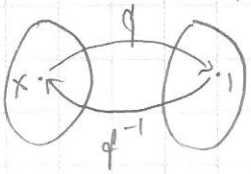
$$\Rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2+\frac{1}{1}} = \underline{\frac{1}{3}}$$

7.6 $f(x) = x^3 + x + 3$

a) f jelölje a deriv. $\mathbb{R}$-en:

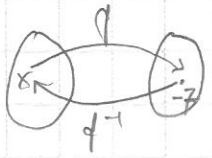
$f'(x) = 3\underbrace{x^2}_{\geq 0} + 1 > 0$ ainek $\Rightarrow f$ szigorúan növekvő $\mathbb{R}$-en

$\Rightarrow f^{-1}$ az értelmezése

b) 

$f(x) = x^3 + x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ f-nek szig. növ. $\rightarrow$ egyetlen zérushely

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3\cdot(-1)^2+1} = \underline{\frac{1}{4}}$$



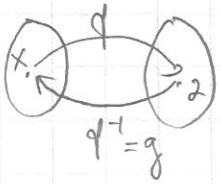
$f(x) = x^3 + x + 3 = -7 \Leftrightarrow x = -2$

$$(f^{-1})'(-7) = \frac{1}{f'(-2)} = \frac{1}{3\cdot(-2)^2+1} = \underline{\frac{1}{13}}$$

7.19 $f(x) = \ln x + x + 1$, $x > 0$

a) f jelölje a deriv. $x > 0$-ban

$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ ainek $x > 0$-ban $\Rightarrow f$ szig. növ. $\Rightarrow f^{-1}$ az értelmezése

b) 

$f(x) = \ln x + x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ egyetlen zérushely

hozza f az szig. növ.

$$(f^{-1})'(2) = g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{1}{1}+1} = \underline{\frac{1}{2}}$$

c) f szig. növ. $\Rightarrow f^{-1}$ szig. növ. közös pontjai közül közülük szorosan $y = x$ szintben $\Rightarrow$ közös pontjai szorosan $y = x$

$$\begin{cases} y = f(x) = \ln x + x + 1 \\ y = x \end{cases}$$

$\Rightarrow \ln x + x + 1 = x \Leftrightarrow \ln x = -1 \quad | e^{(\cdot)} \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{-1}$

$\Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \underline{\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)}$

d) $f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} + 1 = e + 1 = k_1 = \tan\alpha \Leftrightarrow \alpha \approx 74{,}95°$

$$g'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{1}{e+1} = k_2 = \tan\beta \Leftrightarrow \beta \approx 15{,}05°$$

$\Rightarrow$ keresett szög: $|\alpha - \beta| \approx 59{,}89° \approx \underline{59{,}9°}$

