MAA13 7. tunti

Tehtävä 1. K2024/t.6/B1

6. Piste hukassa 12 p.

Tason pisteen C etäisyys pisteestä $A = (5, 4)$ on $\sqrt{20}$ ja etäisyys pisteestä $B = (8, -2)$ on $\sqrt{65}$. Lisäksi pisteen C etäisyys pisteen B kautta kulkevasta, vektorin $5\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ suuntaisesta suorasta s on alle 7. Määritä pisteen C koordinaatit sekä pisteen C tarkka etäisyys suorasta s.

Tehtävä 2. K2023/t.7/B1

7. Vektoreiden summa 12 p.

Tarkastellaan vektoreita $\vec{u} = \vec{i} + 2\,\vec{j}$ ja $\vec{v} = \sin(2t)\vec{i} + \cos(4t)\vec{j}$, missä $t \geq 0$.

1. Määritä vektori $\vec{u} + \vec{v}$, kun $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ ja $t = \frac{3\pi}{4}$. **(4 p.)**
2. Mikä tasokuvio muodostuu vektorin $\vec{u} + \vec{v}$ kärkipisteestä, kun t saa arvot välillä $[0, \pi]$? Anna vastaus yhtälönä muodossa $y = f(x)$. Ratkaisussa voi käyttää esimerkiksi kaavaa $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$. **(8 p.)**

Tehtävä 3. K2025/t.8/B1

8. Janojen pituudet 12 p.

Tasossa on pisteet $A = (-6, -1)$, $B = (-1, 11)$ ja $C = (8, -1)$. Valitaan piste X janalta AB, piste Y janalta BC ja piste Z janalta AC niin, että $|AX| = |AZ| = a$, $|BX| = |BY| = b$ ja $|CZ| = |CY| = c$.

Muodosta yhtälöryhmä luvuille a, b ja c, ja ratkaise se.

Tehtävä 4. S2025/t.11/B2

11. Ellipsin yhtälö 12 p.

Olkoot P ja Q tason pisteitä. Ellipsi on niiden tason pisteiden Z muodostama käyrä, joille etäisyyksien $|PZ|$ ja $|QZ|$ summa on vakio $k > |PQ|$. Pisteitä P ja Q kutsutaan ellipsin *polttopisteiksi*.

Tarkastellaan ellipsiä, joka on symmetrinen koordinaattiakselien suhteen ja leikkaa ne pisteissä $(\pm a, 0)$ ja $(0, \pm 1)$, kun $a > 1$. Tällöin polttopisteet sijaitsevat x-akselilla. Määritä polttopisteet P ja Q parametrin a avulla ja osoita, että tämän ellipsin yhtälö on

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$$

käyttämättä muita tietoja ellipseistä kuin yllä annettua määritelmää.

Tehtävä 5. K2025/t.13/B2

13. Vektorien ristitulo 12 p.

Vektorien $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ ja $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ ristitulo määritellään lausekkeella

$$\overline{a} \times \overline{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\overline{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\overline{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\overline{k}.$$

Todista tätä lauseketta käyttäen seuraavat ristitulovektorin tunnetut ominaisuudet:

1. Se on kohtisuorassa vektoria $\overline{a}$ vastaan. **(3 p.)**
2. Sen pituus on sama kuin vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ virittämän suunnikkaan ala. **(9 p.)**

Tehtävä 6. K2022/t.11/B2

11. Mitkä vektorit? 12 p.

1. Tason vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} (\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = 2 \\ 2\,\overline{a} \cdot \overline{a} + 3\,\overline{b} \cdot \overline{b} = 5. \end{cases}$$

   Määritä vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pituudet. **(5 p.)**

2. Osatehtävän 1 vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ toteuttavat lisäksi yhtälöparin

$$\begin{cases} \overline{a} \cdot \overline{b} = \dfrac{\sqrt{11}}{10} \\ \overline{b} \cdot (\sqrt{3}\,\overline{i} - \overline{j}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

   Merkitään vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välistä kulmaa symbolilla φ ja vektorien $\sqrt{3}\,\overline{i} - \overline{j}$ ja $\overline{b}$ välistä kulmaa symbolilla θ. Määritä kulmien φ ja θ suuruudet. **(5 p.)**

3. Määritä kaikki mahdolliset vektorit $\overline{a}$, jotka toteuttavat osatehtävien 1 ja 2 ehdot, kun $\overline{b} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\overline{j}$. **(2 p.)**

Tehtävä 7. S2024/t.12/B2 (aineisto 12.A on tehtävänannon jatkossa ja animaatio on katsottavissa netistä)

12. Bézier-käyriä 12 p.

> **Aineisto**
>
> 12.A Teksti ja animaatio: Bézier-käyrän määritelmä

Bézier-käyriä käytetään tietokoneavusteisessa suunnittelussa (CAD), joka on vektorigrafiikan tärkeä sovelluskohde. Bézier-käyrä määritetään niin sanottujen ohjauspisteiden avulla, kuten tekstissä 12.A on kuvattu.

1. Eräs lineaarinen Bézier-käyrä koostuu pisteistä $B(t) = (4t, t + 2), 0 \le t \le 1$. Määritä tämän käyrän ohjauspisteet. **(4 p.)**
2. Erään toisen asteen Bézier-käyrän ohjauspisteet ovat $P_0 = (-2, 0)$, $P_1 = (0, 8)$ ja $P_2 = (2, 0)$. Määritä käyrän yhtälö muodossa $y = f(x)$. **(8 p.)**

Aineisto 12.A:

12. Bézier-käyriä

12.A Teksti ja animaatio: Bézier-käyrän määritelmä

Bézier-käyrä määritellään ohjauspisteillä $P_0, \ldots, P_n$, jossa n on käyrän aste ($n = 1$ lineaariselle käyrälle, $n = 2$ toisen asteen käyrälle jne.). Ensimmäinen ja viimeinen ohjauspiste ovat aina käyrän päätepisteitä.

Ohjauspisteet P_0 ja P_1 määrittävät lineaarisen Bézier-käyrän, joka on parametrisoitu käyrä

$$B(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1-t)P_0 + tP_1, \quad 0 \le t \le 1.$$

Tämä käyrä on ohjauspisteet yhdistävä jana. Tässä lausekkeessa pisteitä käsitellään kuten paikkavektoreita. Esimerkiksi

$$\frac{1}{4}(2,1) + \frac{3}{4}(3,5) = \left(\frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{3}{4}\cdot 3,\ \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 5\right) = \left(\frac{11}{4}, 4\right).$$

Toisen asteen Bézier-käyrä ohjauspisteillä P_0, P_1 ja P_2 on parametrisoitu käyrä

$$B(t) = (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2], \quad 0 \le t \le 1.$$

Huomaa, että hakasulkeissa on pisteitä P_0 ja P_1 ja pisteitä P_1 ja P_2 vastaavat lineaariset Bézier-käyrän pisteet. Alla olevassa animaatiossa toisen asteen Bézier-käyrän muodostaminen on esitetty visuaalisesti.

