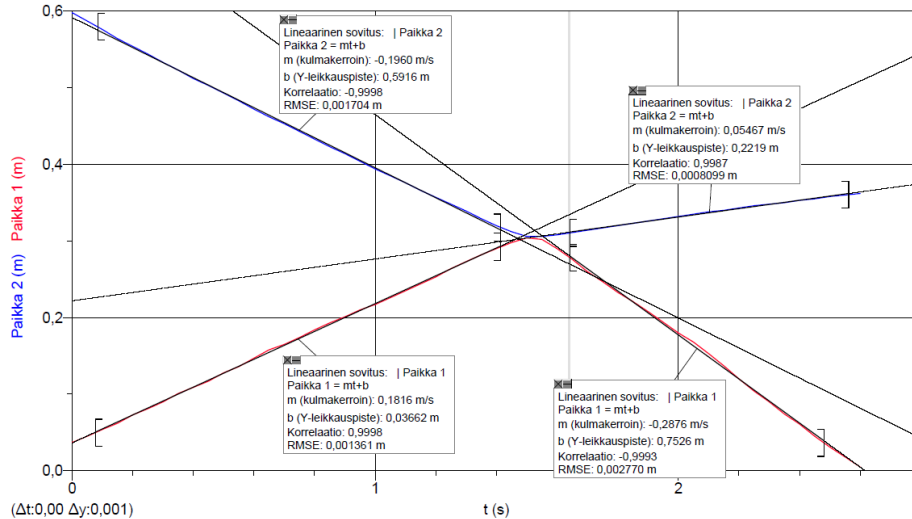
Kertaustehtävät

- b) Impulssiperiaatteen mukaan on $\bar{I} = \Delta \bar{p} = m \Delta \bar{v}$. Oletetaan, että liikkeen suunta ei muutu. Tällöin skalaariyhtälöstä $I = m \Delta v$ saadaan raketin nopeudeksi

$$\Delta v = \frac{I}{m} = \frac{966,1 \text{ N s}}{3,4 \text{ kg}} \approx 280 \text{ m/s.}$$

29.

- a) Sovitetaan molempien vaunujen paikkojen kuvaajiin suorat ennen ja jälkeen törmäyksen. Sovitetun suoran kulmakerto on vastaa vaunun nopeutta.



Kuvaajasta voidaan lukea nopeudet

$$v_1 = 0,182 \text{ m/s}, v_2 = -0,196 \text{ m/s}, u_1 = -0,288 \text{ m/s} \text{ ja } u_2 = 0,0547 \text{ m/s.}$$

- b) Kimmoisassa törmäyksessä sekä liikemäärä, että mekaaninen energia säilyvät. Toisin sanoen, mekaanisen energian määrä sekä liikemäärä ovat samat ennen ja jälkeen törmäyksen.

Verrataan mittaustuloksien avulla saatuja liikemääriä ennen ja jälkeen törmäyksen:

$$p_{\text{ennen}} = p_{1,\text{ennen}} + p_{2,\text{ennen}} \\ = v_1 \cdot m_1 + v_2 \cdot m_2 = 0,182 \text{ m/s} \cdot 0,606 \text{ kg} + (-0,196 \text{ m/s}) \cdot 1,126 \text{ kg} = -0,110404 \text{ kgm/s}$$

ja

$$p_{\text{jälkeen}} = p_{1,\text{jälkeen}} + p_{2,\text{jälkeen}} \\ = u_1 \cdot m_1 + u_2 \cdot m_2 = -0,288 \text{ m/s} \cdot 0,606 \text{ kg} + 0,0547 \text{ m/s} \cdot 1,126 \text{ kg} = -0,112936 \text{ kgm/s.}$$

Havaitaan että liikemäärä törmäyksen jälkeen on hieman pienempi. Ero on kuitenkin vähäinen (n. 2 %), joten liikemäärän säilymisen ennuste pitää paikkansa sangen hyvin.

Verrataan sitten mittaustulosten avulla saatujen liike-energioiden määrää ennen ja jälkeen törmäyksen:

$$E_{k,\text{ennen}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,606 \text{ kg} \cdot (0,182 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1,126 \text{ kg} \cdot (-0,196 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 0,0316648 \text{ J}$$

ja

$$E_{k,\text{jälkeen}} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,606 \text{ kg} \cdot (-0,288 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1,126 \text{ kg} \cdot 0,0547 \frac{\text{m}}{\text{s}}^2 = 0,0268166 \text{ J}$$

Havaitaan että liike-energia törmäyksen jälkeen on reilusti (n. 15 %) pienempi, verrattuna liike-energiaan ennen törmäystä. Koska mitatussa törmäyksessä liike-energia ei säily, törmäystä ei voida pitää kimmoisana.

30.

$$m_1 = 640\,000 \text{ kg}, m_2 = 22\,000 \text{ kg}, v_1 = 0,50 \text{ m/s}, v_2 = 0,22 \text{ m/s}$$

Liikemäärän säilymislain mukaan täysin kimmottomassa törmäyksessä on

$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = (m_1 + m_2) \bar{u}$. Sovitaan veturin liikkeen suunta positiiviseksi. Tällöin tavaravaunun nopeus on $-0,22 \text{ m/s}$. Tästä saadaan veturin ja vaunun yhdistelmän yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{640\,000 \text{ kg} \cdot 0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 22\,000 \text{ kg} \cdot (-0,22 \frac{\text{m}}{\text{s}})}{(640\,000 \text{ kg} + 22\,000 \text{ kg})}$$

$$= 0,476073 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Veturin liike-energia ennen törmäystä oli

$$E_{1,\text{ennen}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 640\,000 \text{ kg} \cdot (0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 80\,000 \text{ J}.$$

Tavaravaunun liike-energia ennen törmäystä oli

$$E_{2,\text{ennen}} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 22\,000 \text{ kg} \cdot (0,22 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 532,4 \text{ J}.$$

Veturin ja vaunun liike-energia ennen törmäystä oli yhteensä

$$E_{1,\text{ennen}} + E_{2,\text{ennen}} = 80\,532,4 \text{ J}.$$

Yhdistelmän liike-energia törmäyksen jälkeen on

$$E_{\text{jälkeen}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 = \frac{1}{2} (640\,000 \text{ kg} + 22\,000 \text{ kg}) \cdot (0,476073 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \approx 75\,000 \text{ J}.$$

Liike-energia ei säily törmäyksessä. Noin $5\,500 \text{ J}$ liike-energiaa muuntuu mm. lämmöksi ja ääneksi.

31.

Kun poika hyppää patjalle, kyseessä on pojan ja patjan välinen törmäys. Pojan ja patjan kokonaisliikemäärä säilyy: $m \bar{v} + m_p \bar{v}_p = (m + m_p) \bar{u}$, jossa $\bar{v}$ on pojan nopeus ja $\bar{v}_p$ patjan nopeus ennen törmäystä ja $\bar{u}$ on pojan ja patjan yhteinen nopeus heti törmäyksen jälkeen.

Koska patja on alussa levossa, sen nopeus on $v_p = 0 \text{ m/s}$. Kun pojan menosuunta valitaan positiiviseksi suunnaksi, voidaan liikemäärän säilyminen esittää skalaariyhtälönä $m v = (m + m_p) u$. Tästä voidaan ratkaista u eli pojan ja patjan nopeus välittömästi törmäyksen jälkeen:

$$u = \frac{m v}{m + m_p} = \frac{29 \text{ kg} \cdot 5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{29 \text{ kg} + 21 \text{ kg}} = 2,9 \text{ m/s}.$$

Työperiaatteen mukaan pojan ja patjan liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kitkan F_μ patjaan matkalla s tekemä työ: $\Delta E_k = W$ eli $\Delta E_k = -F_\mu s$.

Koska pinta on vaakasuora, Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ eli $\vec{N} + \vec{G} = \vec{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälöstä $N - G = 0$ saadaan $N = G$. Kitka on $F_\mu = \mu N = \mu G = \mu(m + m_p)g$.

Patja ja poika pysähtyvät kuljettuaan matkan s , joten työ-energiaperiaate $E_{k,l} - E_{k,a} = -F_\mu s$ eli

$$0 - \frac{1}{2} (m + m_p) u^2 = -F_\mu s \text{ saadaan muotoon } \frac{1}{2} (m + m_p) u^2 = \mu (m + m_p) g s.$$

Kertaustehtävät

Yhtälöstä $\frac{1}{2}u^2 = \mu gs$ saadaan kitkakertoimeksi $\mu = \frac{u^2}{2gs} = \frac{(2,9 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,3 \text{ m}} \approx 0,33$.

32.

$m_{\text{Matti}} = 68 \text{ kg}$, $m_{\text{Maija}} = 51 \text{ kg}$, $m_{\text{kajakki}} = 28 \text{ kg}$, $m_{\text{reppu}} = 14 \text{ kg}$, $v_{\text{reppu}} = 3,1 \text{ m/s}$

- a) Koska kajakin ja siinä olevien henkilöiden ja repun muodostamaan systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia, systeemin kokonaisliikemäärä säilyy. Alussa liikemäärä on nolla, joten se täytyy olla nolla myös silloin kun reppu lentää ilmassa. Kajakin, Matti ja Maijan yhteinen liikemäärän pitää kumota repun liikemäärä eli sen on oltava yhtä suuri ja vastakkaismerkkinen kuin repun liikemäärä. Kajakin nopeus ei siis voi olla nolla ja siksi kajakki lähti liikkeelle.
- b) Koska liikemäärä säilyy, saadaan yhtälö $m_{\text{reppu}} \bar{v}_{\text{reppu}} + (m_{\text{Matti}} + m_{\text{Maija}} + m_{\text{kajakki}}) \bar{v} = \bar{0}$, jossa $\bar{v}$ on kajakin nopeus. Kun repun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $m_{\text{reppu}} v_{\text{reppu}} + (m_{\text{Matti}} + m_{\text{Maija}} + m_{\text{kajakki}}) v = 0$, josta kajakin nopeudeksi saadaan
- $$v = -\frac{m_{\text{reppu}} v_{\text{reppu}}}{m_{\text{Matti}} + m_{\text{Maija}} + m_{\text{kajakki}}} = -\frac{14 \text{ kg} \cdot 3,1 \text{ m/s}}{68 \text{ kg} + 51 \text{ kg} + 28 \text{ kg}} \approx -0,30 \text{ m/s}.$$
- Kajakki siis kulkee nopeudella $-0,30 \text{ m/s}$ päinvastaiseen suuntaan kuin mihin reppu lentää.
- c) Koska systeemin kokonaisliikemäärä säilyy, pitää kokonaisliikemäärän olla lopussa sama kuin alussa eli nolla. Koska kajakissa ovat Matti, Maija ja reppu eivät lopussa liiku kajakin suhteen, on niillä ja kajakilla sama nopeus. Tämän nopeuden pitää olla nolla, jotta kokonaisliikemäärä olisi nolla.

33.

$v_{\text{vesi}} = 36,43 \text{ m/s}$

Oletetaan että vesipyssy on alussa paikallaan, joten veden (ja pyssyn) liikemäärä on nolla. Sovitaan veden liikkeen suunta positiiviseksi.

Ensimmäisen sekunnin aikana ammutun veden liikemäärä on

$$p = mv = \frac{0,027 \text{ kg/s}}{1 \text{ s}} \cdot 36,43 \text{ m/s} = 0,98361 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}.$$

Impulssiperiaatteen $\bar{F} \Delta t = \Delta \bar{p}$ mukaan, veteen kohdistunut voiman suuruus on

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0,98361 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ s}} \approx 0,98 \text{ N}.$$

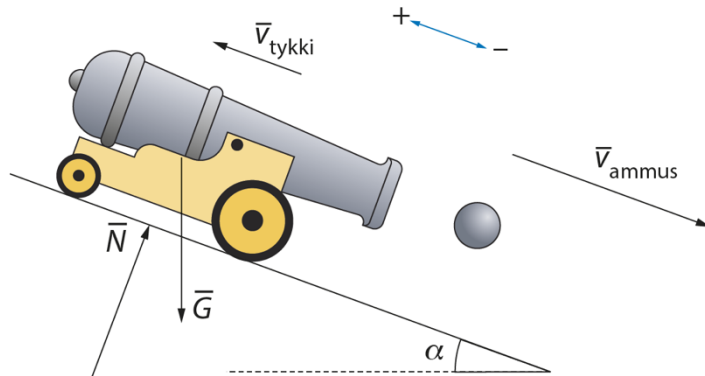
Newtonin III lain mukaan pyssyn käyttäjään kohdistuu yhtä suuri eli $0,98 \text{ Newtonin}$ voima. Voiman suunta on veden liikkeelle vastakkais-suuntainen.

Kertaustehtävät

34.

$$m_{\text{tykki}} = 46\,000 \text{ kg}, m_{\text{ammus}} = 230 \text{ kg}, v_{\text{ammus}} = 470 \text{ m/s}, \alpha = 11^\circ$$

Sovitaan tykin liikkeen suunta positiiviseksi. Piirretään voimakuvio, jossa $\vec{N}$ on tykkiin kohdistuva tukivoima ja $\vec{G}$ tykkiin kohdistuva paino.



Oletetaan, että tykin ja ammuksen muodostama systeemi on eristetty. Koska eristetyssä systeemissä liikemäärä säilyy, ja systeemin liikemäärä ennen laukaisua on nolla, saadaan yhtälö

$$\vec{0} = m_{\text{tykki}} \vec{v}_{\text{tykki}} + m_{\text{ammus}} \vec{v}_{\text{ammus}}.$$

Kun tykin liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, skalaariyhtälöstä $0 = m_{\text{tykki}} v_{\text{tykki}} - m_{\text{ammus}} v_{\text{ammus}}$ tykin nopeus heti laukaisun jälkeen on

$$v_{\text{tykki}} = \frac{m_{\text{ammus}} v_{\text{ammus}}}{m_{\text{tykki}}} = \frac{230 \text{ kg} \cdot 470 \text{ m/s}}{46\,000 \text{ kg}} = 2,35 \text{ m/s}.$$

Oletetaan, että liikettä vastustavat voimat ovat pienet, joten tykin saama liike-energia muuntuu kokonaan tykin potentiaalienergiaksi:

$$\frac{1}{2} m_{\text{tykki}} v_{\text{tykki}}^2 = m_{\text{tykki}} g h.$$

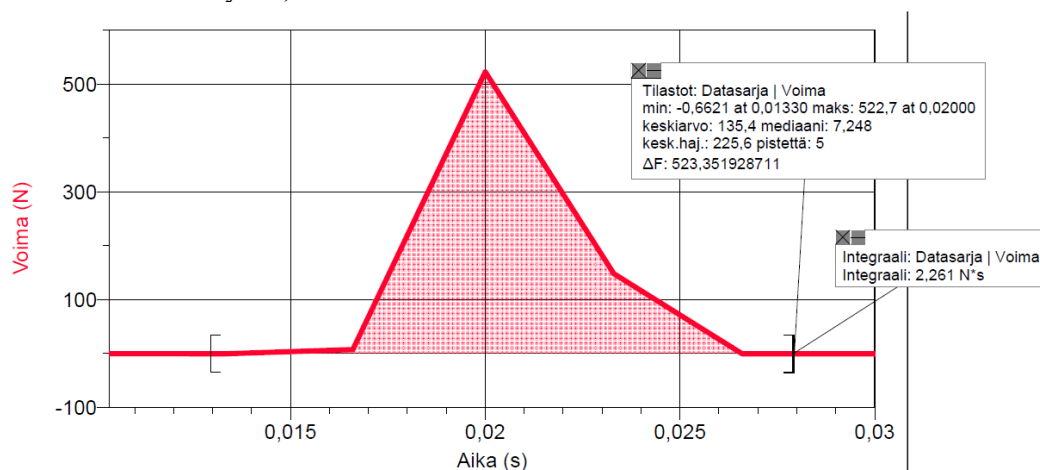
Ratkaistaan edellisestä tykin painopisteen nousu h :

$$h = \frac{v_{\text{tykki}}^2}{2g} = \frac{(2,35 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \approx 0,28 \text{ m}.$$

35.

$$m = 0,0572 \text{ kg}$$

Mittausdata esitettynä t, F -koordinaatistossa:



Kertaustehtävät

- a) Mittausdatan perusteella nähdään, että suurin mitattu voima on 522,7 N. Newtonin II lain mukaan $\Sigma F = ma$, joten kiihtyvyys a on

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{522,7 \text{ N}}{0,0572 \text{ kg}} \approx 9140 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

- b) Mittausdatalle tehdyn numeerisen integroinnin perusteella palloon kohdistunut impulssi I on 2,261 Ns. Impulssiperiaatteen mukaan

$I = \Delta p = m\Delta v$, joten pallon nopeuden muutos Δv on

$$\Delta v = \frac{I}{m} = \frac{2,261 \text{ Ns}}{0,0572 \text{ kg}} \approx 39,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$