

7.1

a) Kun tutkitaan, onko luku 79 alkuluku, se on jaettava lukua $\sqrt{79} = 8,888\dots$ pienemmillä alkuluvuilla 2, 3, 5 ja 7.

$$79 : 2 = 39,5$$

$$79 : 3 = 26,333\dots$$

$$79 : 5 = 15,8$$

$$79 : 7 = 11,285\dots$$

Koska mikään jakolaskuista ei mene tasan, luku 79 on alkuluku.

b) Kun tutkitaan, onko luku 143 alkuluku, se on jaettava lukua $\sqrt{143} = 11,958\dots$ pienemmillä alkuluvuilla 2, 3, 5, 7 ja 11.

$$143 : 2 = 71,5$$

$$143 : 3 = 47,666\dots$$

$$143 : 5 = 28,6$$

$$143 : 7 = 20,428\dots$$

$$143 : 11 = 13 \quad \text{Jako menee tasan.}$$

Koska luku 143 on jaollinen luvulla 11, se ei ole alkuluku.

c) Kun tutkitaan, onko luku 967 alkuluku, se on jaettava lukua

$\sqrt{967} = 31,096\dots$ pienemmillä alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ja 31.

$$967 : 2 = 483,5$$

$$967 : 3 = 322,333\dots$$

$$967 : 5 = 193,4$$

$$967 : 7 = 138,142\dots$$

$$967 : 11 = 87,909\dots$$

$$967 : 13 = 74,384\dots$$

$$967 : 17 = 56,882\dots$$

$$967 : 19 = 50,894\dots$$

$$967 : 23 = 42,043\dots$$

$$967 : 29 = 33,344\dots$$

$$967 : 31 = 31,193\dots$$

Koska mikään jakolaskuista ei mene tasan, luku 967 on alkuluku.

Vastaus

a) on, luvuilla 2, 3, 5 ja 7

b) ei ole, luku on jaollinen 11:llä

c) on, luvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ja 31

7.2

a) Kun tutkitaan, onko luku 187 alkuluku, se on jaettava lukua $\sqrt{187} = 13,674\dots$ pienemmillä alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11 ja 13.

$$187 : 2 = 93,5$$

$$187 : 3 = 62,333\dots$$

$$187 : 5 = 37,4$$

$$187 : 7 = 26,714\dots$$

$$187 : 11 = 17$$

Koska luku 187 on jaollinen luvulla 11, se ei ole alkuluku.

b) Kun tutkitaan, onko luku 299 alkuluku, se on jaettava lukua $\sqrt{299} = 17,291\dots$ pienemmillä alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13 ja 17.

$$299 : 2 = 149,5$$

$$299 : 3 = 99,666\dots$$

$$299 : 5 = 59,8$$

$$299 : 7 = 42,714\dots$$

$$299 : 11 = 27,181\dots$$

$$299 : 13 = 23$$

Koska luku 299 on jaollinen luvulla 13, se ei ole alkuluku.

c) Kun tutkitaan, onko luku 113 alkuluku, se on jaettava lukua $\sqrt{113} = 10,630\dots$ pienemmillä alkuluvuilla 2, 3, 5 ja 7.

$$113 : 2 = 56,5$$

$$113 : 3 = 37,666\dots$$

$$113 : 5 = 22,6$$

$$113 : 7 = 16,142\dots$$

Koska mikään jakolaskuista ei mene tasan, luku 113 on alkuluku.

Vastaus

- a) ei ole
- b) ei ole
- c) on

7.3

Kirjoitetaan luvut 2, ..., 120 taulukkoon. Taulukosta on poistettava kaikkien korkeintaan $\sqrt{120} = 10,954\dots$ suuruisten alkulukujen monikerrat.

Korostetaan luku 2 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 2 monikerrat.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

Korostetaan luku 3 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 3 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

Korostetaan luku 5 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 5 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

Korostetaan luku 7 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 7 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

Seuraava jäljellä oleva luku on 11, joka on suurempi kuin $\sqrt{120}$. Nyt taulukossa on jäljellä kaikki korkeintaan 120 suuruiset alkuluvut.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

Vastaus

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109 ja 113

7.4

a) Jaetaan luku 48 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 48 &= 4 \cdot 12 & 4 &= 2 \cdot 2 \text{ ja } 12 = 2 \cdot 6 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 & 6 &= 2 \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 & \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 2^4 \cdot 3 \end{aligned}$$

b) Jaetaan luku 105 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 105 &= 5 \cdot 21 & 21 &= 3 \cdot 7 \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 7 & \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

c) Jaetaan luku 252 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 252 &= 2 \cdot 126 & 126 &= 3 \cdot 42 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 42 & 42 &= 6 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 & 6 &= 2 \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 & \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Vastaus

- a) $2^4 \cdot 3$
- b) $3 \cdot 5 \cdot 7$
- c) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

7.5

a) Jaetaan luku 1575 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned}1575 &= 15 \cdot 105 & 15 &= 3 \cdot 5 \text{ ja } 105 = 5 \cdot 21 \\&= 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 21 & 21 &= 3 \cdot 7 \\&= 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 & \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\&= 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7\end{aligned}$$

b) Jaetaan luku 2244 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned}2244 &= 22 \cdot 102 & 22 &= 2 \cdot 11 \text{ ja } 102 = 3 \cdot 34 \\&= 2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 34 & 34 &= 2 \cdot 17 \\&= 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 17 & \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\&= 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17\end{aligned}$$

c) Jaetaan luku 14631 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned}14641 &= 11 \cdot 1331 & 1331 &= 11 \cdot 121 \\&= 11 \cdot 11 \cdot 121 & 121 &= 11 \cdot 11 \\&= 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 & \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\&= 11^4\end{aligned}$$

Vastaus

- a) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
- b) $2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$
- c) 11^4

7.6

Muodostetaan CAS-laskimella lukujen 36, 88 ja 100 alkutekijähajotelmat.

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$88 = 2^3 \cdot 11 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$$

$$100 = 2^2 \cdot 5^2 \quad 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

a) Suurin yhteinen tekijä on se yhteinen osa, joka sisältyy jokaiseen alkutekijähajotelmaan. Jokaisesta hajotelmasta löytyy 2^2 .

$$\text{syt}(36, 88, 100) = 2^2 = 4$$

b) Pienin yhteinen monikerta sisältää jokaisen alkutekijähajotelmissa esiintyvän alkuluvun eli luvut 2, 3, 5 ja 11. Jokaista alkulukua otetaan mukaan suurimman eksponentin ilmaisema määrä.

$$\text{pym}(36, 88, 100) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 = 19\,800$$

Vastaus

a) 4

b) 19 800

7.7

a) Muodostetaan lukujen 24 ja 90 alkutekijähajotelmat.

$$\begin{aligned} 24 &= 4 \cdot 6 & 4 &= 2 \cdot 2 \text{ ja } 6 = 2 \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 & \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 2^3 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 90 &= 9 \cdot 10 & 9 &= 3 \cdot 3 \text{ ja } 10 = 2 \cdot 5 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 & \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

b) Suurin yhteinen tekijä on se yhteinen osa, joka sisältyy kumpaakin alkutekijähajotelmaan. Kummastakin hajotelmasta löytyy $2 \cdot 3$.

$$\text{syt}(24, 90) = 2 \cdot 3 = 6$$

Pienin yhteinen monikerta sisältää jokaisen alkutekijähajotelmissa esiintyvän alkuluvun eli luvut 2, 3 ja 5. Jokaista alkulukua otetaan mukaan suurimman eksponentin ilmaisema määrä.

$$\text{pym}(24, 90) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

c) Muodostetaan alkutekijähajotelmien avulla tulo ja ryhmitellään sitä uudelleen.

$$\begin{aligned} 24 \cdot 90 &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5) \\ &= (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5) \\ &= \text{syt}(24, 90) \cdot \text{pym}(24, 90) \quad \square \end{aligned}$$

Vastaus

a) $24 = 2^3 \cdot 3$ ja $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

b) $\text{syt}(24, 90) = 6$ ja $\text{pym}(24, 90) = 360$

c) $24 \cdot 90 = 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = (2 \cdot 3) \cdot (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)$

7.8

a) $168\,511 = 7^2 \cdot 19 \cdot 181$, eli 3.

(Luku ei ole parillinen eikä jakaudu tasan 5:llä.)

b) $74\,864 = 2^4 \cdot 4679$, eli 4.

(Luku on parillinen.)

c) $335\,585 = 5 \cdot 41 \cdot 1637$, eli 1.

(Luku jakautuu tasan 5:llä.)

d) $3\,470\,000 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 347$, eli 2.

(Luvulla on tekijänä $10\,000 = 104 = (2 \cdot 5)4$.)

Vastaus

a) 3

b) 4

c) 1

d) 2

7.9

Hyödynnetään Eratostheneen seulaa. Huomataan tehtävästä 7.3, että lukujen 2, ..., 120 joukossa on 6 palindromialkulukua.

Laajennetaan lukujoukkoa lukuun 200 saakka.

Kirjoitetaan luvut 2, ..., 200 taulukkoon. Taulukosta on poistettava kaikkien korkeintaan $\sqrt{200} = 14,142\dots$ suuruisten alkulukujen monikerrat.

Korostetaan luku 2 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 2 monikerrat.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	154	154	155	156	157	158	159	160
161	162	164	164	165	166	167	168	169	170
171	172	174	174	175	176	177	178	179	180
181	182	184	184	185	186	187	188	189	190
191	192	194	194	195	196	197	198	199	200

Korostetaan luku 3 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 3 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Korostetaan luku 5 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 5 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Korostetaan luku 7 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 7 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Korostetaan luku 11 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 11 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Korostetaan luku 13 ja poistetaan sitä suuremmat luvun 13 monikerrat, joita ei ole vielä poistettu.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Seuraava jäljellä oleva luku on 17, joka on suurempi kuin $\sqrt{200}$. Nyt taulukossa on jäljellä kaikki korkeintaan 200 suuruiset alkuluvut. Lihavoidaan näiden joukosta palindromialkuluvut.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Vastaus

2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181 ja 191

Huomaa!

Toinen vaihtoehto on käydä läpi kaikkia palindromilukuja 2, 3, ..., 9, 11, 22, 33, ..., 99, 101, 111, 121, 131, ... ja tarkistaa niiden alkulukuisuus, kunnes 10 alkulukua on löytynyt.

7.10

Muodostetaan luvun $2 \cdot 3^{11} \cdot 4^5 \cdot 6^9$ alkutekijähajotelma ja muokataan sitä. Hyödynnetään potenssin laskusääntöjä.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^{11} \cdot 4^5 \cdot 6^9 &= 2 \cdot 3^{11} \cdot (2^2)^5 \cdot (2 \cdot 3)^9 \\ &= 2 \cdot 3^{11} \cdot 2^{10} \cdot 2^9 \cdot 3^9 \\ &= 2^{20} \cdot 3^{20} \\ &= (2 \cdot 3)^{20} \\ &= 6^{20} \\ &= (6^{10})^2 \\ &= 60\,466\,176^2 \end{aligned}$$

Vastaus

$$60\,466\,176^2$$

7.11

Muistikaavan perusteella $p^2 - 1 = (p + 1) \cdot (p - 1)$.

Koska p on alkuluku, se on pariton. Tällöin luku $p - 1$ on parillinen.

Koska luku $p - 1$ on parillinen, se jakautuu tasan luvulla 2. Samoin $p + 1$ on parillinen, joten myös se jakautuu tasan luvulla 2.

Tällöin tulon $(p + 1) \cdot (p - 1)$ arvo jaollinen luvulla $2 \cdot 2 = 4$. Siis, $p^2 - 1$ on jaollinen luvulla 4.

7.12

a) Kun tutkitaan, onko luku 323 alkuluku, se on jaettava lukua

$\sqrt{323} = 17,972\dots$ pienemmillä alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13 ja 17.

$$323 : 2 = 161,5$$

$$323 : 3 = 107,666\dots$$

$$323 : 5 = 64,6$$

$$323 : 7 = 46,142\dots$$

$$323 : 11 = 29,363\dots$$

$$323 : 13 = 24,846\dots$$

$$323 : 17 = 19$$

Koska luku 323 on jaollinen luvulla 17, se ei ole alkuluku.

b) Kun tutkitaan, onko luku 109 alkuluku, se on jaettava lukua

$\sqrt{109} = 10,440\dots$ pienemmillä alkuluvuilla 2, 3, 5 ja 7.

$$109 : 2 = 54,5$$

$$109 : 3 = 36,333\dots$$

$$109 : 5 = 21,8$$

$$109 : 7 = 15,571\dots$$

Koska mikään jakolaskuista ei mene tasan, luku 109 on alkuluku.

c) Kun tutkitaan, onko luku 1793 alkuluku, se on jaettava lukua

$\sqrt{1793} = 42,343\dots$ pienemmillä alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 ja 41.

$$1793 : 2 = 896,5$$

$$1793 : 3 = 597,666\dots$$

$$1793 : 5 = 358,6$$

$$1793 : 7 = 256,142\dots$$

$$1793 : 11 = 163$$

Koska luku 1793 on jaollinen luvulla 11, se ei ole alkuluku.

Vastaus

a) ei ole

b) on

c) ei ole

7.13

Korkeintaan kymmenellä jakolaskulla voidaan löytää alkuluvut, jotka ovat pienempiä kuin suurusjärjestyksessä 11. alkuluvun neliö.

Yhdestoista alkuluku on luku 31 ja $31^2 = 961$. Kymmenellä jakolaskulla voidaan siis löytää lukua 961 pienemmät alkuluvut.

Vastaus

Lukua $31^2 = 961$ pienemmät alkuluvut.

7.14

Kirjoitetaan luvut 200, ..., 299 taulukkoon. Taulukosta on poistettava kaikkien korkeintaan $\sqrt{299} = 17,291\dots$ suuruisten alkulukujen monikerrat.

Poistetaan siis lukujen 2, 3, 5, 7, 11, 13 ja 17 monikerrat.

200	201	202	203	204	205	206	207	208	209
210	211	212	213	214	215	216	217	218	219
220	221	222	223	224	225	226	227	228	229
230	231	232	233	234	235	236	237	238	239
240	241	242	243	244	245	246	247	248	249
250	251	252	253	254	255	256	257	258	259
260	261	262	263	264	265	266	267	268	269
270	271	272	273	274	275	276	277	278	279
280	281	282	283	284	285	286	287	288	289
290	291	292	293	294	295	296	297	298	299

Alkulukuja ovat 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283 ja 293.

Vastaus

211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283 ja 293

7.15

a) Jaetaan luku 396 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 396 &= 9 \cdot 44 & 9 &= 3 \cdot 3 \text{ ja } 44 = 4 \cdot 11 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 11 & 4 &= 2 \cdot 2 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 & \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \end{aligned}$$

b) Jaetaan luku 606 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 606 &= 6 \cdot 101 & 6 &= 2 \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 101 & \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \end{aligned}$$

c) Jaetaan luku 945 tekijöihin vaiheittain, kunnes päädytään alkulukujen tuloon.

$$\begin{aligned} 945 &= 5 \cdot 189 & 189 &= 3 \cdot 63 \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 63 & 63 &= 9 \cdot 7 \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 & 9 &= 3 \cdot 3 \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 & \text{Tulon kaikki tekijät ovat alkulukuja.} \\ &= 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Vastaus

- a) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$
- b) $2 \cdot 3 \cdot 101$
- c) $3^3 \cdot 5 \cdot 7$

7.16

Muodostetaan lukujen 4158 ja 37 240 alkutekijähajotelmat CAS-laskimella.

$$4158 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$$

$$37\,240 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$$

a) Suurin yhteinen tekijä on se yhteinen osa, joka sisältyy jokaiseen alkutekijähajotelmaan. Jokaisesta hajotelmasta löytyy $2 \cdot 7$.

$$\text{syt}(4158, 37240) = 2 \cdot 7 = 14$$

b) Pienin yhteinen monikerta sisältää jokaisen alkutekijähajotelmissa esiintyvän alkuluvun eli luvut 2, 3, 5, 7, 11 ja 19. Jokaista alkulukua otetaan mukaan suurimman eksponentin ilmaisema määrä.

$$\text{pym}(4158, 37240) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 19 = 11\,060\,280$$

Vastaus

a) 14

b) 11 060 280

7.17

Muodostetaan lukujen 475, 7502 ja 809 874 alkutekijähajotelmat CAS-laskimella.

$$475 = 5^2 \cdot 19$$

$$7502 = 2 \cdot 11^2 \cdot 31$$

$$809875 = 5^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$$

a) Suurin yhteinen tekijä on se yhteinen osa, joka sisältyy jokaiseen alkutekijähajotelmaan. Koska hajotelmista ei löydy yhteistä osaa, suurin yhteinen tekijä on 1.

b) Pienin yhteinen monikerta sisältää jokaisen alkutekijähajotelmissa esiintyvän alkuluvun eli luvut 2, 5, 11, 19, 31. Jokaista alkulukua otetaan mukaan suurimman eksponentin ilmaisema määrä.

$$\text{pym}(475, 7502, 809875) = 2 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 31 = 17\,817\,250$$

Vastaus

a) 1

b) 17 817 250

7.18

Tutkitaan alkuluvut 37:een saakka, sillä 37 on suurin korkeintaan 40 suuruinen alkuluku.

Alkuluku p	$2p + 1$	Onko $2p + 1$ alkuluku?
2	5	on
3	7	on
5	11	on
7	15	ei
11	23	on
13	27	ei
17	35	ei
19	39	ei
23	47	on
29	59	on
31	63	ei
37	75	ei

Alkuluvut 2, 3, 5, 11, 23 ja 29 ovat Sophie Germainin alkulukuja.

Vastaus

2, 3, 5, 11, 23 ja 29

7.19

Hyödynnetään Eratostheneen seula, joka saatiin tehtävän 7.9 ratkaisussa.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Löydetään esimerkiksi seuraavat summat:

$$200 = 97 + 103$$

$$202 = 89 + 113$$

$$204 = 97 + 107$$

$$206 = 97 + 109$$

$$208 = 101 + 107$$

$$210 = 103 + 107$$

b) Luvut $5 = 2 + 3$, $7 = 2 + 5$ ja $9 = 2 + 7$ voi esittää kahden alkuluvun summana. Mutta lukua $11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$ ei voi.

Kaikkia lukua 3 suurempia parittomia kokonaislukuja ei siis voi esittää kahden alkuluvun summana.

Vastaus

- a) Esimerkiksi $200 = 97 + 103$, $202 = 89 + 113$, $204 = 97 + 107$,
 $206 = 97 + 109$, $208 = 101 + 107$ ja $210 = 103 + 107$.
b) Esimerkiksi lukua 11 ei voi esittää kahden alkuluvun summana.

7.20

Kun luvun n alkutekijähajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on parillinen, niin hajotelma on muotoa $n = t_1^{2e_1} \cdot t_2^{2e_2} \cdot \dots \cdot t_k^{2e_k}$

Tällöin

$$\begin{aligned} n &= t_1^{2e_1} \cdot t_2^{2e_2} \cdot \dots \cdot t_k^{2e_k} \\ &= (t_1^{e_1})^2 \cdot (t_2^{e_2})^2 \cdot \dots \cdot (t_k^{e_k})^2 \\ &= (t_1^{e_1} \cdot t_2^{e_2} \cdot \dots \cdot t_k^{e_k})^2 \\ &= m^2, \end{aligned}$$

missä $m = t_1^{e_1} \cdot t_2^{e_2} \cdot \dots \cdot t_k^{e_k}$ on kokonaisluku.

Luvun n alkutekijähajotelma voidaan siis muokata potenssin laskusääntöjen avulla kokonaisluvun neliöksi.

7.21

Jos kokonaisluku n on jaollinen luvulla 120, se on jaollinen myös luvun 120 alkulukutekijöillä. Luvun 120 alkutekijähajotelma on $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Jos n on lisäksi jonkin kokonaisluvun neliö, sen alkutekijähajotelmassa jokaisen tekijän eksponentti on parillinen tehtävässä 7.20 esitetyn väitteen mukaisesti.

Täydennetään luvun 120 alkutekijähajotelmaa niin, että jokaisen tekijän eksponentti on mahdollisimman pieni parillinen luku. Kysytyksi luvuksi saadaan näin $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600$.

Vastaus

3600

7.22

Oletetaan vastoin väitettä, että luku n on pariton. Tällöin n voidaan kirjoittaa muodossa $2m + 1$, missä m on kokonaisluku.

Tehdään sijoitus $n = 2m + 1$ ja tutkitaan luvun $n^k + 1$ kongruenssia modulo 2.

$$\begin{aligned}n^k + 1 &\equiv (2m + 1)^k + 1 & 2m + 1 &\equiv 1 \pmod{2} \\&\equiv 1^k + 1 \\&\equiv 1 + 1 \\&\equiv 2 \\&\equiv 0 \pmod{2}\end{aligned}$$

Saatiin, että $n^k + 1 \equiv 0 \pmod{2}$, eli luku on parillinen. Tämä on ristiriita, koska luku $n^k + 1$ on alkuluku ja suurempi kuin 2.

Alkuperäinen väite pitää siten paikkansa. $\square$

7.23

a) $M_{127} = 2^{127} - 1 = 1,701... \cdot 10^{38}$, eli luvussa on $38 + 1 = 39$ numeroa.
 $M_{257} = 2^{257} - 1 = 2,315... \cdot 10^{77}$, eli luvussa on $77 + 1 = 78$ numeroa.

b) Oletetaan vastoin väitettä, että $k = mn$, missä m ja n ovat lukua 1 suurempia kokonaislukuja.

Tehdään sijoitus $k = mn$ ja tutkitaan lukua $2^k - 1$.

$$\begin{aligned} 2^k - 1 &= 2^{mn} - 1 & 1 &= 1^n \\ &= (2^m)^n - 1^n & a^n - b^n &\text{ on jaollinen luvulla } a - b. \\ &= (2^m - 1) \cdot q, \end{aligned}$$

missä q on jokin kokonaisluku.

Saatiin, että luku $2^k - 1$ on jaollinen kokonaisluvulla luvulla $2^m - 1$.
Tämä on ristiriita, koska luku $2^k - 1$ on alkuluku.

Alkuperäinen väite pitää siten paikkansa. $\square$

Vastaus

a) 39 ja 78