

Tuntisuunnitelma

Tunnin teema: Vektorit, taso ja analyyttinen geometria

Oppimistavoitteet:

- tunnin sisältö kehittää opiskelijoiden kykyä laskea tehtäviä, jotka sisältävät vektorilaskentaa, tasoja ja niiden yhtälöitä ja yleistä analyyttistä geometriaa
- vektorilaskennan tehtävät voivat olla hyvin rutiininomaisia, joten varmistetaan, että tämä onnistuu vahvuudella
- Hahmottamaan vektoreita piirtämällä (A-osa, joten hahmottelu tapahtuu suttupaperille)

Tunnin aloitus:

- hahmotelkaa tehtäviä kuvana
- muistakaa tarkistaa vastaukset
- huomioikaa vektorilaskennassa, että mitkä ovat vektoreita ja mitkä muuttujia
- Mitä apuja löytyy MAOLista
- jos tehtävässä on kuva, se ei ole välttämättä oikeassa suhteessa
- (piirtämishjelmaa ja Geogebraa kannattaa käyttää apuna.)
- Ei kannata säikähtää monimutkaisen näköistä vektoria, tehtävä voi lähteä ratkeamaan jopa yllättävän helposti laskusääntöjen avulla

Yleisiä havaintoja teeman tehtävistä:

- geometrisissa tehtävissä voi tulla esim. useampi vastausvaihtoehto, joista voi joutua karsimaan toisen pois perustelemalla
- vektorilaskennassa pitää useasti esittää vastaus sievennetyssä muodossa
- analyyttisessä geometriassa tulee olemaan useita erilaisia ratkaisutapoja. Näitä voivat olla esim. Algebrallinen tai kuvaajan avulla tehty ratkaisu
- radiaanit vs. asteet, tiedostaa se mikä asetus laskimessa
- geometrisissa tehtävissä tuloksen tulkitseminen, voi tulla myös kysymykseksi
- Usein perustuvat johonkin laskukaavaan, johon lasku voidaan sieventää ja ratkaista

Oppitunnin sisältö:

Tehtävä 4 K23/4: (LISÄTEHTÄVÄ)

4. Suoran etäisyys kahdesta pisteestä 12 p.

Määritä kaikki suorat, joiden etäisyys pisteestä $A = (-2, 0)$ on 2 ja etäisyys pisteestä $B = (3, 0)$ on 3.



- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Yksinkertainen tehtävänanto, mutta yllättävän pitkä tehtävä
 - Piirtämisestä on hyötyä hahmottamisen kannalta
 - KAIKKI suorat
 - Muistaa mitä kysytään ja ilmoittaa vastauksen selkeästi lopussa.
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
 - Hyvät välivaiheet
 - Muistaa kertoa sanallisesti mitä tekee
 - Miksi nämä ovat kaikki suorat eikä niitä ole enempää
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Monia tapoja ratkaista
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - (mallintaminen Geogebralla tai vastaavalla)
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - annettu vain yksi suora
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - kuvan piirtäminen auttaa hahmottamaan suorien määrän

Tehtävä 1 S21/4:

4. Tasokäyrä 12 p.

Tarkastellaan vektoreita $\vec{v}(t) = t\vec{i} + \frac{1}{t^2}\vec{j}$, kun $t > 0$.

1. Laske pistetulo $(\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{v}(3)$. (3 p.)
2. Määritä vektorin $\vec{v}(3)$ pituus. (2 p.)
3. Millä muuttujan $t > 0$ arvolla vektori $\vec{v}(t)$ on mahdollisimman lyhyt? (7 p.)

Tällaista jatkuvaa vektoriarvoista funktiota kutsutaan *käyrän parametrisoinniksi*.

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - yhtälön pyörittelyssä useita vaiheita, kannattaa pitää sanalliset perustelut mukana siitä, että mitä eri vaiheiden välillä tehdään
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
 - vastaukset pitää antaa tarkassa ja mahdollisessa sievennetyssä muodossa
 - välivaiheet pitää sanallistaa
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - 3. Kohdassa etumerkkien perustelun voi tehdä eri tavoilla
 - 3. Kohdassa HVP vaaditaan vain "derivaatan idea". Tämän voi selittää sanallisesti eri tavoilla.
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Likiarvovastaus
 - 3. kohdassa derivoitava funktio on neliöjuuren sisällä
 - unohdetaan tehtävässä annettu t :n alue
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - "mahdollisimman lyhyt", muistaa että minkä tyyllisissä tehtävissä tällaista sanontaa käytetään, löytyy yhteys derivaattaan

Tehtävä 2 K22/11:

11. Mitkä vektorit? 12 p.

1. Tason vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2 \\ 2\vec{a} \cdot \vec{a} + 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 5. \end{cases}$$

Määritä vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ pituudet. (5 p.)

2. Osatehtävän 1 vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ toteuttavat lisäksi yhtälöparin

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{11}}{10} \\ \vec{b} \cdot (\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Merkitään vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ välistä kulmaa symbolilla φ ja vektorien $\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}$ ja $\vec{b}$ välistä kulmaa symbolilla θ . Määritä kulmien φ ja θ suuruudet. (5 p.)

3. Määritä kaikki mahdolliset vektorit $\vec{a}$, jotka toteuttavat osatehtävien 1 ja 2 ehdot, kun $\vec{b} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$. (2 p.)

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Kakkoskohdassa sanalliset perustelut, kolmoskohdassa tärkeää huomata, että kyseessä on KAIKKI mahdolliset vektorit
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
 - Hyväksytty asteina tai radiaaneina
 - 2. ja 3. tehtävissä pistetulon likiarvolla laskeminen on vähentänyt pisteen
 -
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - 3. kohdassa voidaan perustella kuvankin avulla
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - (Kolmoskohdassa, jos haluaa havainnollistaa)
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - (Solven käyttö, käsin laskiessa tulee helposti merkkivirheitä,)
 - Muuttuja vai vektori
 - Kaikki sana jää huomioimatta
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Muistuttaa pistetulon laskusäännöstä (esim. vektorien pistetulo itsensä kanssa on vektorin pituus toiseen)
 - Oikeanlaiset merkinnät

Tehtävä 3 S23/4:

4. Vektorit ja taso 12 p.

Tarkastellaan vektoreita $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$,
 $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ ja $\vec{w} = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$.

1. Määritä vektori $\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$. (3 p.)
2. Vektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ virittävät origon kautta kulkevan tason T , eli ne ovat tason suuntavektoreita. Määritä pisteen $(6, 7, 1)$ etäisyys tasosta T . (9 p.)



- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Kannattaa lähteä ratkaisemaan itselle tutuimmalla tavalla.
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
 - “pelkkä pisteen etäisyys tasosta-kaava ilman laskemalla saatuja kertoimia” on 0p
 - Vastaus piti olla **täsmälleen** vaadittu
 - HVP, maininta siitä, että lähin on kohtisuoralla vektorilla
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Tapoja on useita, LPHV listaa: lähimmän pisteen avulla, normaalivektori (matriisi), parametrimuodosta normaalimuotoon ja normaalimuoto tason kolmen pisteen avulla. Kaikki kuitenkin käyttävät lähimmän pisteen kaavaa
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - (Ei ratkaisussa, mutta vektoreita voi hahmotella Geogebraa jos siitä on apua)
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Vektorien kertomisessa tulee helposti lasku/kirjoitusvirheitä
 - Yhtälönparin ratkaisu, kun ollaan A-osiossa ilman laskinta
 - Ei ilmaista tasoa T , tai tehdään se vajavaisesti
 - (Ratkaisu annettu likiarvona)
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Jos ei lähde alkuunkaan ratkeamaan, niin MAOL löytyy kaava pisteen etäisyydestä tasoon. Voi lähteä miettimään, miten tätä pääsisi soveltamaan.
 - Johdatella opiskelija tajuamaan, että lähin piste liittyy ortogonaalisuuteen