

Binomi 8 – Luku 3 – Tehtävien malliratkaisut

3.1

a)

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-6 - 4}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-6 + 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = 1 \quad b = 6 \quad c = 5$$

Ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b)

$$2x^2 - 3 = 5 \quad \parallel + 3$$

$$2x^2 = 8 \quad \parallel : 2$$

$$x^2 = 4 \quad \parallel \sqrt{}$$

$$x = \pm 2$$

Vastaus a) $x = -5$ tai $x = -1$

 b) $x = \pm 2$

3.2

$f(x) = 3x - 5$ on ensimmäisen asteen funktio, joten sen kuvaaja on suora.
Koska muuttujan x kerroin on positiivinen, kyseessä on nouseva suora eli C.

$g(x) = 4 - 2x^2$ on toisen asteen funktio, joten sen kuvaaja on paraabeli. Koska toisen asteen termin kerroin on -2 eli negatiivinen, kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli eli B.

$p(x) = -3(1 - 2x) = -3 + 6x$ on ensimmäisen asteen funktio, joten sen kuvaaja on suora.
Koska muuttujan x kerroin on positiivinen, kyseessä on nouseva suora eli C.

$q(x) = 3x(x - 5) = 3x^2 - 15x$ on toisen asteen funktio, joten sen kuvaaja on paraabeli.
Koska toisen asteen termin kerroin on 3 eli positiivinen, kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli eli A.

Sievennetään ensin funktio $r(x)$.

$$\begin{aligned} r(x) &= (x + 1)(x - 1) \\ &= x^2 + x \cdot (-1) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-1) \\ &= x^2 - x + x - 1 \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

$r(x)$ on toisen asteen funktio, joten sen kuvaaja on paraabeli. Koska toisen asteen termin kerroin on 1 eli positiivinen, kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli eli A.

$s(t) = 2(3 - t) = 6 - 2t$ on ensimmäisen asteen funktio, joten sen kuvaaja on suora.
Koska muuttujan t kerroin on negatiivinen, kyseessä on laskeva suora eli D.

Vastaus	$f(x) - C$	$q(x) - A$
	$g(x) - B$	$r(x) - A$
	$p(x) - C$	$s(t) - D$

3.3

a)

Funktion $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ toisen asteen termin kerroin on positiivinen $a = 4$, joten kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Ratkaistaan nollakohdat toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{8}$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$x = \frac{5+3}{8} = \frac{8}{8} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = 4 \quad b = -5 \quad c = 1$$

Ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b)

Funktion $g(x) = 2x - 3x^2$ toisen asteen termin kerroin on negatiivinen $a = -3$, joten kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Ratkaistaan nollakohdat tulon nollasäännön avulla.

$$g(x) = 0$$

$$2x - 3x^2 = 0$$

$$x(2 - 3x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2 - 3x = 0$$

$$-3x = -2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Vastaus a) ylöspäin, $x = \frac{1}{4}$ tai $x = 1$

 b) alaspäin, $x = 0$ tai $x = \frac{2}{3}$

3.4

a)

Funktion arvot ovat positiivisia, kun funktion kuvaaja kulkee x -akselin yläpuolella.

Kuvaajan perusteella $f(x) > 0$, kun $x < -3$ tai $x > 1$.

b)

Funktio saa positiivisia arvoja eli $f(x) > 0$, kun $0 < x < 3$.

c)

Funktio kulkee koko ajan x -akselin yläpuolella, joten $f(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Vastaus **a)** $x < -3$ tai $x > 1$

b) $0 < x < 3$

c) kaikilla muuttujan x arvoilla

3.5

a)

Funktion $f(x) = 3x - x^2 = 3x - 1x^2$ toisen asteen termin kerroin on $a = -1$ eli negatiivinen, joten kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

b)

Funktion $g(x) = 6(2 + x^2) = 12 + 6x^2$ toisen asteen termin kerroin on $a = 6$ eli positiivinen, joten kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

c)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned} h(x) &= (x - 2)(3 - x) \\ &= 3x - x^2 - 6 + 2x \\ &= -x^2 + 5x - 6 \end{aligned}$$

Funktion $h(x) = -x^2 + 5x - 6$ toisen asteen termin kerroin on $a = -1$ eli negatiivinen, joten kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

d)

Funktion $i(x) = 2 - 5x^2$ toisen asteen termin kerroin on $a = -5$ eli negatiivinen, joten kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Vastaus **a)** alaspäin

b) ylöspäin

c) alaspäin

d) alaspäin

3.6

a)

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun funktion kuvaaja kulkee x -akselin alapuolella.

Kuvaajan perusteella $f(x) < 0$, kun $x < -1$ tai $x > 2$.

b)

Funktio saa negatiivisia arvoja eli $f(x) < 0$, kun $-2 < x < 3$.

c)

Funktio ei kulje missään vaiheessa x -akselin alapuolella, joten funktio ei saa negatiivisia arvoja millään muuttujan x arvoilla.

Vastaus **a)** $x < -1$ tai $x > 2$

b) $-2 < x < 3$

c) eivät millään muuttujan x arvoilla

3.7

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat. Funktion merkki päätellään nollakohdan ja kuvaajan aukeamissuunnan perusteella.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x^2 + 6x - 8 &= 0 \quad \| : 2 \\ x^2 + 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = 1 \quad b = 3 \quad c = -4$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

Ratkaisukaava:

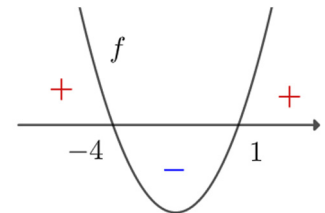
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-3 - 5}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Funktion $f(x) = 2x^2 + 6x - 8$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin **2** on positiivinen.



Funktion arvot ovat siis

- positiivisia, kun $x < -4$ tai $x > 1$
- negatiivisia, kun $-4 < x < 1$.

Vastaus Arvot ovat positiivisia, kun $x < -4$ tai $x > 1$, ja negatiivisia, kun $-4 < x < 1$.

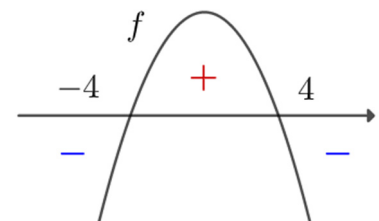
3.8

a)

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat. Funktion merkki päätellään nollakohdan ja kuvaajan aukeamissuunnan perusteella.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^2 + 16 &= 0 \\ -x^2 &= -16 \quad \parallel : (-1) \\ x^2 &= 16 \quad \parallel \sqrt{} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Funktion $f(x) = -x^2 + 16$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin -1 on negatiivinen.



Funktion arvot ovat siis

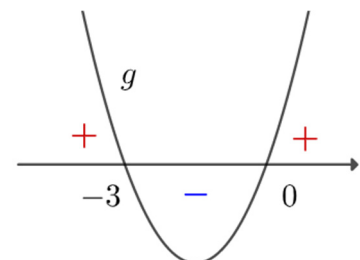
- positiivisia, kun $-4 < x < 4$
- negatiivisia, kun $x < -4$ tai $x > 4$.

b)

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat tulon nollasäännön avulla.

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ x^2 + 3x &= 0 \\ x(x + 3) &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{tai} \quad x + 3 = 0 \\ &\quad \quad \quad x = -3 \end{aligned}$$

Funktion $g(x) = x^2 + 3x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin 1 on positiivinen.



Funktion arvot ovat siis

- positiivisia, kun $x < -3$ tai $x > 0$
- negatiivisia, kun $-3 < x < 0$.

Vastaus a) Arvot ovat positiivisia, kun $-4 < x < 4$, ja negatiivisia, kun $x < -4$ tai $x > 4$.

 b) Arvot ovat positiivisia, kun $x < -3$ tai $x > 0$, ja negatiivisia, kun $-3 < x < 0$.

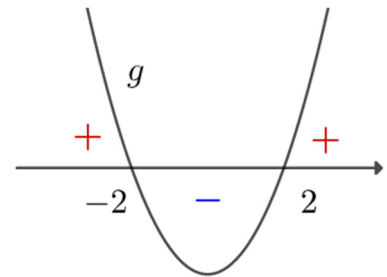
3.9

a) Epäyhtälön $2x^2 - 8 \leq 0$ ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion g arvot ovat negatiivisia tai nolla. Päättellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8 &= 0 \\ 2x^2 &= 8 \quad \| : 2 \\ x^2 &= 4 \quad \| \sqrt{} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Hahmotellaan funktion $g(x)$ kuvaaja. Toisen asteen termin kerroin on positiivinen, joten kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Päättellään epäyhtälön $g(x) \leq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvot ovat negatiivisia tai nolla, kun $-2 \leq x \leq 2$.

Siis $g(x) \leq 0$, kun $-2 \leq x \leq 2$.

b)

Epäyhtälön $-x^2 + 3x - 3 \leq 0$ ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion g arvot ovat negatiivisia tai nolla. Päättellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ -x^2 + 3x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

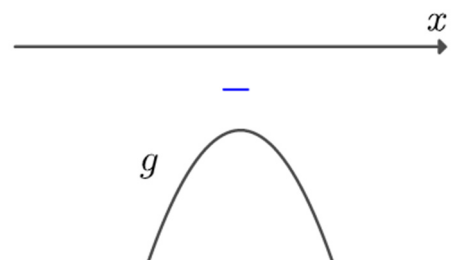
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ a &= -1 \quad b = 3 \quad c = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ratkaisukaava:} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Juurrettava on negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua. Funktiolla ei ole siis nollakohtia. Hahmotellaan funktion $g(x)$ kuvaaja. Toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, joten kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Päättellään epäyhtälön $g(x) \leq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvot ovat negatiivisia kaikilla muuttujan x arvoilla.



Vastaus a) $-2 \leq x \leq 2$

b) kaikilla muuttujan x arvoilla

3.10

$$\begin{aligned}x^2 - 2x &> 4x - 5 \\x^2 - 2x - 4x + 5 &> 0 \\x^2 - 6x + 5 &> 0\end{aligned}$$

Epäyhtälön ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion $f(x) = x^2 - 6x + 5$ arvot ovat positiivisia. Päättellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\x^2 - 6x + 5 &= 0\end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = 1 \quad b = -6 \quad c = 5$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

Ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

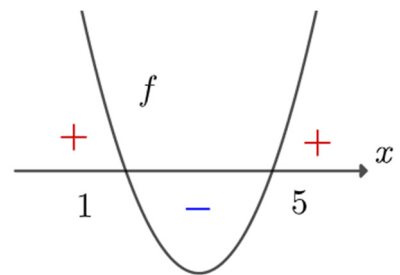
$$x = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{6 + 4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Funktion $f(x) = x^2 - 6x + 5$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin **1** on positiivinen.

Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < 1$ tai $x > 5$.

Siis epäyhtälön $x^2 - 2x > 4x - 5$ ratkaisu on $x < 1$ tai $x > 5$.



Vastaus $x < 1$ tai $x > 5$

3.11

$$\begin{aligned}
 f(x) &\leq g(x) \\
 5x - 2 &\leq x^2 + 2x \\
 5x - 2 - x^2 - 2x &\leq 0 \\
 -x^2 + 3x - 2 &\leq 0
 \end{aligned}$$

Epäyhtälön ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ arvot ovat negatiivisia tai nolla. Päätellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 -x^2 + 3x - 2 &= 0
 \end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = -1 \quad b = 3 \quad c = -2$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)}$$

Ratkaisukaava:

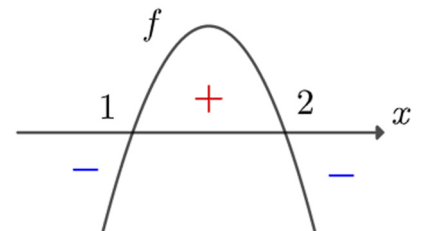
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$

$$x = \frac{-3 - 1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 + 1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Funktion $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin -1 on negatiivinen.



Funktion arvot ovat negatiivisia tai nolla, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 2$.

Siis epäyhtälön $f(x) \leq g(x)$ ratkaisu on $x \leq 1$ tai $x \geq 2$.

Vastaus $x \leq 1$ tai $x \geq 2$

3.12

a) Funktio f saa suurempia arvoja kuin g , kun $f(x) > g(x)$. Ratkaistaan epäyhtälö

$$f(x) > g(x)$$

$$1 - 2x^2 > x - 2$$

$$1 - 2x^2 - x + 2 > 0$$

$$-2x^2 - x + 3 > 0$$

Epäyhtälön ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion $f(x) = -2x^2 - x + 3$ arvot ovat positiivisia. Päättellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$$-2x^2 - x + 3 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = -2 \quad b = -1 \quad c = 3$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)}$$

Ratkaisukaava:

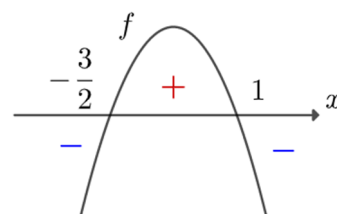
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-4}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{-4}$$

$$x = \frac{1-5}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1+5}{-4} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

Funktion $f(x) = -2x^2 - x + 3$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin -2 on negatiivinen.



Funktion arvot ovat positiivisia, kun $-\frac{3}{2} < x < 1$.

Siis $f(x)$ on suurempi kuin $g(x)$, kun $-\frac{3}{2} < x < 1$.

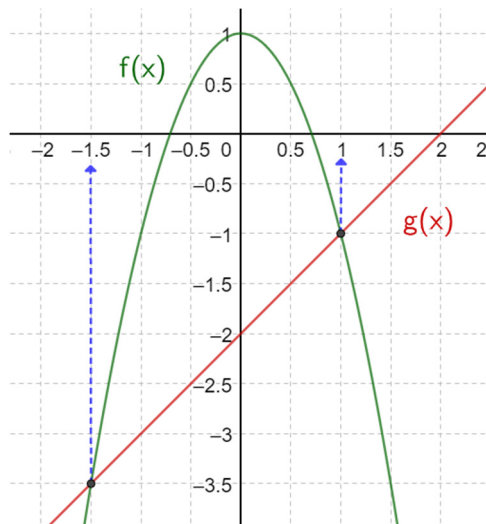
b) Piirretään funktioiden kuvaajat.

Funktio f saa suurempia arvoja kuin funktio g , kun se kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella.

Kyseinen väli on siis $-1,5 < x < 1$.

Vastaus a) $-\frac{3}{2} < x < 1$

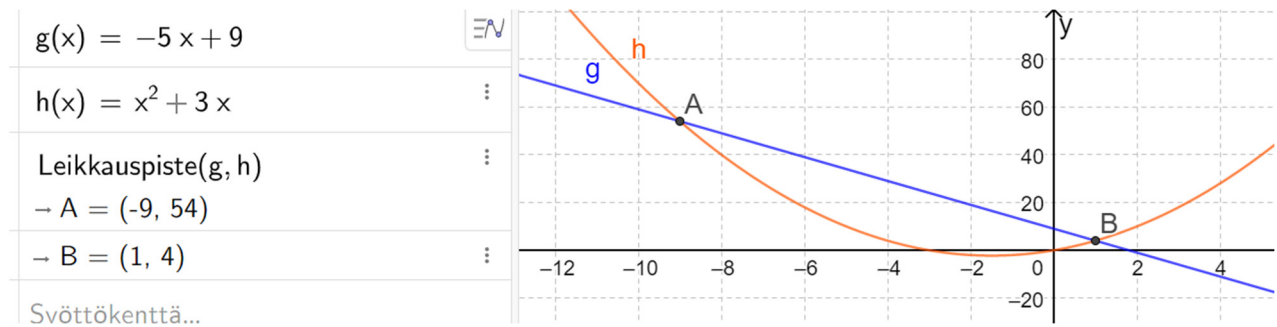
b) Ratkaisuvälillä $-1,5 < x < 1$ funktion f kuvaaja on funktion g kuvaajan yläpuolella.



3.13

a)

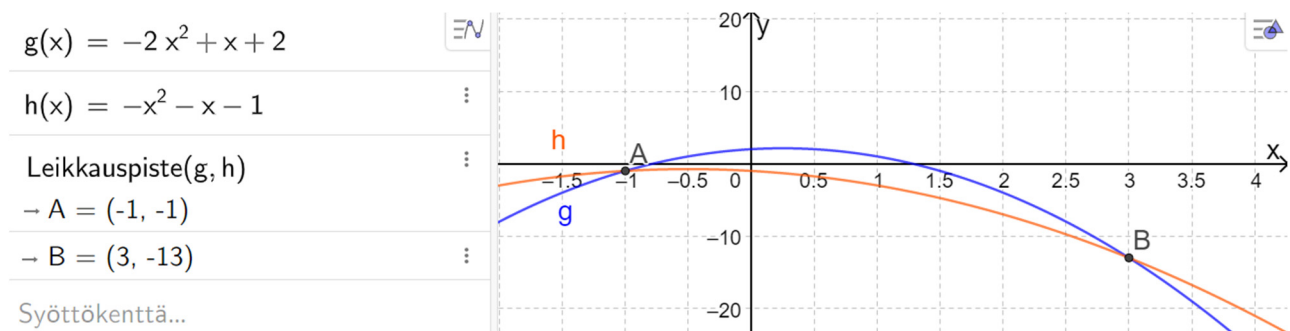
Piirretään funktioiden kuvaajat ja tutkitaan, milloin funktio g saa saman tai suuremman arvon kuin funktio h .



Leikkauspisteiden x -koordinaatit ovat -9 ja 1 , joten kuvan perusteella $g(x) \geq h(x)$, kun $-9 \leq x \leq 1$.

b)

Piirretään funktioiden kuvaajat ja tutkitaan, milloin funktio g saa saman tai suuremman arvon kuin funktio h .



Leikkauspisteiden x -koordinaatit ovat -1 ja 3 , joten kuvan perusteella $g(x) \geq h(x)$, kun $-1 \leq x \leq 3$.

Vastaus a) $-9 \leq x \leq 1$

 b) $-1 \leq x \leq 3$

3.14

a)

Epidemian voidaan ajatella kestävän niin kauan, kunnes sairastapauksia ei enää esiinny eli tapausten lukumäärä on 0.

Muodostetaan yhtälö $s(x) = 0$ ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned}s(x) &= 0 \\ -29x^2 + 609x &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x = 21\end{aligned}$$

Yhtälön voi ratkaista
CAS-laskimella.

Kun 21 viikkoa on kulunut, tautimäärä on uudelleen nolla.

Epidemia kesti mallin mukaan siis 21 viikkoa.

b)

Ratkaistaan epäyhtälö $s(x) > 3000$.

$$\begin{aligned}s(x) &> 3000 \\ -29x^2 + 609x &> 3000 \\ 7,891 \dots < x &< 13,108 \dots\end{aligned}$$

Epäyhtälön voi ratkaista
CAS-laskimella.

Tautitapausten lukumäärä oli yli 3000 aikavälillä 8 viikkoa – 13 viikkoa.

Vastaus a) 21 viikkoa

 b) 8 viikkoa – 13 viikkoa

3.15

a)

$$p(x) = x - 2(3 - x) = x - 6 + 2x = 3x - 6$$

Funktio p on siis ensimmäisen asteen funktio eli sen kuvaaja on suora eikä paraabeli.

b)

$$q(x) = 1 - 3x(1 - x) = 1 - 3x + 3x^2$$

Funktio q on toisen asteen funktio, joten sen kuvaaja on paraabeli. Koska toisen asteen termin kerroin on 3 eli positiivinen, paraabeli aukeaa ylöspäin.

c)

$r(x) = a^2 - 3ax + 1$ on ensimmäisen asteen funktio, sillä muuttujan x korkein aste on 1 (a on vain jokin vakio). Kuvaaja ei ole siis paraabeli.

d)

$$\begin{aligned} s(t) &= (2 + t)(2 - t) \\ &= 4 - 2t + 2t - t^2 \\ &= -t^2 + 4 \end{aligned}$$

Funktio s on toisen asteen funktio, joten sen kuvaaja on paraabeli. Koska toisen asteen termin kerroin on -1 eli negatiivinen, paraabeli aukeaa alaspäin.

Vastaus **a)** ei paraabeli

b) ylöspäin aukeava paraabeli

c) ei paraabeli

d) alaspäin aukeava paraabeli

3.16

a)

Epäyhtälö $g(x) > 0$ toteutuu, kun funktion arvot ovat positiivisia eli suurempia kuin nolla.

Kuvaajan perusteella funktio saa positiivisia arvoja kaikkialla muualla paitsi nollakohdassa $x = 2$.

Epäyhtälö toteutuu siis, kun $x \neq 2$.

b)

Epäyhtälö $h(x) \geq 0$ toteutuu, kun funktion arvot ovat positiivisia tai nolla.

Kuvaajan perusteella funktio saa negatiivisia arvoja kaikkialla muualla paitsi nollakohdassa $x = 5$.

Epäyhtälö toteutuu ainoastaan nollakohdassa, eli kun $x = 5$.

Vastaus **a)** $x \neq 2$

b) $x = 5$

3.17

a)

Epäyhtälö $f(x) \geq 0$ toteutuu, kun funktion f kuvaaja kulkee x -akselin yläpuolella tai funktio saa arvon nolla.

Kuvaajan perusteella funktio f saa pelkästään negatiivisia arvoja, joten $f(x) \geq 0$ ei toteudu millään muuttujan x arvolla.

b)

Epäyhtälö $g(x) > 0$ toteutuu, kun funktion g kuvaaja kulkee x -akselin yläpuolella.

Kuvaajan perusteella tämä tapahtuu, kun $x < -3$ tai $x > 2$.

Epäyhtälön $g(x) > 0$ ratkaisu on siis $x < -3$ tai $x > 2$.

c)

Epäyhtälö $f(x) > g(x)$ toteutuu, kun funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella.

Kuvaajan perusteella tämä tapahtuu välillä $-2 < x < 1$.

Epäyhtälön $f(x) > g(x)$ ratkaisu on siis $-2 < x < 1$.

Vastaus a) ei millään muuttujan x arvolla

b) $x < -3$ tai $x > 2$

c) $-2 < x < 1$

3.18

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat. Funktion merkki päätellään nollakohdan ja kuvaajan aukeamissuunnan perusteella.

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 - x + 12 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = -1 \quad b = -1 \quad c = 12$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12}}{2 \cdot (-1)}$$

Ratkaisukaava:

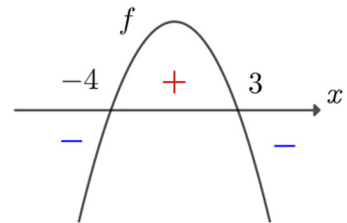
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{-2}$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{-2}$$

$$x = \frac{1 - 7}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1 + 7}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

Funktion $f(x) = -x^2 - x + 12$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin -1 on negatiivinen.



Funktion arvot ovat siis

- positiivisia, kun $-4 < x < 3$
- negatiivisia, kun $x < -4$ tai $x > 3$.

Vastaus Arvot ovat positiivisia, kun $-4 < x < 3$, ja negatiivisia, kun $x < -4$ tai $x > 3$.

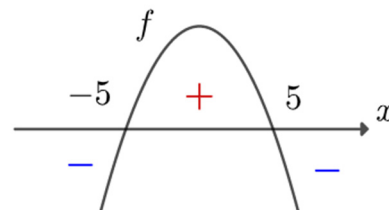
3.19

a) Epäyhtälön $f(x) \geq 0$ ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion $f(x) = -2x^2 + 50$ arvot ovat positiivisia tai nolla. Päättellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} -2x^2 + 50 &= 0 \\ -2x^2 &= -50 \quad \parallel : (-2) \\ x^2 &= 25 \quad \parallel \sqrt{} \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

Hahmotellaan funktion $f(x)$ kuvaaja. Toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, joten kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Päättellään epäyhtälön $f(x) \geq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvot ovat positiivisia tai nolla, kun $-5 \leq x \leq 5$.

Siis $f(x) \geq 0$, kun $-5 \leq x \leq 5$.

b) Epäyhtälön $f(x) \geq 0$ ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$ arvot ovat positiivisia tai nolla. Päättellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 + 2x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3$$

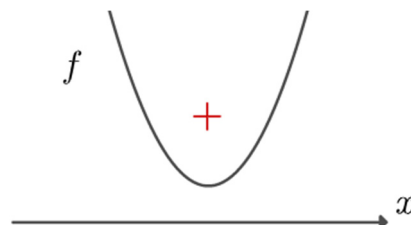
$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} \end{aligned}$$

Ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Juurrettava on negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua. Funktiolla ei ole siis nollakohtia. Hahmotellaan funktion $f(x)$ kuvaaja. Toisen asteen termin kerroin on positiivinen, joten kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Päättellään epäyhtälön $f(x) \geq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvot ovat positiivisia kaikilla muuttujan x arvoilla.



Vastaus a) $-5 \leq x \leq 5$

b) kaikilla muuttujan x arvoilla

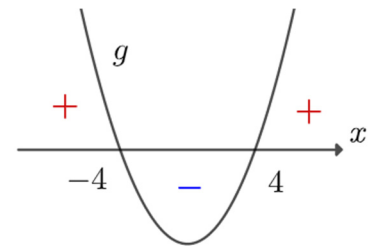
3.20

a) Epäyhtälön $g(x) < 0$ ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion $g(x) = 4x^2 - 64$ arvot ovat negatiivisia. Päätellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 64 &= 0 \\ 4x^2 &= 64 \quad \| : 4 \\ x^2 &= 16 \quad \| \sqrt{} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Hahmotellaan funktion $g(x)$ kuvaaja. Toisen asteen termin kerroin on positiivinen, joten kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Päätellään epäyhtälön $g(x) < 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $-4 < x < 4$.

Siis $g(x) < 0$, kun $-4 < x < 4$.

b) Epäyhtälön $g(x) < 0$ ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion $g(x) = -0,3x^2 - 0,4x - 0,1$ arvot ovat negatiivisia. Päätellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -0,3x^2 - 0,4x - 0,1 &= 0 \quad \| \cdot (-10) \\ 3x^2 + 4x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = 3 \quad b = 4 \quad c = 1$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6}$$

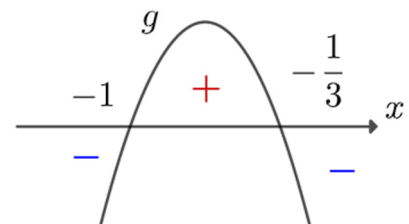
$$x = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

Ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 - 2}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4 + 2}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Funktion $g(x) = -0,3x^2 - 0,4x - 0,1$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin $-0,3$ on negatiivinen.



Päätellään epäyhtälön $g(x) < 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -1$ tai $x > -\frac{1}{3}$.

Vastaus **a)** $-4 < x < 4$ **b)** $x < -1$ tai $x > -\frac{1}{3}$

3.21

$$x^2 + 2x \leq 15$$

$$x^2 + 2x - 15 \leq 0$$

Epäyhtälön ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion $f(x) = x^2 + 2x - 15$ arvot ovat negatiivisia tai nolla. Päättellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = -15$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

Ratkaisukaava:

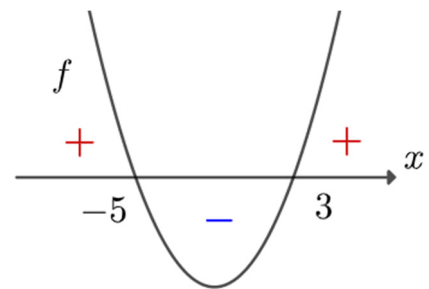
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 - 8}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 + 8}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 15$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin **1** on positiivinen.

Funktion arvot ovat negatiivisia tai nolla, kun $-5 \leq x \leq 3$.

Siis epäyhtälön $x^2 + 2x \leq 15$ ratkaisu on $-5 \leq x \leq 3$.



b)

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x &\geq 1 \\ -x^2 + 2x - 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Epäyhtälön ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ arvot ovat positiivisia tai nolla. Päätellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^2 + 2x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = -1 \quad b = 2 \quad c = -1$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 0}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

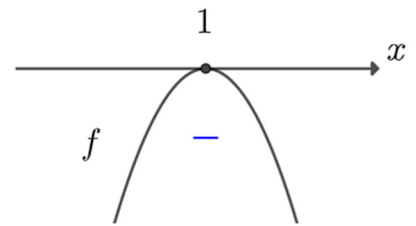
Ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Funktion $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin -1 on negatiivinen.

Funktio saa arvon nolla kohdassa $x = 1$ ja muuten negatiivisia arvoja.

Siis epäyhtälön $-x^2 + 2x \geq 1$ ratkaisu on $x = 1$.



Vastaus a) $-5 \leq x \leq 3$

 b) $x = 1$

3.22

Funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella, kun $f(x) > g(x)$.

Ratkaistaan epäyhtälö

$$\begin{aligned} f(x) &> g(x) \\ x^2 + 3 &> -x^2 + 15 \\ 2x^2 - 12 &> 0 \end{aligned}$$

Epäyhtälön ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion $f(x) = 2x^2 - 12$ arvot ovat positiivisia. Päättellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

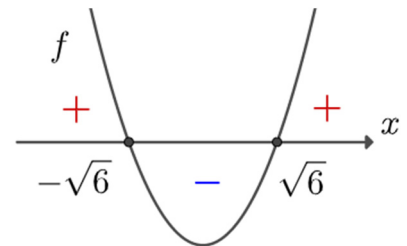
$$\begin{aligned} 2x^2 - 12 &= 0 \\ 2x^2 &= 12 \quad \parallel : 2 \\ x^2 &= 6 \quad \parallel \sqrt{} \\ x &= \pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

Hahmotellaan funktion f kuvaaja. Toisen asteen termin kerroin on positiivinen, joten kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Päättellään epäyhtälön $2x^2 - 12 > 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < -\sqrt{6}$ tai $x > \sqrt{6}$.

Siis $f(x) > g(x)$, kun $x < -\sqrt{6}$ tai $x > \sqrt{6}$.

Vastaus $x < -\sqrt{6}$ tai $x > \sqrt{6}$



3.23

Funktio f saa pienempiä tai yhtä suuria arvoja kuin g , kun $f(x) \leq g(x)$. Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned} f(x) &\leq g(x) \\ -2x^2 + 3x - 1 &\leq -x^2 + 3x + 4 \\ -x^2 - 5 &\leq 0 \end{aligned}$$

Epäyhtälön ratkaisu on ne muuttujan arvot, joilla funktion $f(x) = -x^2 - 5$ arvot ovat negatiivisia tai nolla. Päättellään epäyhtälön ratkaisu kuvaajan hahmotelman avulla.

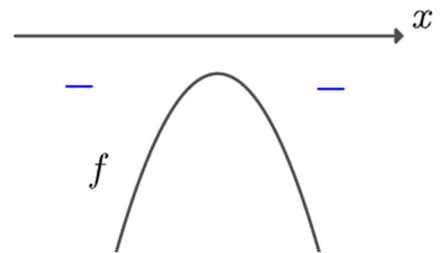
Ratkaistaan ensin funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^2 - 5 &= 0 \\ -x^2 &= 5 \quad \| : (-1) \\ x^2 &= -5 \end{aligned}$$

Luvun neliö ei voi olla koskaan negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua. Funktiolla f ei siis ole nollakohtia.

Funktion $f(x) = -x^2 - 5$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin -1 on negatiivinen.

Funktion arvot ovat aina negatiivisia tai nolla, joten $f(x) \leq g(x)$ toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.



Vastaus kaikilla muuttujan x arvolla

3.24

Merkitään kysyttyä lukua kirjaimella x .

Luvun neliö on tällöin x^2 ja luku kerrottuna kahdella on $2x$.

Muodostetaan ehdon mukainen epäyhtälö ja ratkaistaan se.

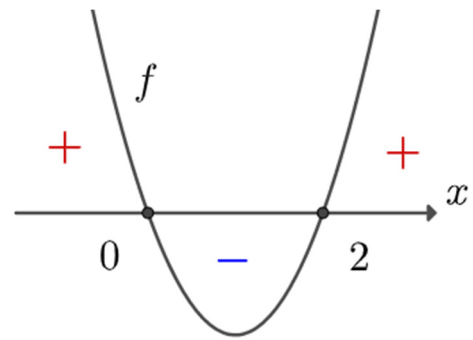
$$\begin{aligned}x^2 &< 2x \\x^2 - 2x &< 0\end{aligned}$$

Ratkaistaan ensin funktion $f(x) = x^2 - 2x$ nollakohdat tulon nollasäännön avulla.

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\x^2 - 2x &= 0 \\x(x - 2) &= 0 \\x &= 0 \quad \text{tai} \quad x - 2 = 0 \\&\quad \quad \quad x = 2\end{aligned}$$

Funktion $f(x) = x^2 - 2x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin **1** on positiivinen.

Päätellään epäyhtälön $x^2 - 2x < 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $0 < x < 2$.



Luvut saavat olla siis suurempia kuin 0 mutta pienempiä kuin 2.

Vastaus Luvut ovat suurempia kuin 0 mutta pienempiä kuin 2.

3.25

a)

Jos toisen sivun pituus on x (m), niin tällöin toisen sivun pituus on $120 - x$ (m).

Puistoalue on suorakulmio, joten sen pinta-alan funktio on

$$A(x) = x(120 - x) = 120x - x^2 = -x^2 + 120x \text{ (m}^2\text{)}$$

b)

Koska aitojen yhteispituus on 120 (m), niin muuttuja x voi saada arvoja välillä $0 < x < 120$ (m).

c)

Muodostetaan epäyhtälö $A(x) \geq 1575$ ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} A(x) &\geq 1575 \\ -x^2 + 120x &\geq 1575 \\ 15 &\leq x \leq 105 \end{aligned}$$

Sivun x pituuden tulee olla välillä $15 \leq x \leq 105$ (m).

Vastaus **a)** $A(x) = -x^2 + 120x \text{ (m}^2\text{)}$

b) $0 \text{ m} < x < 120 \text{ m}$

c) $15 \text{ m} \leq x \leq 105 \text{ m}$

3.26

a)

Poisleikattavan neliön sivun pituus on x (cm).

Neliö leikataan sivujen kummastakin päästä, joten pohjan sivujen pituudeksi jää

$30 - 2x$ (cm) ja $21 - 2x$ (cm).

Pohjan pinta-alaa kuvaa näin ollen funktio

$$A(x) = (30 - 2x)(21 - 2x) = 4x^2 - 102x + 630 \text{ (cm}^2\text{)}$$

b)

Muuttuja x on poisleikattavan neliön sivun pituus. Pituus on vähintään 0 cm.

Lyhyemmän sivun pituuden pitää olla positiivinen (tai nolla), joten sivun $21 - 2x$ tulee olla suurempi tai yhtä suuri kuin 0.

$$\begin{aligned} 21 - 2x &\geq 0 \\ -2x &\geq -21 \quad \parallel : (-2) \\ x &\leq 10,5 \end{aligned}$$

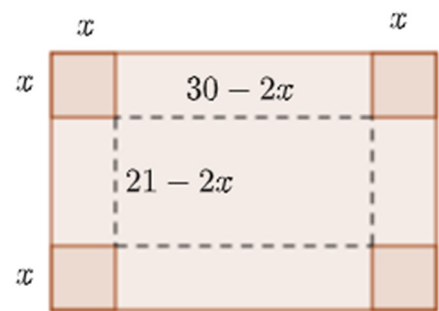
Muuttuja x voi siis saada arvoja väliltä $0 \text{ cm} \leq x \leq 10,5 \text{ cm}$.

c)

Muodostetaan epäyhtälö $A(x) > 112$ ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} A(x) &> 112 \\ 4x^2 - 102x + 630 &> 112 \\ x &< 7 \quad \text{tai} \quad x > 18,5 \end{aligned}$$

Otetaan huomioon muuttujan x määrittelyehto $0 \text{ cm} \leq x \leq 10,5 \text{ cm}$, joten poisleikattavan sivun pituus tulee alle 7 cm.



Vastaus a) $A(x) = 4x^2 - 102x + 630 \text{ (cm}^2\text{)}$

b) $0 \text{ cm} < x < 10,5 \text{ cm}$

c) alle 7 cm