

K1

a) $\left|1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4}{4} - \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

b) $\left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4}{12} - \frac{6}{12} - \frac{3}{12}\right| = \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{5}{12}$

K2

a) Koska $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$, niin $3 - \sqrt{10} < 0$.

$$|3 - \sqrt{10}| = -(3 - \sqrt{10}) = \sqrt{10} - 3$$

b) Koska $\pi \approx 3,14$, niin $2 - \pi < 0$, $\pi - 5 < 0$ ja $2\pi - 7 < 0$.

$$\begin{aligned} & ||2 - \pi| - |\pi - 5|| \\ &= |-(2 - \pi) - (-(\pi - 5))| \\ &= |-2 + \pi + \pi - 5| \\ &= |2\pi - 7| \\ &= -(2\pi - 7) \\ &= 7 - 2\pi \end{aligned}$$

Vastaus a) $\sqrt{10} - 3$
 b) $7 - 2\pi$

K3

$$\left| (3 - \sqrt{2}) - (4 - \sqrt{2}) \right| = \left| 3 - \sqrt{2} - 4 + \sqrt{2} \right| = \left| -1 \right| = 1$$

K4

- a) On olemassa vain kaksi lukua, joiden itseisarvo on 8.
Luvun $5x$ täytyy olla joko 8 tai -8 .

$$5x = 8 \qquad \text{tai} \qquad 5x = -8$$

$$x = \frac{8}{5} \qquad \qquad \qquad x = -\frac{8}{5}$$

- b) On olemassa vain kaksi lukua, joiden itseisarvo on 7.
Luvun $x - 5$ täytyy olla joko 7 tai -7 .

$$x - 5 = 7 \qquad \text{tai} \qquad x - 5 = -7$$

$$x = 7 + 5 \qquad \qquad \qquad x = -7 + 5$$

$$x = 12 \qquad \qquad \qquad x = -2$$

- Vastaus a) $x = -\frac{8}{5}$ tai $x = \frac{8}{5}$
 b) $x = -2$ tai $x = 12$

K5

- a) Yhtälö $|3x - 8| = |x|$ toteutuu, kun luvut $3x - 8$ ja x ovat yhtä suuret tai kun ne ovat toistensa vastalukuja.

$$\begin{array}{ll} 3x - 8 = x & \text{tai} \quad 3x - 8 = -x \\ 3x - x = 8 & 3x + x = 8 \\ 2x = 8 & 4x = 8 \\ x = 4 & x = 2 \end{array}$$

- b) Yhtälö $|x - 7| = |5 - 3x|$ toteutuu, kun luvut $x - 7$ ja $5 - 3x$ ovat yhtä suuret tai kun ne ovat toistensa vastalukuja.

$$\begin{array}{ll} x - 7 = 5 - 3x & \text{tai} \quad x - 7 = -(5 - 3x) \\ x + 3x = 5 + 7 & x - 7 = -5 + 3x \\ 4x = 12 & x - 3x = -5 + 7 \\ x = 3 & -2x = 2 \\ & x = -1 \end{array}$$

Vastaus a) $x = 4$ tai $x = 2$
 b) $x = 3$ tai $x = -1$

K6

- a) On olemassa vain kaksi lukua, joiden itseisarvo on 3.
Luvun $x^2 - 1$ täytyy olla joko 3 tai -3 .

$$\begin{array}{ll} x^2 - 1 = 3 & \text{tai} \quad x^2 - 1 = -3 \\ x^2 = 3 + 1 & x^2 = -3 + 1 \\ x^2 = 4 & x^2 = -2 \\ x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 & \text{ei ratkaisua} \end{array}$$

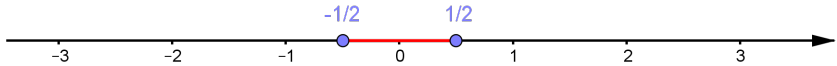
- b) Yhtälö $|2x^2 + x| = |x|$ toteutuu, kun luvut $2x^2 + x$ ja x ovat yhtä suuret tai kun ne ovat toistensa vastalukuja.

$$\begin{array}{ll} 2x^2 + x = x & \text{tai} \quad 2x^2 + x = -x \\ 2x^2 = 0 & 2x^2 + 2x = 0 \\ x^2 = 0 & 2x(x+1) = 0 \\ x = 0 & 2x = 0 \quad \text{tai} \quad x+1 = 0 \\ & x = 0 \quad \quad \quad x = -1 \end{array}$$

Vastaus a) $x = -2$ tai $x = 2$
 b) $x = -1$ tai $x = 0$

K7

- a) Luvut, joiden itseisarvo on pienempi kuin $\frac{1}{2}$, sijaitsevat lukusuoralla lukujen $-\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}$ välissä.



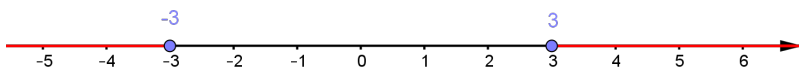
$$|2x| < \frac{1}{2}$$

$$2x > -\frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad 2x < \frac{1}{2} \quad | : 2 \quad (> 0)$$

$$x > -\frac{1}{4} \qquad x < \frac{1}{4}$$

$$\text{Siis } -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}.$$

- b) Luvut, joiden itseisarvo on suurempi kuin kolme, sijaitsevat lukusuoralla joko luvun -3 vasemmalla puolella tai luvun 3 oikealla puolella.



$$|x - 5| > 3$$

$$x - 5 < -3 \quad \text{tai} \quad x - 5 > 3$$
$$x < 2 \quad \quad \quad x > 8$$

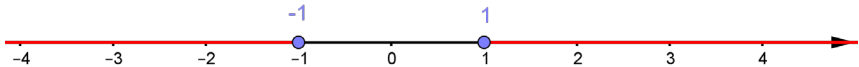
Vastaus

a) $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$

b) $x < 2$ tai $x > 8$

K8

- a) Luvut, joiden itseisarvo on suurempi tai yhtä suuri kuin 1, sijaitsevat lukusuoralla joko luvun -1 vasemmalla puolella tai luvun 1 oikealla puolella, päätepisteet mukaan lukien.



$$\left| 3x - \frac{1}{6} \right| \geq 1$$

$$3x - \frac{1}{6} \leq -1 \quad \text{tai} \quad 3x - \frac{1}{6} \geq 1$$

$$3x \leq -\frac{6}{6} + \frac{1}{6}$$

$$3x \geq \frac{6}{6} + \frac{1}{6}$$

$$3x \leq -\frac{5}{6}$$

$$3x \geq \frac{7}{6} \quad | : 3 \quad (> 0)$$

$$x \leq -\frac{5}{18}$$

$$x \geq \frac{7}{18}$$

- b) Luvun itseisarvo on aina joko positiivinen tai nolla.
Siksi epäyhtälö toteutuu vain, kun $1 - 4x = 0$.

$$1 - 4x = 0$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Vastaus a) $x \leq -\frac{5}{18}$ tai $x \geq \frac{7}{18}$

 b) $x = \frac{1}{4}$

K9

Luvut, joiden itseisarvo on pienempi kuin 1, sijaitsevat lukusuoralla lukujen -1 ja 1 välissä.



$|x^2 - 5x + 5| < 1$ toteutuu, kun $x^2 - 5x + 5 > -1$ ja $x^2 - 5x + 5 < 1$.

Ratkaistaan ensimmäinen epäyhtälö.

$$x^2 - 5x + 5 > -1$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Ratkaistaan funktion $x^2 - 5x + 6$ nollakohdat.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

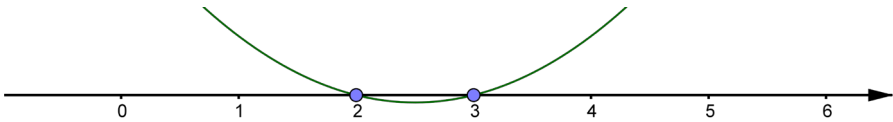
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Funktion $x^2 - 5x + 6$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 - 5x + 6 > 0$ toteutuu, kun $x < 2$ tai $x > 3$.

Ratkaistaan toinen epäyhtälö.

$$x^2 - 5x + 5 < 1$$

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

Ratkaistaan funktion $x^2 - 5x + 4$ nollakohdat.

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

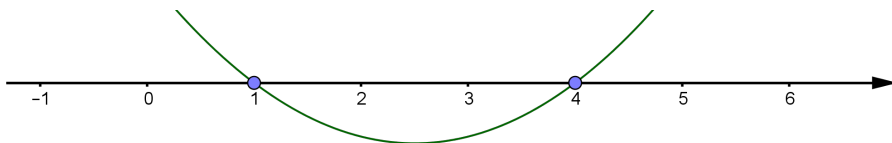
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Funktion $x^2 - 5x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälö $x^2 - 5x + 4 < 0$ toteutuu, kun $1 < x < 4$.

Yhdistetään ratkaisut $1 < x < 4$ ja $x < 2$ tai $x > 3$.

Siis $|x^2 - 5x + 4| < 1$, kun $1 < x < 2$ tai $3 < x < 4$.

Vastaus $1 < x < 2$ tai $3 < x < 4$

K10

Merkitään kysyttyjä lukuja x :llä. Muodostetaan epäyhtälöt ja ratkaistaan ne laskimella.

a) $|x - (-7)| > 4$
 $x < -11$ tai $x > -3$

b) $|x - (-7)| > 12$
 $x < -19$ tai $x > 5$

c) $|x - (-7)| > \pi + 7$
 $x < -14 - \pi$ tai $x > \pi$

K11

a) Lasketaan keskipiste.

$$\left(\frac{3+2}{2}, \frac{-5-7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-12}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -6\right)$$

Lasketaan pituus.

$$\begin{aligned} & \sqrt{(2-3)^2 + (-7-(-5))^2} \\ &= \sqrt{(2-3)^2 + (-7+5)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{1+4} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

b) Lasketaan keskipiste.

$$\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{-20-18}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{-38}{2}\right) = (0, -19)$$

Lasketaan pituus.

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1-(-1))^2 + (-18-(-20))^2} \\ &= \sqrt{(1+1)^2 + (-18+20)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{4+4} \\ &= \sqrt{8} \\ &= \sqrt{4 \cdot 2} \\ &= \sqrt{4} \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vastaus a) keskipiste $\left(\frac{5}{2}, 6\right)$ ja pituus $\sqrt{5}$
 b) keskipiste $(0, -19)$ ja pituus $2\sqrt{2}$

K12

Lasketaan sivujen pituudet

$$|AB| = \sqrt{(20 - 30)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$$

$$|AC| = \sqrt{(28 - 30)^2 + (-4 - 4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$|BC| = \sqrt{(28 - 20)^2 + (-4 - (-2))^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

Huomataan, että $|AC| = |BC|$. Kolmio on tasakylkinen.

Kolmio on suorakulmainen, jos se toteuttaa Pythagoraan lauseen.

$$|AC|^2 + |BC|^2 = (2\sqrt{17})^2 + (2\sqrt{17})^2 = 136$$

$$|AB|^2 = (2\sqrt{34})^2 = 136$$

Koska Pythagoraan lause $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$ pätee, niin kolmio on suorakulmainen.

Vastaus $|AB| = 2\sqrt{34}$, $|AC| = 2\sqrt{17}$ ja $|BC| = 2\sqrt{17}$.

Kolmio on tasakylkinen, koska $|AC| = |BC|$.

Kolmio on suorakulmainen, koska se toteuttaa Pythagoraan lauseen: $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$.

K13

Sijoitetaan pisteen $(2,0)$ koordinaatit $x=2$ ja $y=0$ pistejoukon yhtälöön $x(y^2 - 4) = 0$.

$$2 \cdot (0^2 - 4) = 0$$

$$2 \cdot (-4) = 0$$

$$-8 = 0$$

Epätosi

Sijoitetaan pisteen $(0,-2)$ koordinaatit $x=0$ ja $y=-2$ pistejoukon yhtälöön $x(y^2 - 4) = 0$.

$$0 \cdot ((-2)^2 - 4) = 0$$

$$0 = 0$$

Tosi

Sijoitetaan pisteen $(5,2)$ koordinaatit $x=5$ ja $y=2$ pistejoukon yhtälöön $x(y^2 - 4) = 0$.

$$5 \cdot (2^2 - 4) = 0$$

$$5 \cdot (4 - 4) = 0$$

$$5 \cdot 0 = 0$$

$$0 = 0$$

Tosi

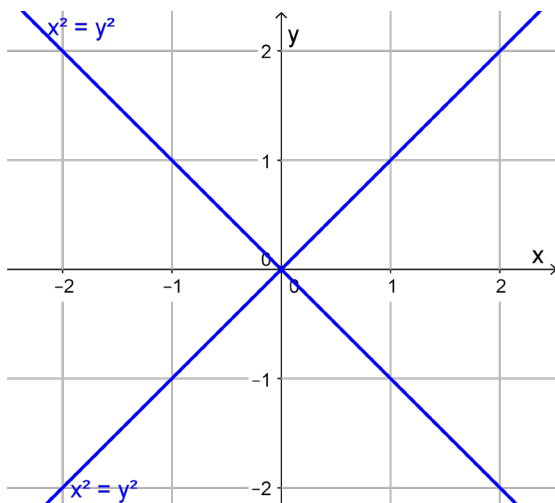
Vastaus $(2,0)$ ei kuulu, $(0,-2)$ ja $(5,2)$ kuuluvat.

K14

x -koordinaatin neliö on yhtä suuri kuin y -koordinaatin neliö.

$$x^2 = y^2$$

$$y = x \text{ tai } y = -x$$



K15

Määritetään pisteiden $(-3,1)$ ja $(5,5)$ kautta kulkevan suoran s kulmakerroin.

$$k_s = \frac{5-1}{5-(-3)} = \frac{5-1}{5+3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Määritetään pisteiden $(-2,0)$ ja $(a,1)$ kautta kulkevan suoran t kulmakerroin.

$$k_t = \frac{1-0}{a-(-2)} = \frac{1}{a+2} \quad (a \neq -2)$$

Suorat ovat yhdensuuntaiset, kun niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio a .

$$\frac{1}{a+2} = \frac{1}{2}$$

$$a+2 = 2$$

$$a = 2 - 2$$

$$a = 0$$

Vastaus $a = 0$

K16

- a) Sijoitetaan suoran kulmakerroin $k = -2$ sekä pisteen $(4, -7)$ koordinaatit $x_0 = 4$ ja $y_0 = -7$ suoran yhtälöön
- $$y - y_0 = k(x - x_0).$$

$$y - (-7) = -2(x - 4)$$

$$y + 7 = -2x + 8$$

$$y = -2x + 1$$

- b) Sijoitetaan suoran kulmakerroin $k = 0$ sekä pisteen $(4, -7)$ koordinaatit $x_0 = 4$ ja $y_0 = -7$ suoran yhtälöön
- $$y - y_0 = k(x - x_0).$$

$$y - (-7) = 0(x - 4)$$

$$y + 7 = 0$$

$$y = -7$$

Vastaus a) $y = -2x + 1$ b) $y = -7$

K17

a) Lasketaan suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

y -akseli:

$$y = -2x + 6 \quad | \quad x = 0$$

$$y = -2 \cdot 0 + 6 = 6$$

x -akseli:

$$y = -2x + 6 \quad | \quad y = 0$$

$$0 = -2x + 6$$

$$2x = 6$$

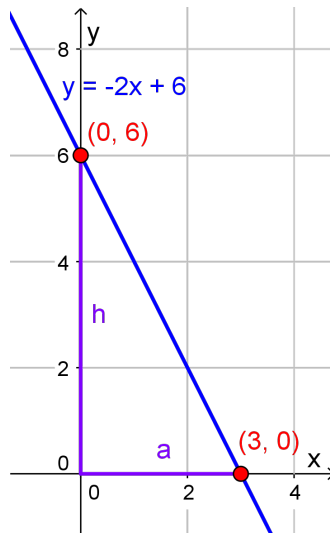
$$x = 3$$

Suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet ovat $(0, 6)$ ja $(3, 0)$.

Kolmion korkeus $h = 6$ ja kannan pituus $a = 3$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = \frac{18}{2} = 9$$



b) Lasketaan suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

y-akseli:

$$\begin{aligned}6x - 8y + 24 &= 0 & | & x = 0 \\6 \cdot 0 - 8y + 24 &= 0 \\-8y &= -24 \\y &= 3\end{aligned}$$

x-akseli:

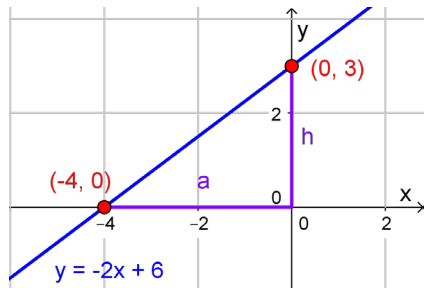
$$\begin{aligned}6x - 8y + 24 &= 0 & | & y = 0 \\6x - 8 \cdot 0 + 24 &= 0 \\6x &= -24 \\x &= -4\end{aligned}$$

Suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet ovat $(0, 3)$ ja $(-4, 0)$.

Kolmion korkeus $h = 3$ ja kannan pituus $a = |-4| = 4$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{12}{2} = 6$$



Vastaus a) 9 b) 6

K18

Muokataan suoran $12x - 8y + 26 = 0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$12x - 8y + 26 = 0$$

$$-8y = -12x - 26 \quad | :(-8)$$

$$y = \frac{-12}{-8}x + \frac{-26}{-8}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$$

Suoran kulmakerroin on $\frac{3}{2}$. Kysytty suora on kohtisuorassa tätä suoraan vastaan, jolloin sen kulmakerroin on tämän käänteisluvun vastaluku eli $-\frac{2}{3}$.

Määritetään suoran yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (x_0, y_0) = (3, -5), \quad k = -\frac{2}{3}$$

$$y - (-5) = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

$$y + 5 = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$\frac{2}{3}x + y + 3 = 0 \quad | \cdot 3$$

$$2x + 3y + 9 = 0$$

Vastaus $2x + 3y + 9 = 0$

K19

Määritetään pisteiden $(t, 2)$ ja $(-5, t)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k_1 = \frac{t-2}{-5-t}$$

Määritetään pisteiden $(t, 2)$ ja $(2t, -t)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k_2 = \frac{-t-2}{2t-t} = \frac{-t-2}{t}$$

Pisteet ovat samalla suoralla, kun kulmakertoimet ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakion t arvo.

$$k_1 = k_2$$

$$\frac{t-2}{-5-t} = \frac{-t-2}{t}$$

$$(t-2) \cdot t = (-5-t)(-t-2)$$

$$t^2 - 2t = -5 \cdot (-t) - 5 \cdot (-2) - t \cdot (-t) - t \cdot (-2)$$

$$t^2 - 2t = 5t + 10 + t^2 + 2t$$

$$t^2 - t^2 - 2t - 2t - 5t = 10$$

$$-9t = 10$$

$$t = -\frac{10}{9}$$

Vastaus $t = -\frac{10}{9}$

K20

- a) Lasketaan pisteiden $(-5, 2)$ ja $(11, -4)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{-4 - 2}{11 - (-5)} = \frac{-4 - 2}{11 + 5} = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}$$

Sijoitetaan esimerkiksi pisteen $(-5, 2)$ koordinaatit ja kulmakerroin suoran yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - 2 = -\frac{3}{8}(x - (-5))$$

$$y - 2 = -\frac{3}{8}x - \frac{15}{8} \quad | \cdot 8$$

$$8y - 16 = -3x - 15$$

$$3x + 8y - 1 = 0$$

b) Suora leikkaa x -akselin, kun $y = 0$.

$$3x + 8 \cdot 0 - 1 = 0$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

x -akselin leikkauspiste on $(\frac{1}{3}, 0)$.

Suora leikkaa y -akselin, kun $x = 0$.

$$3 \cdot 0 + 8y - 1 = 0$$

$$8y = 1$$

$$y = \frac{1}{8}$$

y -akselin leikkauspiste on $(0, \frac{1}{8})$

Vastaus a) $3x + 8y - 1 = 0$

b) $(\frac{1}{3}, 0)$ ja $(0, \frac{1}{8})$

K21

a) $k = \frac{7 - (-5)}{-4 - 2} = -2$

b) Ratkaistaan suuntakulma yhtälöstä $k = \tan \alpha$.

$$\tan \alpha = -2$$

$$\alpha = \tan^{-1}(-2) = -63,434\dots^\circ \approx -63,4^\circ$$

c) Koska suoran kulmakerroin ja suuntakulma ovat negatiivisia, suora on laskeva.

Vastaus a) -2
 b) $-63,4^\circ$
 c) laskeva

K22

Ratkaistaan suoran suuntakulma yhtälöstä $k = \tan \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \tan \alpha = -3 \\ & \alpha = \tan^{-1}(-3) = -71,565\dots^\circ \approx -71,6^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \tan \alpha = \sqrt{3} \\ & \alpha = \tan^{-1} \sqrt{3} = 60^\circ \end{aligned}$$

Vastaus a) $-71,6^\circ$ b) $60,0^\circ$

K23

Määritetään suoran $3x - 4y + 5 = 0$ kulmakerroin k_1 ja suuntakulma α_1 .

$$3x - 4y + 5 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

$$\text{Siis } k_1 = \frac{3}{4}.$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{3}{4}$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 36,869\dots^\circ \approx 36,9^\circ$$

Määritetään suoran $6x + 7y - 8 = 0$ kulmakerroin k_2 ja suuntakulma α_2 .

$$6x + 7y - 8 = 0$$

$$y = -\frac{6}{7}x + \frac{8}{7}$$

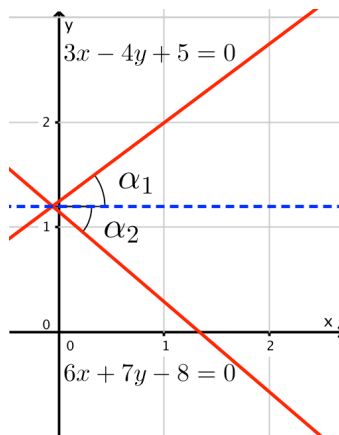
$$\text{Siis } k_2 = -\frac{6}{7}.$$

$$\tan \alpha_2 = -\frac{6}{7}$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(-\frac{6}{7}\right) = -40,601\dots^\circ \approx -40,6^\circ$$

Suora $3x - 4y + 5 = 0$ on nouseva ja suora $6x + 7y - 8 = 0$ laskeva.
Lasketaan suorien välinen kulma.

$$36,869\dots^\circ + 40,601\dots^\circ \\ = 77,471\dots^\circ \approx 77,5^\circ$$



Vastaus Suuntakulmat ovat $36,9^\circ$ ja $-40,6^\circ$ ja suorien välinen kulma $77,5^\circ$

K24

Muokataan ensin suoran yhtälö yleiseen muotoon, jotta voidaan käyttää etäisyyden kaavaa.

$$y = \frac{2}{9}x - 3 \quad | \cdot 9$$

$$9y = 2x - 27$$

$$2x - 9y - 27 = 0$$

a) Lasketaan pisteen $(-5, -4)$ etäisyys suorasta $2x - 9y - 27 = 0$.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} && a = 2, b = -9, c = -27 \text{ ja } x_0 = -5, y_0 = -4 \\ &= \frac{|2 \cdot (-5) - 9 \cdot (-4) - 27|}{\sqrt{2^2 + (-9)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{85}} \left(= \frac{\sqrt{85}}{85} \right) \end{aligned}$$

b) Lasketaan pisteen $(18, 1)$ etäisyys suorasta $2x - 9y - 27 = 0$.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} & a = 2, b = -9, c = -27 \text{ ja } x_0 = 18, y_0 = 1 \\ &= \frac{|2 \cdot 18 - 9 \cdot 1 - 27|}{\sqrt{2^2 + (-9)^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vastaus a) $\frac{1}{\sqrt{85}} = \frac{\sqrt{85}}{85}$ b) 0

Huomaa: Piste $(18, 1)$ on suoralla.

K25

Määritetään pisteiden $(7, -3)$ ja $(2, 2a)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{2a - (-3)}{2 - 7} = \frac{2a + 3}{-5}$$

Määritetään suoran $18x + 4y - 1 = 0$ kulmakerroin.

$$18x + 4y - 1 = 0$$

$$4y = -18x + 1 \quad | :4$$

$$y = -\frac{9}{2}x + \frac{1}{4}$$

Suoran kulmakerroin on siis $-\frac{9}{2}$.

Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan mikäli niiden kulmakertoimien tulo on -1 . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio a .

$$\frac{2a + 3}{-5} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -1$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$$a = -\frac{37}{18} = -2\frac{1}{18}$$

Vastaus $a = -2\frac{1}{18}$

K26

Lasketaan pisteiden $(0, -\frac{1}{5})$ ja $(\frac{2}{5}, 0)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k_1 = \frac{0 - (-\frac{1}{5})}{\frac{2}{5} - 0} = \frac{1}{2}$$

Sijoitetaan esimerkiksi pisteen $(0, -\frac{1}{5})$ koordinaatit ja kulmakerroin suoran yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - (-\frac{1}{5}) &= \frac{1}{2}(x - 0) \\ y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Lasketaan pisteiden $(\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$ ja $(\frac{8}{5}, -\frac{2}{5})$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k_2 = \frac{-\frac{2}{5} - \frac{6}{5}}{\frac{8}{5} - \frac{4}{5}} = -2$$

Sijoitetaan esimerkiksi pisteen $(\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$ koordinaatit sekä kulmakerroin suoran yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - \frac{6}{5} &= -2(x - \frac{4}{5}) \\ y &= -2x + \frac{14}{5} \end{aligned}$$

Ratkaistaan suorien leikkauspiste yhtälöparilla.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{5} \\ y = -2x + \frac{14}{5} \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan yhtälöpari laskimella}$$

$$x = \frac{6}{5} \quad \text{ja} \quad y = \frac{2}{5}$$

Siis suorien leikkauspiste on $(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$.

Vastaus $(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$

K27

Lasketaan pisteen $(-2t, 4 + t)$ etäisyys suorasta $5x - 9y + 19t = 0$.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} && a = 5, b = -9, c = 19t \text{ ja } x_0 = -2t, y_0 = 4 + t \\ &= \frac{|5 \cdot (-2t) - 9 \cdot (4 + t) + 19t|}{\sqrt{106}} \\ &= \frac{|-10t - 36 - 9t + 19t|}{\sqrt{5^2 + (-9)^2}} \\ &= \frac{|-36|}{\sqrt{106}} \\ &= \frac{36}{\sqrt{106}} \quad \left(= \frac{18\sqrt{106}}{53} \right) \end{aligned}$$

On siis osoitettu, että pisteen etäisyys suorasta ei riipu vakion t arvosta.

K28

Kulmanpuolittajan jokainen piste (x, y) on yhtä kaukana kummastakin suorasta. Muodostetaan lausekkeet pisteen (x, y) etäisyydelle suorista.

Etäisyys suorasta $-2x + 6y + 10 = 0$ on

$$d_1 = \frac{|-2 \cdot x + 6 \cdot y + 10|}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2}} = \frac{|-2x + 6y + 10|}{2\sqrt{10}}.$$

Etäisyys suorasta $x + 3y - 11 = 0$ on

$$d_2 = \frac{|1 \cdot x + 3 \cdot y - 11|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|x + 3y - 11|}{\sqrt{10}}$$

Etäisyyksien tulee olla yhtä suuret. Muodostetaan etäisyyksistä yhtälö ja sievennetään se suoran yhtälöksi.

$$d_1 = d_2$$

$$\frac{|-2x + 6y + 10|}{2\sqrt{10}} = \frac{|x + 3y - 11|}{\sqrt{10}} \quad | \cdot 2\sqrt{10}$$

$$|-2x + 6y + 10| = 2|x + 3y - 11|$$

$$|-2x + 6y + 10| = |2(x + 3y - 11)|$$

$$-2x + 6y + 10 = 2(x + 3y - 11) \quad \text{tai} \quad -2x + 6y + 10 = -2(x + 3y - 11)$$

$$-2x + 6y + 10 = 2x + 6y - 22$$

$$-2x + 6y + 10 = -2x - 6y + 22$$

$$-4x = -32$$

$$12y = 12$$

$$x = 8$$

$$y = 1$$

Vastaus $x = 8$ tai $y = 1$

Huomaa: Yhtälön sieventämisessä voi hyödyntää laskinta.

K29

Muodostetaan yhtälöpari, poistetaan siitä muuttuja y ja ratkaistaan muuttuja x .

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 & | \cdot (-3) \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} + \begin{cases} -9x + 6y = -3 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases} & & \\ \hline -5x & = & 2 & | : (-5) \\ & & x = -\frac{2}{5} \end{array}$$

Sijoitetaan ratkaistu x esimerkiksi ylempään yhtälöön ja ratkaistaan leikkauspisteen y -koordinaatti.

$$\begin{aligned} 3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) - 2y &= 1 \\ -\frac{6}{5} - 2y &= 1 \\ 2y &= -\frac{6}{5} - 1 \\ 2y &= -\frac{11}{5} & | : 2 \\ y &= -\frac{11}{10} \end{aligned}$$

Siis suorien leikkauspiste on $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{11}{10}\right)$

Vastaus $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{11}{10}\right)$

K30

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 & (1) \\ 2x + 3y - z = 1 & (2) \\ x - 2y - 3z = -1 & (3) \end{cases}$$

Ratkaistaan ensin muuttuja x yhtälöiden (1) ja (3) yhtälöpareista.

$$+\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 & (1) \\ x - 2y - 3z = -1 & (3) \end{cases}$$

$$2x = 6 \quad | :2$$
$$x = 3$$

Sijoitetaan saatu x :n arvo yhtälöiden (1) ja (2) yhtälöpariin ja ratkaistaan muuttuja y .

$$\begin{cases} 3 + 2y + 3z = 7 & (1) \\ 2 \cdot 3 + 3y - z = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + 3z = 4 \\ 3y - z = -5 \end{cases} \quad | \cdot 3$$

$$+\begin{cases} 2y + 3z = 4 \\ 9y - 3z = -15 \end{cases}$$

$$11y = -11 \quad | :11$$
$$y = -1$$

Sijoitetaan saatu y :n arvo esimerkiksi yhtälöön $2y + 3z = 4$.

$$2 \cdot (-1) + 3z = 4$$

$$3z = 4 + 2$$

$$3z = 6$$

$$z = 2$$

Siis yhtälöryhmän ratkaisu on $x = 3$, $y = -1$ ja $z = 2$.

Vastaus $x = 3$, $y = -1$ ja $z = 2$

K31

Merkitään yhdessä kimpussa olevien ruusujen lukumäärää kirjaimella x , tulppaanien lukumäärää kirjaimella y ja liljojen lukumäärää kirjaimella z .

Kuhunkin kimppuun tulee 24 kukkaa, eli $x + y + z = 24$.

Ruusujen kappalehinta on 6 €, tulppaanien 4 € ja liljojen 3 € ja viisi kimppua maksaa yhteensä 610 €.

$$5 \cdot (6x + 4y + 3z) = 610$$

$$30x + 20y + 15z = 610$$

Kimpussa on ruusuja kaksi kertaa niin monta kuin tulppaneja ja liljoja yhteensä.

$$x = 2(y + z)$$

$$x - 2y - 2z = 0$$

Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ 30x + 20y + 15z = 610 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 16 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{cases}$$

Vastaus 16 ruusua, 2 tulppaania ja 6 liljaa

K32

Merkitään 10:n sentin kolikkojen lukumäärää kirjaimella x ,
20:n sentin kolikkojen lukumäärää kirjaimella y
ja 50:n sentin kolikkojen lukumäärää kirjaimella z .

Kolikoita oli yhteensä 100 kappaletta.

$$x + y + z = 100$$

10:n ja 50:n sentin kolikoita oli yhteensä yhtä paljon kuin 20:n sentin kolikoita.

$$x + z = y$$

$$x - y - z = 0$$

Rahaa oli mummin laskujen mukaan 21,40 euroa.

$$0,1x + 0,2y + 0,5z = 21,40$$

Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ x - y + z = 0 \\ 0,1x + 0,2y + 0,5z = 21,40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 34 \\ y = 50 \\ z = 16 \end{cases}$$

Mummi näyttää laskeneen oikein.

Mummi saattoi myös laskea väärin, sillä esimerkiksi, jos kolikoiden määrät ovat 2, 50 ja 48, niin lukumäärät täsmäävät.

$$x + y + z = 2 + 50 + 48 = 100$$

$$x - y + z = 2 - 50 + 48 = 0$$

Mutta rahan arvo ei täsmää.

$$0,1x + 0,2y + 0,5z = 0,1 \cdot 2 + 0,2 \cdot 50 + 0,5 \cdot 48 = 34,2 \neq 21,40$$

Vastaus

Mummi laski oikein, jos 10:n sentin kolikoita oli 34, 20:n sentin kolikoita 50 ja 50:n sentin kolikoita 16.

Mummo saattoi myös laskea väärin.

K33

- a) Ympyrän keskipiste on $(-1, 2)$ ja säde 2.
Ympyrän yhtälö on

$$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

- b) Ympyrän keskipiste on $(2, 0)$.
Ympyrä kulkee pisteen $(0, 2)$ kautta.
Lasketaan ympyrän säteen pituus.

$$r = \sqrt{(0 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

Ympyrän yhtälö on

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{8})^2$$
$$(x - 2)^2 + y^2 = 8$$

- Vastaus a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
 b) $(x - 2)^2 + y^2 = 8$

K34

Muokataan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x^2 + (y+1)^2 = 16 \\ & (x-0)^2 + (y-(-1))^2 = 4^2 \end{aligned}$$

Ympyrän keskipiste on $(0, -1)$ ja säde 4.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 3x^2 + 3y^2 = 27 \quad | :3 \\ & x^2 + y^2 = 9 \\ & (x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \end{aligned}$$

Ympyrän keskipiste on $(0, 0)$ ja säde 3.

Vastaus a) keskipiste $(0, -1)$ ja säde 4
 b) keskipiste $(0, 0)$ ja säde 3.

K35

Muokataan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4$$

$$x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 + y^2 - 2 \cdot 1y + 1^2 = 4 + 2^2 + 1^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

Ympyrän keskipiste on siis $(2,1)$ ja säde 3 .

Lasketaan pisteen $(6,4)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä.

$$d = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

Koska tämä etäisyys on suurempi kuin säde, niin piste $(6,4)$ on ympyrän ulkopuolella.

Pisteen $(6,4)$ etäisyys ympyrästä on $d - r = 5 - 3 = 2$.

Vastaus 2

K36

Ratkaistaan suoran yhtälöstä esimerkiksi muuttuja y ja sijoitetaan saatu lauseke $y = 3 - x$ ympyrän yhtälöön.

$$x^2 + (3 - x + 1)^2 = 8$$

$$x^2 + (4 - x)^2 = 8$$

$$x^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-x) + x^2 = 8$$

$$x^2 + 16 - 8x + x^2 = 8$$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} \\ &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu x :n arvo yhtälöön $y = 3 - x$.

$$y = 3 - 2 = 1$$

Siis suoran ja ympyrän leikkauspiste on $(2, 1)$.

Vastaus $(2, 1)$

K37

Muodostetaan yhtälöpari ja eliminoidaan yhtälöparista toisen asteen termit x^2 ja y^2 .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$\begin{array}{rcl} + \begin{cases} -x^2 - y^2 + 4x + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0 \end{cases} & & \\ \hline & 12x - 6y + 6 = 0 & | : 6 \\ & 2x - y + 1 = 0 & \end{array}$$

Saatiin suoran yhtälö. Mikäli ympyröillä on leikkauspisteitä, toteuttavat leikkauspisteiden koordinaatit myös saadun suoran yhtälön. Selvitetään suoran ja jommankumman ympyrän leikkauspisteet.

Suoran yhtälöstä saadaan $y = 2x + 1$.

Sijoitetaan yhtälöön $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$ ja ratkaistaan x .

$$x^2 + (2x + 1)^2 - 4x - 6 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 6 = 0$$

$$5x^2 = 5$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Lasketaan y -koordinaatit yhtälöstä $y = 2x + 1$.

Kun $x = 1$, niin $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

Leikkauspiste on $(1, 3)$.

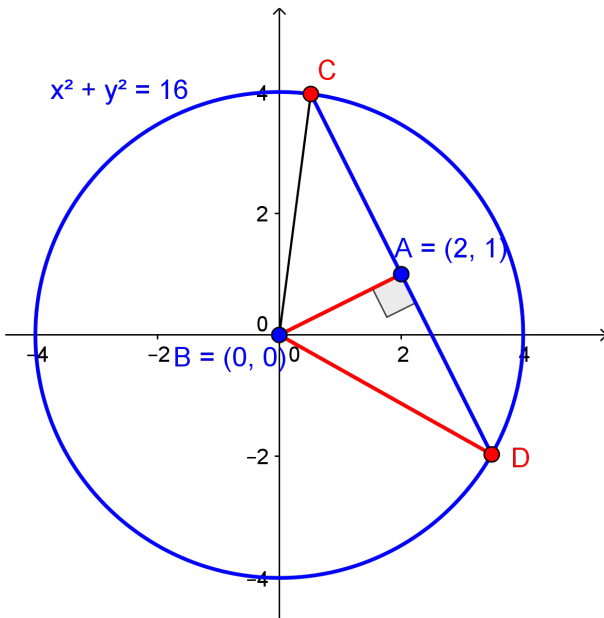
Kun $x = -1$, niin $y = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$.

Leikkauspiste on $(-1, -1)$.

Vastaus $(1, 3)$ ja $(-1, -1)$

K38

Ratkaisua voidaan havainnollistaa kuvan avulla.



Ympyrän $x^2 + y^2 = 16$ keskipiste on $(0, 0)$ ja säde 4.

Lasketaan pisteen $A = (2, 1)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä.

$$|BA| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

Sovelletaan kolmioon ABD Pythagoraan lausetta ja ratkaistaan janan AD pituus.

$$|BD|^2 = |BA|^2 + |AD|^2$$

$$4^2 = (\sqrt{5})^2 + |AD|^2$$

$$|AD|^2 = 4^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$|AD|^2 = 11$$

$$|AD| = \sqrt{11}$$

Lasketaan janteen CD pituus.

$$|CD| = 2|AD| = 2\sqrt{11}$$

Vastaus $2\sqrt{11}$

K39

Muokataan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 100x - 40y + 2675 &= 0 \\(x - 50)^2 + (y - 20)^2 &= 225\end{aligned}$$

Yhtälöstä nähdään, että ympyrän säteen neliö on $r^2 = 225$.

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A = \pi r^2 = 225\pi$$

Koordinaatiston yksikkönä on metri, joten pinta-ala on

$$225\pi \cdot 1 \text{ m}^2 = 706,858... \text{ m}^2 \approx 710 \text{ m}^2.$$

Vastaus 710 m^2

K40

Ympyrän keskipiste on $(-3, 3)$.

Ympyrän yhtälö on muotoa $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = r^2$.

Ympyrä kulkee pisteen $(-6, 9)$ kautta.

Ratkaistaan ympyrän säde.

$$\begin{aligned}(-6 + 3)^2 + (9 - 3)^2 &= r^2 \\ r^2 &= 45\end{aligned}$$

Siis ympyrän yhtälö on $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 45$.

Ympyrä leikkaa y -akselin, kun $x = 0$.

$$\begin{aligned}(0 + 3)^2 + (y - 3)^2 &= 45 && \text{Ratkaistaan yhtälö laskimella} \\ y = -3 &\text{ tai } y = 9\end{aligned}$$

y -akselin leikkauspisteet ovat $(0, -3)$ ja $(0, 9)$.

Ympyrä leikkaa x -akselin, kun $y = 0$.

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 + (0 - 3)^2 &= 45 && \text{Ratkaistaan yhtälö laskimella} \\ x = -9 &\text{ tai } x = 3\end{aligned}$$

x -akselin leikkauspisteet ovat $(-9, 0)$ ja $(3, 0)$.

Vastaus $(0, -3)$, $(0, 9)$, $(-9, 0)$ ja $(3, 0)$

K41

Muokataan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 - 8x - 20y - 1 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 10)^2 = 117$$

Ympyrän keskipiste on $(4, 10)$.

Kysytty piste on ympyrän ja pisteiden $(4, 10)$ ja $(-11, 0)$ kautta kulkevan suoran leikkauspiste. Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{10 - 0}{4 - (-11)} = \frac{2}{3}$$

Suora kulkee pisteen $(4, 10)$ kautta ja sen kulmakerroin on $\frac{2}{3}$.

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 10 = \frac{2}{3}(x - 4)$$

$$2x - 3y + 22 = 0$$

Muodostetaan suoran ja ympyrän yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan leikkauspisteet laskimella.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 20y - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 22 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = 13 \\ y = 16 \end{cases}$$

Lasketaan pisteen $(13, 16)$ etäisyys pisteestä $(-11, 0)$.

$$\sqrt{(13 - (-11))^2 + (16 - 0)^2} = \sqrt{832} = 8\sqrt{13}$$

Lasketaan pisteen $(-5, 4)$ etäisyys pisteestä $(-11, 0)$.

$$\sqrt{(-5 - (-11))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Piste $(-5, 4)$ on lähempänä.

Ympyrän piste $(-5, 4)$ on lähinnä pistettä $(-11, 0)$.

Vastaus $(-5, 4)$

K42

Huomaa! Tehtävässä pitäisi lukea:

Osoita, että parven $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 6a - 5 = 0$ ympyröillä on täsmälleen kaksi yhteistä pistettä. Mitkä nämä pisteet ovat?

1) Valitaan ensin ympyräparvesta kaksi ympyrää ja ratkaistaan niiden leikkauspisteet.

Kun $a = 0$, ympyrä on $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Kun $a = 1$, ympyrä on $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Ratkaistaan ympyröiden leikkauspisteet laskimella.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{11}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ympyröiden leikkauspisteet ovat $(-\frac{11}{5}, \frac{2}{5})$ ja $(1, 2)$.

2) Osoitetaan, että kaikki parven ympyrät kulkevat pisteiden $(-\frac{11}{5}, \frac{2}{5})$ ja $(1, 2)$ kautta.

Osoitetaan, että leikkauspiste $(-\frac{11}{5}, \frac{2}{5})$ toteuttaa parven yhtälön.

$$\begin{aligned}\left(-\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2a \cdot \left(-\frac{11}{5}\right) - 4a \cdot \frac{2}{5} + 6a - 5 &= 0 \\ \frac{121}{25} + \frac{4}{25} - 5 - \frac{22a}{5} - \frac{8a}{5} + 6a &= 0 \\ 0 &= 0 \\ \text{Tosi}\end{aligned}$$

Osoitetaan, että leikkauspiste $(1, 2)$ toteuttaa parven yhtälön.

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + 2a \cdot 1 - 4a \cdot 2 + 6a - 5 &= 0 \\ 1 + 4 + 2a - 8a + 6a - 5 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ \text{Tosi}\end{aligned}$$

Vastaus Yhteiset pisteet ovat $(-\frac{11}{5}, \frac{2}{5})$ ja $(1, 2)$.

K43

Tutkitaan, onko piste $(-3, 6)$ ympyrällä.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$$

$$(-3)^2 + 6^2 + 2 \cdot (-3) - 4 \cdot 6 - 15 = 0$$

$$0 = 0$$

Tosi

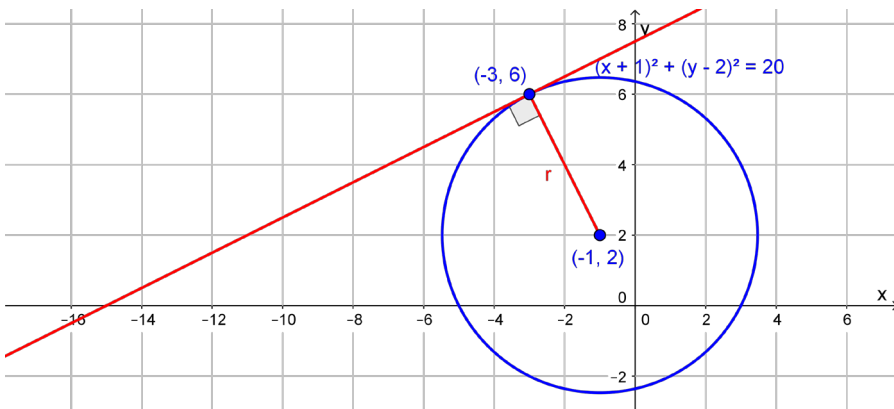
Piste $(-3, 6)$ on ympyrällä ja sen kautta voidaan piirtää ympyrälle täsmälleen yksi tangentti.

Muokataan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

Siis ympyrän keskipiste on $(-1, 2)$.



Lasketaan pisteiden $(-1, 2)$ ja $(-3, 6)$ välisen säteen kulmakerroin.

$$k = \frac{2-6}{-1-(-3)} = -2$$

Tangentin kulmakerroin on säteen kulmakertoimen käänteisluvun vastaluku $\frac{1}{2}$.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x - (-3))$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$$

Tangentti leikkaa x -akselin, kun $y = 0$.

$$\frac{1}{2}x + \frac{15}{2} = 0$$

$$x = -15$$

Siis tangentti leikkaa x -akselin pisteessä $(-15, 0)$.

Vastaus $(-15, 0)$

K44

Tutkitaan, ovatko pisteet $(-1, 8)$ ja $(-7, -4)$ ympyrällä.

$$x^2 + y^2 = 65$$

$$(-1)^2 + 8^2 = 65$$

$$65 = 65$$

Tosi

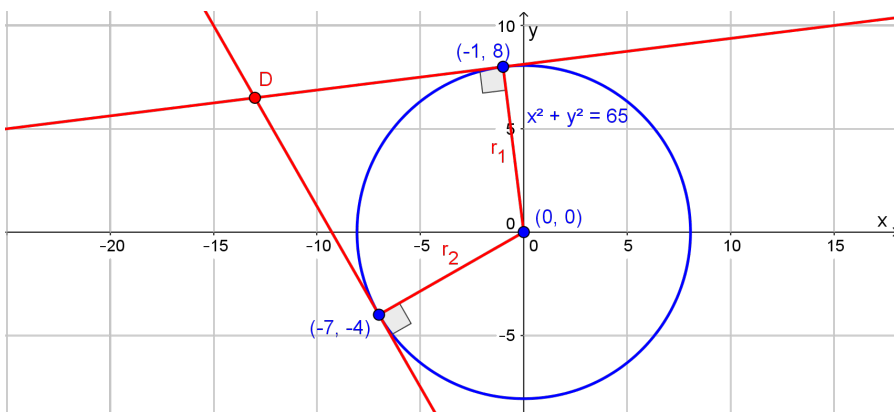
$$x^2 + y^2 = 65$$

$$(-7)^2 + (-4)^2 = 65$$

$$65 = 65$$

Tosi

Siis pisteet ovat ympyrällä.



Lasketaan pisteitä $(0, 0)$ ja $(-1, 8)$ yhdistävän säteen kulmakerroin.

$$k_1 = \frac{8-0}{-1-0} = -8.$$

Pisteeseen $(-1, 8)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $\frac{1}{8}$ ja yhtälö

$$y - 8 = \frac{1}{8}(x - (-1))$$

$$x - 8y + 65 = 0$$

Lasketaan pisteitä $(0, 0)$ ja $(-7, -4)$ yhdistävän säteen kulmakerroin.

$$k_2 = \frac{-4-0}{-7-0} = \frac{4}{7}$$

Pisteeseen $(-7, -4)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $-\frac{7}{4}$ ja yhtälö

$$y - (-4) = -\frac{7}{4}(x - (-7))$$

$$7x + 4y + 65 = 0$$

Ratkaistaan tangenttien leikkauspiste laskimella.

$$\begin{cases} x - 8y + 65 = 0 \\ 7x + 4y + 65 = 0 \end{cases}$$

$$x = -13 \text{ ja } y = \frac{13}{2}$$

Tangentit leikkaavat pisteessä $(-13, \frac{13}{2})$.

Vastaus $(-13, \frac{13}{2})$

K45

- a) Ratkaistaan laskimella ympyrän ja suoran leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 14x + 24 = 0 \\ 3x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x = -4 \text{ ja } y = 4$$

Suoralla ja ympyrällä on täsmälleen yksi leikkauspiste, joka on $(-4, 4)$. Siten suora on ympyrän tangentti.

- b) Selvitetään suoran kulmakerroin.

$$3x + 4y - 4 = 0$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 1$$

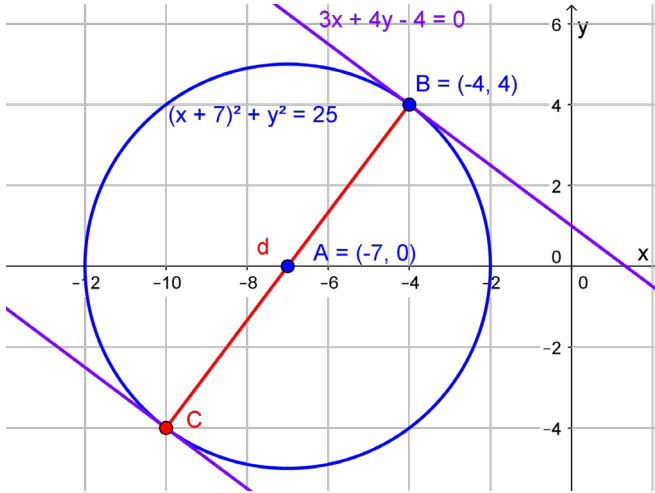
Koska toinen tangentti on yhdensuuntainen tämän tangentin kanssa, sen kulmakerroin on $-\frac{3}{4}$.

Muokataan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 + 14x + 24 = 0$$

$$(x + 7)^2 + y^2 = 25$$

Hahmotellaan ympyrälle tangenttien sivuamispisteiden B ja C välinen halkaisija.



Ympyrän keskipiste $A = (-7, 0)$ on halkaisijan keskipiste.

Halkaisijan toinen päätepiste on $B = (-4, 4)$.

Ratkaistaan pisteen $C = (x_0, y_0)$ koordinaatit.

$$\begin{aligned} \frac{x_0 - 4}{2} &= -7 & \frac{y_0 + 4}{2} &= 0 \\ x_0 &= -10 & y_0 &= -4 \end{aligned}$$

Tangentin kulmakerroin on $-\frac{3}{4}$ ja se kulkee pisteen $C = (-10, -4)$ kautta. Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - (-4) = -\frac{3}{4}(x - (-10))$$

$$3x + 4y + 46 = 0$$

Vastaus

b) $3x + 4y + 46 = 0$

K46

Muokataan yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 - 2kx + 14y + 49 - k^2 + k = 0$$

$$x^2 - 2kx + y^2 + 14y = k^2 - k - 49$$

$$x^2 - 2kx + k^2 + y^2 + 2 \cdot 7y + 7^2 = k^2 - k - 49 + k^2 + 7^2$$

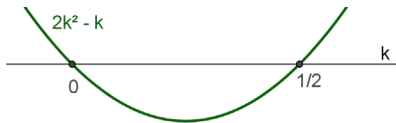
$$(x - k)^2 + (y + 7)^2 = 2k^2 - k$$

Yhtälö esittää ympyrää, kun $2k^2 - k > 0$.

Ratkaistaan funktion $2k^2 - k$ nollakohdat laskimella.

$$2k^2 + k = 0$$

$$k = 0 \quad \text{tai} \quad k = \frac{1}{2}$$



Epäyhtälö $2k^2 - k > 0$ toteutuu, kun $k < 0$ tai $k > \frac{1}{2}$.

Ympyrän keskipiste on $(k, -7)$ ja säde $\sqrt{2k^2 - k}$.

Vastaus $k < 0$ tai $k > \frac{1}{2}$,

keskipiste $(k, -7)$ ja säde $\sqrt{2k^2 - k}$

K47

a) $y = \frac{2}{3}x^2 + 1$

Yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$ ja toisen asteen termin kerroin on positiivinen, joten paraabeli aukeaa ylöspäin.

b) $x = y - \frac{1}{2}y^2$
 $x = -\frac{1}{2}y^2 + y$

Yhtälö on muotoa $x = ay^2 + by + c$ ja toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, joten paraabeli aukeaa vasemmalle.

c) $y - 2 = 3(x - 5)^2$
 $y - 2 = 3(x^2 - 10x + 25)$
 $y = 3x^2 - 30x + 77$

Yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$ ja toisen asteen termin kerroin on positiivinen, joten paraabeli aukeaa ylöspäin.

Vastaus	a)	ylöspäin
	b)	vasemmalle
	c)	ylöspäin

K48

Paraabelin huippu on pisteessä $(0, 1)$ ja sen akseli on y -akselin suuntainen. Muodostetaan paraabelin yhtälö.

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

$$y - 1 = a(x - 0)^2$$

$$y = ax^2 + 1$$

Paraabeli kulkee pisteen $(3, -1)$ kautta. Ratkaistaan kerroin a .

$$y = ax^2 + 1$$

$$-1 = a \cdot 3^2 + 1$$

$$-2 = 9a$$

$$a = -\frac{2}{9}$$

Paraabelin yhtälö on $y = -\frac{2}{9}x^2 + 1$.

Vastaus $y = -\frac{2}{9}x^2 + 1$

K49

Koska x -akselin leikkauspisteitä on kaksi, niin paraabeli on y -akselin suuntainen.

Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$.

Sijoitetaan pisteiden $(-1,0)$, $(5,0)$ ja $(0,10)$ koordinaatit paraabelin yhtälöön ja ratkaistaan laskimella kertoimet a , b ja c .

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \\ c = 10 \end{cases}$$

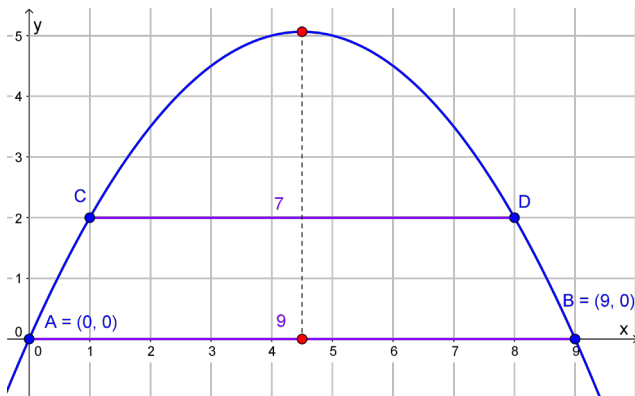
$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \\ c = 10 \end{cases}$$

Paraabelin yhtälö on $y = -2x^2 + 8x + 10$.

Vastaus $y = -2x^2 + 8x + 10$

K50

Valitaan koordinaatiston yksiköksi metri. Sijoitetaan tunnelin vasen alanurkka origoon ja oikea alanurkka positiiviselle x -akselille.



Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax^2 + bx + c$.

Paraabeli kulkee pisteiden $(0, 0)$, $(1, 2)$ ja $(9, 0)$ kautta.

Muodostetaan yhtälöryhmä ja ratkaistaan kertoimet a , b ja c laskimella.

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \\ a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 18a + 9b + c = 0 \end{cases}$$

$$a = -0,25, \quad b = 2,5 \quad \text{ja} \quad c = 0$$

Symmetrian perusteella paraabelin huippu on kohdassa $x = 4,5$.
Lasketaan huipun y -koordinaatti.

$$y = -0,25 \cdot 4,5^2 + 2,5 \cdot 4,5 = 5,0625 \approx 5,1$$

Tunnelin suurin korkeus on $5,1$ m

Vastaus $5,1$ m

M1

- a) Epätosi, koska epäyhtälö ei toteudu, kun $a = 0$
- b) Tosi. Kun $a < 0$, niin epäyhtälön vasen puoli on positiivinen ja oikea puoli negatiivinen. Kun $a \geq 0$, molemmat puolet ovat yhtä suuret.
- c) Epätosi, koska epäyhtälö ei toteudu a :n negatiivisilla arvoilla.

Vastaus b

M2

Luvun 5 etäisyys lukusuoralla luvusta -2 on $|5 - (-2)| = |7| = 7$

a) Tosi, koska $|1 - 8| = |-7| = 7$.

b) Epätosi, koska $|0 - (-3)| = |3| = 3$

c) Tosi, koska $|32 - 25| = |7| = 7$

Vastaus a, c

M3

a) Epätosi, koska $|-7 - 2| = |-9| = 9 \neq 5$.

b) Tosi, koska $-(-7) - 2 = |7 - 2| = |5| = 5$

c) Epätosi, koska $|2 - (-7)| = |2 + 7| = |9| = 9 \neq 5$

Vastaus b

M4

Lasketaan epäyhtälön $|5 - 2x| < 3$ vasemman puolen arvo kokonaisluvuilla 1, 2, 3 ja 4.

$$1: |5 - 2 \cdot 1| = |3| = 3$$

$$2: |5 - 2 \cdot 2| = |5 - 4| = |1| = 1$$

$$3: |5 - 2 \cdot 3| = |5 - 6| = |-1| = 1$$

$$4: |5 - 2 \cdot 4| = |5 - 8| = |-3| = 3$$

Epäyhtälön vasen puoli on pienempi kuin 3 kokonaisluvuilla $x = 2$ ja $x = 3$.

Vastaus c

M5

- a) Epäyhtälö ei toteudu esimerkiksi arvolla $x = 1$.

$$|2 - 3 \cdot 1| = |2 - 3| = |-1| = 1 > 0.$$

- b) Epäyhtälö toteutuu ainakin muuttujan arvolla $x = \frac{2}{3}$.

$$\left| 2 - 3 \cdot \frac{2}{3} \right| = |2 - 2| = 0 \leq 0.$$

- c) Tosi, katso b-kohta.

Vastaus c

M6

Epäyhtälön vasen puoli on suurempi tai yhtä suuri kuin 0.

- a) Tosi, koska tällöin epäyhtälön oikea puoli on pienempi kuin vasen puoli.
- b) Epätosi, koska arvolla $x = 0$ oikea puoli on yhtä suuri kuin vasen puoli.
- c) Epätosi, koska esimerkiksi arvolla $x = 0$ oikea puoli on suurempi kuin vasen puoli.

Vastaus a

M7

Määritetään pisteitä $(-5, -1)$ ja $(-7, 3)$ yhdistävän janan keskipiste.

$$\left(\frac{-5 + (-7)}{2}, \frac{-1 + 3}{2}\right) = \left(\frac{-12}{2}, \frac{2}{2}\right) = (-6, 1)$$

Vastaus c

M8

Määritetään pisteitä $(-5, -1)$ ja $(-7, 3)$ yhdistävän janan pituus.

$$\sqrt{(-7 - (-5))^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

Vastaus b

M9

a) Tosi, koska $((-3)^2 - 9) \cdot 9 = (9 - 9) \cdot 9 = 0$

b) Tosi, koska $(0^2 - 9) \cdot 0 = 0$

c) Tosi, koska $(9^2 - 9) \cdot 0 = 0$

Vastaus a, b ja c

M10

Piste (x, y) on yhtä kaukana origosta ja pisteestä $(0, 1)$.

Muodostetaan yhtälö.

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1}$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$2y - 1 = 0$$

Vastaus a

M11

Pisteiden $(3, -1)$ ja $(9, -4)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin

on $\frac{-4 - (-1)}{9 - 3} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.

Vastaus c

M12

Pisteillä $(7, 293)$ ja $(7, -313)$ on sama x -koordinaatti.

Suora on pystysuora.

Pystysuoran suoran suuntakulma on 90° .

Pystysuoran suoran x -koordinaatti on kaikkialla sama.

Piste $(7, 0)$ on suoralla.

Vastaus a, b, c

M13

Muokataan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$x + y + 1 = 0$$

$$y = -x - 1$$

Suoran kulmakerroin -1 on negatiivinen, joten suora on laskeva.

Vastaus b

M14

Muokataan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$2x + 6y - 14 = 0$$

$$6y = -2x + 14$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

Suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{3}$.

Vastaus c

M15

Määritetään suoran ja x -akselin leikkauspiste.

$$4x + 8 \cdot 0 - 24 = 0$$

$$4x = 24$$

$$x = 6$$

Siis x -akselin leikkauspiste on $(6, 0)$.

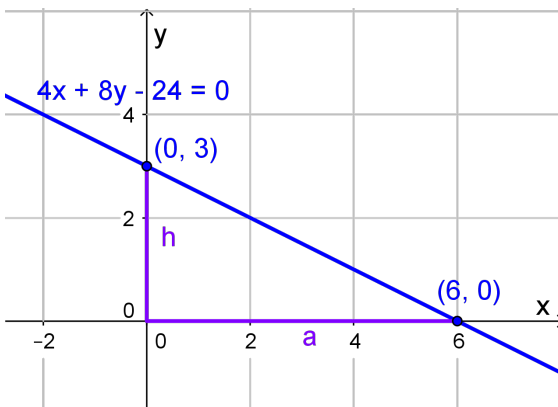
Määritetään suoran ja y -akselin leikkauspiste.

$$4 \cdot 0 + 8y - 24 = 0$$

$$8y = 24$$

$$y = 3$$

Siis y -akselin leikkauspiste on $(0, 3)$.



$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$$

Vastaus a

M16

Muokataan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$2x - 3y + 7 = 0$$

$$3y = 2x + 7$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

a) Tosi, koska suorien kulmakertoimet ovat samat.

b) $-8x + 12y + 99 = 0$

$$12x = 8x - 99$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{33}{4}$$

Tosi, koska suorien kulmakertoimet ovat samat.

c) $x - \frac{3}{2}y - 1 = 0$

$$\frac{3}{2}y = x - 1 \quad \left| \cdot \frac{2}{3} \right.$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

Tosi, koska suorien kulmakertoimet ovat samat.

Vastaus a, b ja c

M17

Muokataan suoran yhtälö $5x + 15y + 20 = 0$ ratkaistuun muotoon.

$$5x + 15y + 20 = 0$$

$$15y = -5x - 20$$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

Siis suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{3}$.

Normaalin kulmakerroin on 3.

Muodostetaan normaalin yhtälö sijoittamalla pisteen $(1, -1)$ koordinaatit sekä kulmakerroin suoran yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$y - (-1) = 3(x - 1)$$

$$y = 3x - 4$$

a) Tosi, koska piste toteuttaa normaalin yhtälön.

$$3 \cdot 3 - 4 = 5$$

$$5 = 5$$

b) Epätosi, koska piste ei toteuta normaalin yhtälöä.

$$3 \cdot 8 - 4 = 24 - 4 = 20 \neq 4.$$

c) Tosi, koska piste toteuttaa normaalin yhtälön.

$$3 \cdot 9 - 4 = 23$$

$$23 = 23$$

Vastaus a, c

M18

Lasketaan pisteen $(0,0)$ etäisyys suorasta $3x - 4y + 5 = 0$.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

Vastaus c

M19

Muodostetaan suorien yhtälöistä yhtälöryhmä ja ratkaistaan mahdolliset leikkauspisteet laskimella.

$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = x - 11 \\ 3x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$$

Ei ratkaisuja. Siis suorat eivät leikkaa samassa pisteessä.

Vastaus c

M20

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ 10x + 5y - 15 = 0 \end{cases} \quad | :5$$

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Huomataan, että yhtälöparissa on sama suoran yhtälö kahteen kertaan. Kaikki suoran pisteet toteuttavat yhtälöparin. Yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua.

Vastaus c

M21

Kuvasta nähdään, että ympyrän keskipiste on $(1, -2)$ ja säde $r = 4$. Sijoitetaan keskipisteen koordinaatit ja säde ympyrän yhtälöön.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - (-2))^2 = 4^2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

Vastaus b

M22

$$x^2 + (y - 1)^2 = 9$$

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

Ympyrän keskipiste on $(0,1)$ ja säde 3 .

Vastaus a, b

M23

Muokataan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

Ympyrän keskipiste on $(1, -1)$.

Vastaus b

M24

Muokataan yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 - 2ky + 1 = 0$$

$$(x - 0)^2 + (y - k)^2 = k^2 - 1$$

Yhtälö esittää pistettä, kun yhtälön oikea puoli on nolla.

$$k^2 - 1 = 0$$

$$k^2 = 1$$

$$k = \pm 1$$

Vastaus a, c

M25

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$$

$$+\begin{cases} -x^2 - y^2 + 2x - 4y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x - 2y + 1 = 0$$

Leikkauspisteet sijaitsevat siis suoralla $x - 2y + 1 = 0$.

Vastaus a

M26

Tutkitaan, toteuttaako piste yhtälöparin $\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$.

a) $x = 2, y = 4$

$$\begin{cases} 4 = 2 \cdot 2 \\ 2^2 + 4^2 = 20 \end{cases} \quad \text{toteutuu}$$

b) $x = -2, y = -4$

$$\begin{cases} -4 = 2 \cdot (-2) \\ (-2)^2 + (-4)^2 = 20 \end{cases} \quad \text{toteutuu}$$

c) $x = 2, y = -4$

$$\begin{cases} -4 \neq 2 \cdot 2 \\ 2^2 + (-4)^2 = 20 \end{cases} \quad \text{ei toteudu}$$

Vastaus a, b

M27

Tutkitaan, onko piste $(3, -4)$ ympyrällä sijoittamalla pisteen koordinaatit ympyrän yhtälöön.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 7$$

$$(3-1)^2 + (-4+2)^2 = 7$$

$$8 = 7$$

Epätosi

Siis piste ei ole ympyrällä.

Koska $8 > 7$, piste on ympyrän ulkopuolella.

Pisteen kautta voidaan piirtää ympyrälle täsmälleen kaksi tangenttia.

Vastaus c

M28

Lasketaan ympyrän keskipisteen $(1,4)$ ja pisteen $(-3,6)$ välisen säteen kulmakerroin.

$$\frac{6-4}{-3-1} = -\frac{1}{2}$$

Tangentti on kohtisuorassa tätä sädettä vastaan.

Tangentin kulmakerroin on 2 .

Vastaus c

M29

a) $y - 1 = 2(x - 3)^2$

$$y - 1 = 2(x^2 - 6x + 9)$$

$$y = 2x^2 - 12x + 19$$

2. asteen termin kerroin on positiivinen, joten paraabeli aukeaa ylöspäin.

b) Tosi, koska piste toteuttaa yhtälön.

$$y - 1 = 2(x - 3)^2$$

$$19 - 1 = 2(0 - 3)^2$$

$$18 = 2 \cdot 9$$

c) Paraabelin huippu on pisteessä $(3, 1)$.
Paraabeli aukeaa ylöspäin.
Siis paraabeli ei leikkaa x -akselia.

Vastaus a, b ja c

M30

Polttopiste on $(0, 2)$.

Johtosuora on $y = 0$.

Paraabeli huippu on y -akselilla.

Paraabelin huippu on yhtä kaukana polttopisteestä ja johtosuorasta.

Huippu on pisteessä $(0, 1)$.

Vastaus b

A1

a) Sijoitetaan $x = -2$.

$$\begin{aligned} & |3 - 2x| + |x + 4| \\ &= |3 - 2 \cdot (-2)| + |(-2) + 4| \\ &= |3 + 4| + |2| \\ &= |7| + 2 \\ &= 7 + 2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

b) Sijoitetaan $x = -5$.

$$\begin{aligned} & |3 - 2x| + |x + 4| \\ &= |3 - 2 \cdot (-5)| + |(-5) + 4| \\ &= |3 + 10| + |-1| \\ &= |13| + 1 \\ &= 13 + 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

c) Sijoitetaan $x = \pi$.

$$\begin{aligned} &|3 - 2x| + |x + 4| \\ &= |3 - 2\pi| + |\pi + 4| \end{aligned}$$

Koska $\pi \approx 3,14$, niin

$$3 - 2\pi < 0 \quad \text{ja} \quad |3 - 2\pi| = -(3 - 2\pi) = -3 + 2\pi.$$

$$\begin{aligned} &|3 - 2\pi| + |\pi + 4| \\ &= -3 + 2\pi + \pi + 4 \\ &= 1 + 3\pi \end{aligned}$$

Vastaus

a) 9 b) 14 c) $1 + 3\pi$

A2

- a) Muokataan yhtälöä niin, että itseisarvolauseke jää toiselle puolelle.

$$2|x-3|=1$$

$$|x-3|=\frac{1}{2}$$

$$x-3=\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x-3=-\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{7}{2} \qquad x=\frac{5}{2}$$

- b) Muokataan yhtälön molemmille puolille itseisarvolauseke.

$$|2x-1|=2|3-x|$$

$$|2x-1|=|2||3-x|$$

$$|2x-1|=|2(3-x)|$$

$$2x-1=2(3-x)$$

$$2x-1=6-2x$$

$$4x=7$$

$$x=\frac{7}{4}$$

$$2x-1=-2(3-x)$$

$$2x-1=-6+2x$$

$$\text{tai} \quad -1=-6$$

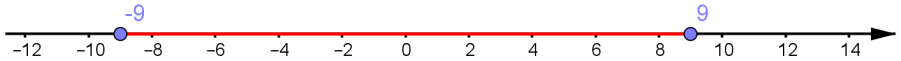
epätosi

Vastaus

$$\text{a) } x=\frac{7}{2} \quad \text{tai} \quad x=\frac{5}{2} \quad \text{b) } x=\frac{7}{4}$$

A3

- a) Luvut, joiden itseisarvo on pienempi tai yhtä suuri kuin 9, sijaitsevat lukusuoralla lukujen -9 ja 9 välissä päätepisteet mukaan luettuina.

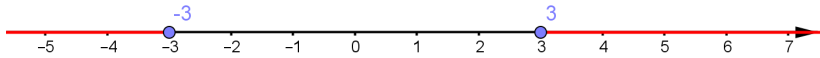


$$\begin{aligned} &|-5x + 6| \leq 9 \\ &-9 \leq -5x + 6 \leq 9 \end{aligned}$$

Puretaan kaksoisepäyhtälö kahdeksi epäyhtälöksi, joiden molempien tulee toteutua.

$$\begin{aligned} -9 &\leq -5x + 6 \quad \text{ja} \quad -5x + 6 \leq 9 \\ -15 &\leq -5x & -5x &\leq 3 \\ \frac{-15}{-5} &\geq x & x &\geq \frac{3}{-5} \\ x &\leq 3 & x &\geq -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

- b) Luvut, joiden itseisarvo on suurempi kuin kolme, sijaitsevat lukusuoralla joko luvun -3 vasemmalla puolella tai luvun 3 oikealla puolella.



$$|x| + 1 > 3$$

$$|x| + 1 > 3 \quad \text{tai} \quad |x| + 1 < -3$$

$$|x| > 2 \quad \quad \quad |x| < -4$$

$$-2 < x \quad \text{tai} \quad x > 2$$

Ei ratkaisua

Vastaus

$$\text{a) } -\frac{3}{5} \leq x \leq 5 \quad \text{b) } x < -2 \quad \text{tai} \quad x > 2$$

A4

Määritetään niiden suorien leikkauspiste, joihin a :n arvo ei vaikuta. Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä y .

$$3x - y + 6 = 0$$

$$y = 3x + 6$$

Sijoitetaan y toiseen yhtälöön ja ratkaistaan x .

$$2x + 3y - 7 = 0$$

$$2x + 3(3x + 6) - 7 = 0$$

$$2x + 9x + 18 - 7 = 0$$

$$11x = -11$$

$$x = -1$$

Lasketaan y .

$$y = 3x + 6 = 3 \cdot (-1) + 6 = 3$$

Leikkauspiste on siis $(-1, 3)$. Ratkaistaan viimeisestä yhtälöstä a sijoittamalla leikkauspisteen koordinaatit.

$$3x + ay + 15 = 0$$

$$3 \cdot (-1) + a \cdot (3) + 15 = 0$$

$$-3 + 3a + 15 = 0$$

$$3a = -12$$

$$a = -4$$

Vastaus

$a = -4$. Leikkauspiste $(-1, 3)$.

A5

Lasketaan janan AB keskipiste ja kulmakerroin.

$$\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{-5+(-3)}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -4\right)$$

$$k_1 = \frac{-3-(-5)}{1-(-2)} = \frac{-3+5}{1+2} = \frac{2}{3}$$

Ratkaistaan keskinormaalin kulmakerroin.

$$k_1 k_2 = -1$$

$$\frac{2}{3} k_2 = -1$$

$$k_2 = -\frac{3}{2}$$

Keskinormaali kulkee pisteen $\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$ kautta ja sen kulmakerroin on $-\frac{3}{2}$. Muodostetaan keskinormaalin yhtälö.

$$y - (-4) = -\frac{3}{2} \left(x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$$

$$y + 4 = -\frac{3}{2} x - \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{3}{2} x - \frac{19}{4} \quad | \cdot 4$$

$$4y = -6x - 19$$

$$6x + 4y + 19 = 0$$

Vastaus

$$4y + 6x + 19 = 0$$

A6

- a) Lasketaan ympyrän säteen pituus.

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-10 - (-8))^2 + (0 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{(-10 + 8)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + 9} \\ &= \sqrt{4 + 9} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

- b) Muodostetaan ympyrän yhtälö.

$$\begin{aligned} (x - (-10))^2 + (y - 0)^2 &= (\sqrt{13})^2 \\ (x + 10)^2 + y^2 &= 13 \end{aligned}$$

- c) Tutkitaan pisteen $(-7, 1)$ etäisyyttä ympyrän keskipisteestä.

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-7 - (-10))^2 + (1 - 0)^2} \\ &= \sqrt{(-7 + 10)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 1} \\ &= \sqrt{9 + 1} \\ &= \sqrt{10} < \sqrt{13} \end{aligned}$$

Koska etäisyys keskipisteestä on pienempi kuin ympyrän säde, piste on ympyrän sisäpuolella.

Vastaus

- a) $\sqrt{13}$ b) $(x + 10)^2 + y^2 = 13$ c) Sisäpuolella

A7

Sijoitetaan huipun $(-1, 5)$ koordinaatit yhtälöön.

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

$$y - 5 = a(x - (-1))^2$$

$$y - 5 = a(x + 1)^2$$

Sijoitetaan pisteen $(0, 3)$ koordinaatit ja ratkaistaan kerroin a .

$$3 - 5 = a(0 - 1)^2$$

$$-2 = a(-1)^2$$

$$-2 = a$$

Muodostetaan paraabelin yhtälö.

$$y - 5 = -2(x + 1)^2$$

$$y - 5 = -2(x^2 + 2x + 1)$$

$$y - 5 = -2x^2 - 4x - 2$$

$$y = -2x^2 - 4x + 3$$

Vastaus

$$y = -2x^2 - 4x + 3$$

A8

Muokataan molemmat suoran yhtälöt kulmakerroinmuotoon.

$$2x - ax - y = 0$$

$$y = 2x - ax$$

$$y = (2 - a)x$$

$$2ax - x - 2y = 0$$

$$2y = 2ax - x \quad | : 2$$

$$y = ax - \frac{1}{2}x$$

$$y = (a - \frac{1}{2})x$$

- a) Jotta suorat olisivat yhdensuuntaiset, niiden kulmakertoimien pitää olla yhtä suuret.

$$2 - a = a - \frac{1}{2}$$

$$-2a = -\frac{5}{2} \quad | : (-2)$$

$$a = \frac{5}{4}$$

- b) Jotta suorat olisivat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niiden kulmakertoimien tulo pitää olla -1 .

$$(2 - a)(a - \frac{1}{2}) = -1$$

$$2a - 1 - a^2 + \frac{1}{2}a = -1$$

$$\frac{5}{2}a - a^2 = 0$$

$$a(\frac{5}{2} - a) = 0$$

$$a = 0 \text{ tai } a = \frac{5}{2}$$

Vastaus

a) $a = \frac{5}{4}$ b) $a = 0$ tai $a = \frac{5}{2}$

A9

a) Muokataan yhtälö tunnistettavaan muotoon.

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 3 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 9 + y^2 - 2 \cdot 1y + 1^2 - 1 - 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y - 1)^2 - 1 - 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$$

Kyseessä on ympyrä, jonka keskipiste on $(3, 1)$ ja säde $\sqrt{13}$.

b) Muokataan yhtälö tunnistettavaan muotoon.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 7 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2 - 1 + y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 - 4 + 7 = 0$$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + 7 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = -2$$

Koska oikealla puolella on negatiivinen luku, mikään piste ei toteuta yhtälöä.

c) Muokataan yhtälö tunnistettavaan muotoon.

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 20 = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 20 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2 - 16 + y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2 - 4 + 20 = 0$$

$$(x + 4)^2 - 16 + (y - 2)^2 - 4 + 20 = 0$$

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

Yhtälö esittää pistettä $(-4, 2)$.

Vastaus

a) Ympyrä, jonka keskipiste on $(3, 1)$ ja säde $\sqrt{13}$.

b) Ei mitään pistejoukkoa.

c) Pistettä $(-4, 2)$.

A10

Suora on ympyrän tangentti, jos niillä on vain yksi yhteinen piste.
Ratkaistaan suoran ja ympyrän yhteiset pisteet.

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

Ratkaistaan suoran yhtälöstä y ja sijoitetaan se ympyrän yhtälöön.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 10 \\ y &= -3x + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + (-3x + 10)^2 &= 10 \\ x^2 + 9x^2 - 60x + 100 &= 10 \\ 10x^2 - 60x + 90 &= 0 & \quad | : 10 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x - 3)^2 &= 0 \\ x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -3x + 10 \\ &= -3 \cdot 3 + 10 \\ &= -9 + 10 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Koska vain yksi piste toteuttaa yhtälön, on kyseessä tangentti.

B1

$$|x - 3|$$

a) $|-2 - 3| = |-5| = 5$

b) $|\sqrt{8} - 3|$

Koska $\sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$, niin $\sqrt{8} - 3 < 0$ ja

$$|\sqrt{8} - 3| = -(\sqrt{8} - 3) = 3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

c) $|\sqrt{12} - 3|$

Koska $\sqrt{12} > \sqrt{9} = 3$, niin $\sqrt{12} - 3 > 0$ ja

$$|\sqrt{12} - 3| = \sqrt{12} - 3 = 2\sqrt{3} - 3.$$

Vastaus

$$|x - 3| \quad \text{a) } 5 \quad \text{b) } 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{c) } 2\sqrt{3} - 3$$

B2

- a) Ratkaistaan suoran kulmakerroin

$$2x - 9y + 26 = 0$$

$$9y = 2x + 26$$

$$y = \frac{2}{9}x + \frac{26}{9}$$

$$k = \frac{2}{9}$$

Koska $k = \tan \alpha$, niin suuntakulma on

$$\alpha = \tan^{-1}(k) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) \approx 12,5^\circ.$$

- b) Käytetään pisteen etäisyyden kaavaa.

$$\begin{aligned} \frac{|2 \cdot (-5) - 9 \cdot (3) + 26|}{\sqrt{2^2 + (-9)^2}} &= \frac{|-10 - 27 + 26|}{\sqrt{4 + 81}} \\ &= \frac{|-11|}{\sqrt{85}} = \frac{11}{\sqrt{85}} \approx 1,2 \end{aligned}$$

Vastaus

- a) $12,5^\circ$ b) 1,2

B3

Määritetään suoran kulmakerroin.

$$-6x + 8y + 17 = 0$$

$$8y = 6x - 17 \quad | :8$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{17}{8}$$

Suoran kulmakerroin on $\frac{3}{4}$.

Suoralle piirretyn normaalin kulmakerroin on $-\frac{4}{3}$.

Muodostetaan pisteen $(-3, 2)$ kautta kulkevan normaalin yhtälö.

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x - (-3)) \quad | \cdot 3$$

$$3y - 6 = -4(x + 3)$$

$$4x + 3y + 6 = 0$$

Ratkaistaan suoran ja normaalin leikkauspiste.

$$\begin{cases} -6x + 8y + 17 = 0 \\ 4x + 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{50} \quad \text{ja} \quad x = -\frac{52}{50}$$

$$\text{Vastaus} \quad \left(\frac{3}{50}, -\frac{52}{25}\right)$$

B4

Merkitään perusmaksua kirjaimella p ja kilometriveloitusta kirjaimella k . Kootaan annetut tiedot taulukkoon.

	perusmaksu	kilometriveloitus	yhteensä
15 km matka	p	$15k$	29,90
8 km matka	p	$8k$	17,54

Kirjoitetaan taulukon tiedoista yhtälöpari ja ratkaistaan se.

$$\begin{cases} p + 15k = 29,90 \\ p + 8k = 17,54 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari laskimella.

$$p \approx 3,41 \text{ ja } k = 1,77$$

Vastaus

Perusmaksu on 3,41 euroa ja kilometritaksa on 1,77 euroa.

B5

Ympyrän yhtälön yleinen muoto on $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Tavoitteena on määrittää kertoimien a , b ja c arvot.

Pisteet $(-2, 6)$, $(-8, 3)$ ja $(-5, -3)$ toteuttavat ympyrän yhtälön.

Sijoittamalla pisteiden koordinaatit ympyrän yhtälöön saadaan kolme yhtälöä.

$$\begin{cases} (-2)^2 + 6^2 + a \cdot (-2) + b \cdot 6 + c = 0 \\ (-8)^2 + 3^2 + a \cdot (-8) + b \cdot 3 + c = 0 \\ (-5)^2 + (-3)^2 + a \cdot (-5) + b \cdot (-3) + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + 6b + c = -40 \\ -8a + 3b + c = -73 \\ -5a - 3b + c = -34 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä laskimella.

$$a = 7, \quad b = -3 \quad \text{ja} \quad c = -8$$

Ympyrän yhtälö on

$$x^2 + y^2 + 7x - 3y - 8 = 0.$$

Muokataan yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 + 7x - 3y - 8 = 0$$

$$x^2 + 7x + y^2 - 3y = 8$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + y^2 + 2y \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 8 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}$$

Ympyrän keskipiste on $\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Vastaus

$$x^2 + y^2 + 7x - 3y - 8 = 0 \quad \text{ja} \quad \left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

B6

Ne pisteet, jotka ovat yhtä kaukana Reinon ja Vertin kesämökeistä, sijaitsevat keskinormaalilla, joka on piirretty mökkejä yhdistävälle janalle. Tutkitaan, missä pisteissä keskinormaali leikkaa ympyrän.

Määritetään ensin mökkejä yhdistävän janan keskipiste.

$$C = \left(\frac{-100 + 20}{2}, \frac{60 + 120}{2} \right) = \left(\frac{-80}{2}, \frac{180}{2} \right) = (-40, 90)$$

Lasketaan janan kulmakerroin.

$$k_1 = \frac{120 - 60}{20 - (-100)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

Keskinormaalin kulmakerroin on $k_2 = -2$.

Muodostetaan keskinormaalin yhtälö.

$$y - 90 = -2(x - (-40))$$

$$y = -2x - 80 + 90$$

$$y = -2x + 10$$

Määritetään seuraavaksi Hepolampea kuvaavan ympyrän yhtälö.

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 75^2$$

Etsitään suoran ja ympyrän leikkauspisteet ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = -2x + 10 \\ (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 75^2 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari laskimella.

$$x = 3 - 2\sqrt{281} \approx -30,5 \text{ ja } y = 4 + 4\sqrt{281} \approx 71,1$$

tai

$$x = 3 + 2\sqrt{281} \approx 36,5 \text{ ja } y = 4 - 4\sqrt{281} \approx -63,1$$

Leikkauspisteet ovat $(-30,5; 71,1)$ ja $(36,5; -63,1)$.

Tutkitaan leikkauspisteiden etäisyyttä mökkeihin. Koska etäisyys molempiin mökkeihin on sama, valitaan vertailupisteeksi Reinon mökki pisteessä $(-100, 60)$.

$$\sqrt{(-30,5 - (-100))^2 + (71,1 - 60)^2} \approx 70,4$$

$$\sqrt{(36,5 - (-100))^2 + (-63,1 - 60)^2} \approx 183,8$$

Piste $(-30,5; 71,1)$ on lähempänä mökkejä.

Saunan paikka on $(-31, 71)$.

Saunan ja mökin välinen etäisyys on 70 m.

Vastaus

piste $(-31, 71)$, etäisyys 70 m

B7

Tutkitaan, onko piste $(1,1)$ ympyrällä $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 24 = 0$.

Täydennetään ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 24 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 10y + 25 - 25 + 24 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 5$$

$$(x - (-2))^2 + (y - 5)^2 = \sqrt{5}^2$$

Sijoitetaan $x = 1$ ja $y = 1$.

$$(1 - (-2))^2 + (1 - 5)^2 = \sqrt{5}^2$$

$$3^2 + (-4)^2 = 5$$

$$9 + 16 = 5$$

$$25 = 5$$

epätosi

Koska $25 > 5$, piste $(1, 1)$ on ympyrän ulkopuolella ja sen kautta voidaan piirtää ympyrälle täsmälleen kaksi tangenttia.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 1 = k(x - 1)$$

$$y - 1 = kx - k$$

$$-kx + y - 1 + k = 0$$

Muodostetaan lauseke ympyrän keskipisteen $(-2, 5)$ etäisyydelle tangentista $-kx + y - 1 + k = 0$.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|-k \cdot (-2) + 1 \cdot 5 - 1 + k|}{\sqrt{(-k)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|3k + 4|}{\sqrt{k^2 + 1}} \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö, josta voidaan ratkaista tangenttien kulmakertoimet.

Ympyrän keskipisteen etäisyys tangentista on yhtä suuri kuin ympyrän säde $\sqrt{5}$.

$$\frac{|3k + 4|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5} \quad | \cdot \sqrt{k^2 + 1} \quad (\neq 0)$$

$$|3k + 4| = \sqrt{5} \sqrt{k^2 + 1}$$

$$(3k + 4)^2 = \left(\sqrt{5} \sqrt{k^2 + 1} \right)^2$$

$$9k^2 + 24k + 16 = 5k^2 + 5$$

$$4k^2 + 24k + 11 = 0$$

$$k = -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad k = -\frac{11}{2}$$

Sijoitetaan saadut kulmakertoimet tangentin yhtälöön.

$$-kx + y - 1 + k = 0$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)x + y - 1 - \frac{1}{2} = 0$$

$$x + 2y - 2 - 1 = 0$$

$$x + 2y - 3 = 0$$

$$-\left(-\frac{11}{2}\right)x + y - 1 - \frac{11}{2} = 0$$

$$11x + 2y - 2 - 11 = 0$$

$$11x + 2y - 13 = 0$$

Vastaus

$$x + 2y - 3 = 0 \quad \text{ja} \quad 11x + 2y - 13 = 0$$

B8

Pisteen (x, y) etäisyys pisteestä $(0, 1)$ on $\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

Pisteen (x, y) etäisyys suorasta $y = -3$ on $|y - (-3)|$.

Merkitään etäisyydet yhtä suuriksi ja ratkaistaan muuttuja y .

$$|y - (-3)| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$(y+3)^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$y^2 + 6y + 9 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$8y = x^2 - 8$$

$$y = \frac{1}{8}x^2 - 1$$

Koska toisen asteen termin kerroin on positiivinen, pisteet muodostavat ylöspäin aukeavan paraabelin.

Vastaus

ylöspäin aukeavan paraabelin $y = \frac{1}{8}x^2 - 1$

B9

Merkitään kuminauhan keskipistettä (x, y) . Tehtävänä on etsiä yhtälö, jonka keskipiste toteuttaa.

Kuminauhan päätepisteet ovat $(1, -1)$ ja (a, b) .

Sijoitetaan paraabelin yhtälö keskipisteen koordinaatteihin.

$$x = \frac{1+a}{2} \qquad y = \frac{-1+b}{2}$$

$$a = 2x - 1 \qquad b = 2y + 1$$

Piste (a, b) toteuttaa paraabelin yhtälön.

$$a = -b^2 + 16b - 64$$

$$2y + 1 = -(2x - 1)^2 + 16(2x - 1) - 64$$

$$2y + 1 = -4x^2 + 4x - 1 + 32x - 16 - 64$$

$$2y = -4x^2 + 36x - 82$$

$$y = -2x^2 + 18x - 41$$

Vastaus

paraabelin $y = -2x^2 + 18x - 41$

B10

Täydennetään yhtälö ympyrän keskipistemuotoon.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2px - 8py + 9p^2 + 2p &= 0 \\x^2 - 2px + p^2 - p^2 + y^2 - 8py + (4p)^2 - (4p)^2 + 9p^2 + 2p &= 0 \\(x - p)^2 + (y - 4p)^2 - p^2 - 16p^2 + 9p^2 + 2p &= 0 \\(x - p)^2 + (y - 4p)^2 - 8p^2 + 2p &= 0 \\(x - p)^2 + (y - 4p)^2 &= 8p^2 - 2p\end{aligned}$$

Yhtälö esittää ympyrää, kun yhtälön oikea puoli on positiivinen.

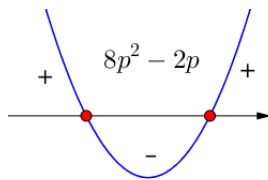
Selvitetään funktion $8p^2 - 2p$ nollakohdat ja kuvaaja.

$$8p^2 - 2p = 0$$

$$2p(4p - 1) = 0$$

$$2p = 0 \text{ tai } 4p - 1 = 0$$

$$p = 0 \text{ tai } p = \frac{1}{4}$$



Siis $8p^2 - 2p > 0$, kun $p < 0$ tai $p > \frac{1}{4}$.

Ympyröiden keskipisteet $(p, 4p)$ toteuttavat yhtälön $y = 4x$.

Ratkaistaan vielä alue, jolla keskipisteet voivat sijaita.

Koska $x = p$ ja $p < 0$ tai $p > \frac{1}{4}$, ratkaisu on se alue suoraa, missä
 $x < 0$ tai $x > \frac{1}{4}$

Vastaus

Esittää ympyrää, kun $p < 0$ tai $p > \frac{1}{4}$.

Keskipisteiden muodostama pistejoukko on se osa suoraa $y = 4x$,
missä $x < 0$ tai $x > \frac{1}{4}$.