

Binomi 8 – Luku 5 – Tehtävien malliratkaisut

5.1

a)

Kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on kuvan mukaan $k = 2,5$.

Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 3$ on siis 2,5.

b)

Kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on kuvan mukaan $k = -3,5$.

Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = -1$ on siis -3,5.

Vastaus **a)** 2,5

b) -3,5

5.2

a)

Hetkellinen muutosnopeus on kohtaan $x = 0$ piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin.

Tangenttisuoralla on pisteet $(0, -1)$ ja $(3, -4)$. Lasketaan pisteiden avulla tangentin kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - (-1)}{3 - 0} = \frac{-3}{3} = -1$$

Funktion g hetkellinen muutosnopeus (eli derivaatta) kohdassa 0 on -1 .

b)

Kohtaan $x = 6$ piirretyllä tangenttisuoralla on pisteet $(6, 2)$ ja $(3, -4)$. Lasketaan pisteiden avulla tangentin kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - 2}{3 - 6} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Funktion g hetkellinen muutosnopeus (eli derivaatta) kohdassa 6 on 2.

Vastaus **a)** -1

b) 2

5.3

a)

Alkuhetkellä $t = 0$. Määritetään kuvaajalta piste, jossa $t = 0$. Kyseinen piste on $(0; 1,71)$, joten keihään korkeus heiton alussa on 1,71 m.

b)

Keihään korkeuden muutosnopeus kohdassa $t = 1$ s on kuvaajalle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Määritetään pisteiden $(1; 13,86)$ ja $(2; 21,51)$ kautta kulkevan tangenttisuoran kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{21,51 - 13,86}{2 - 1} = 7,65 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

c)

Korkeuden muutosnopeus on 0 m/s sillä hetkellä, jolloin funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla eli tangentti on vaakasuora. Korkeuden muutosnopeus on siis 0 m/s, kun $t = 1,85$ (s).



d)

Keihään korkeuden muutosnopeus kohdassa $t = 3$ s on kuvaajalle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Määritetään pisteiden $(2; 21,51)$ ja $(3; 11,16)$ kautta kulkevan tangenttisuoran kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{21,51 - 11,16}{2 - 3} = -10,35 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Keihään korkeus pienenee 10,35 metriä sekunnissa.

Vastaus a) 1,7 m

 b) 7,65 m/s

 c) 1,85 s

 d) -10,35 m/s, keihään korkeus pienenee 10,35 m sekunnissa.

5.4

a)

Hetkellinen muutosnopeus on kohtaan $x = -4$ piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin.

Tangenttisuoralla on pisteet $(-4, 4)$ ja $(-3, 1)$. Lasketaan pisteiden avulla tangentin kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 4}{-3 - (-4)} = \frac{-3}{1} = -3$$

Funktion f hetkellinen muutosnopeus (eli derivaatta) kohdassa -4 on -3 .

b)

Kohtaan $x = -1$ piirretty tangenttisuora on vaakasuora, joten sen kulmakerroin on 0 .

Funktion f hetkellinen muutosnopeus kohdassa -1 on siis 0 .

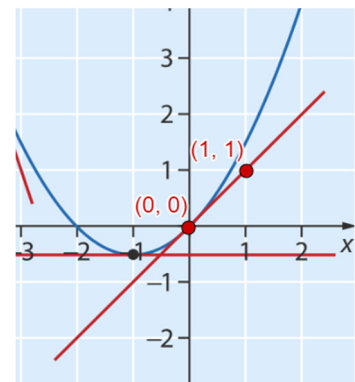
c)

Hetkellinen muutosnopeus on kohtaan piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin.

Tangenttisuoralla on pisteet $(0, 0)$ ja $(1, 1)$.
Lasketaan pisteiden avulla tangentin kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Funktion f hetkellinen muutosnopeus kohdassa 0 on 1 .



Vastaus a) -3

 b) 0

 c) 1

5.5

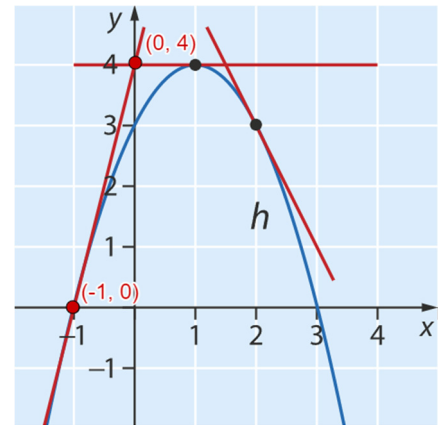
a)

Funktion derivaatta on kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentsuoran kulmakerroin.

Tangentsuoralla on pisteet $(-1, 0)$ ja $(0, 4)$.
Lasketaan pisteiden avulla tangentin kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 0}{0 - (-1)} = \frac{4}{1} = 4$$

Funktion f derivaatta kohdassa -1 on 4 .



b)

Funktion derivaatta on kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentsuoran kulmakerroin.

Tangentsuora on vaakasuora, joten sen kulmakerroin on 0 .

Funktion f derivaatta kohdassa 1 on siis 0 .

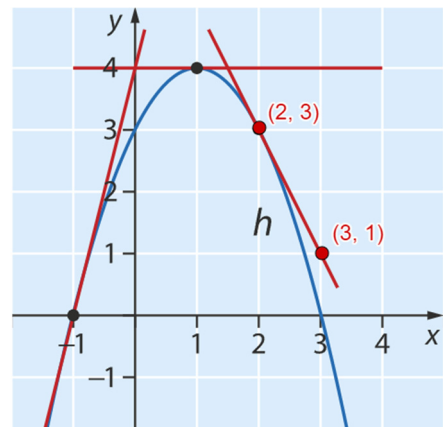
c)

Funktion derivaatta on kohtaan $x = 2$ piirretyn tangentsuoran kulmakerroin.

Tangentsuoralla on pisteet $(2, 3)$ ja $(3, 1)$.
Lasketaan pisteiden avulla tangentin kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 3}{3 - 2} = \frac{-2}{1} = -2$$

Funktion f derivaatta kohdassa 2 on -2 .



Vastaus a) 4 b) 0 c) -2

5.6

a)

Alkuhetkellä $t = 0$. Määritetään kuvaajalta piste, jossa $t = 0$. Kyseinen piste on $(0, 10)$, joten juhlien alussa vieraita oli paikalla 10.

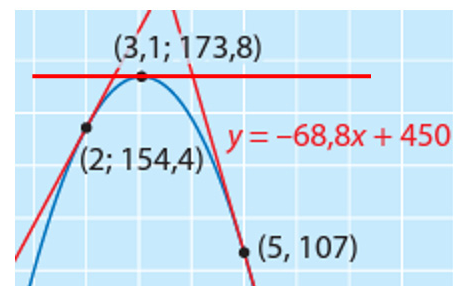
b)

Vieraiden määrän muutosnopeus kohdassa $t = 2$ h on kuvaajalle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Määritetään pisteiden $(0; 80,4)$ ja $(2; 154,4)$ kautta kulkevan tangenttisuoran kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{154,4 - 80,4}{2 - 0} = 37 \left(\frac{\text{vierasta}}{\text{h}} \right)$$

c)

Vieraiden määrän muutosnopeus on 0 sillä hetkellä, jolloin funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla eli tangentti on vaakasuora. Muutosnopeus on siis 0, kun $t = 3,1 \approx 3$ (h).



d)

Vieraiden hetkellinen muutosnopeus kohdassa $t = 5$ h on kuvaajalle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Kuvan mukaan tangentin yhtälö on $y = -68,6x + 450$, joten tangentin kulmakerroin on $-68,6 \approx -69$.

Vieraiden määrän muutosnopeus on siis -69 vierasta/h eli vieraita poistuu juhlista 69 tunnissa.

Vastaus a) 10 vierasta

 b) 37 vierasta/h

 c) 3 h

 d) -69 vierasta/h. Juhlista poistuu 69 vierasta tunnissa.

5.7

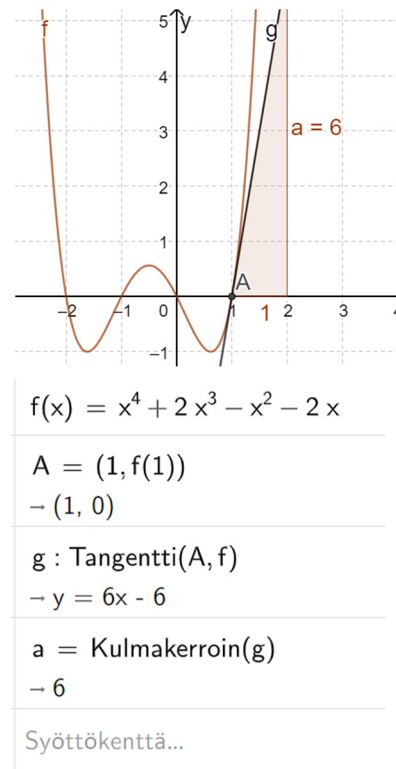
a)

Funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on funktiolle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin.

Määritetään kulmakerroin piirto-ohjelman avulla.

1. Piirretään funktion f kuvaaja.
2. Lisätään kuvaajalle piste kohtaan $(1, f(1))$.
Näin saadaan piste $(1, 0)$.
3. Piirretään pisteeseen tangenti.
4. Määritetään tangentin kulmakerroin.

Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 6. Funktion f hetkellinen muutosnopeus kohdassa 1 on siis 6.

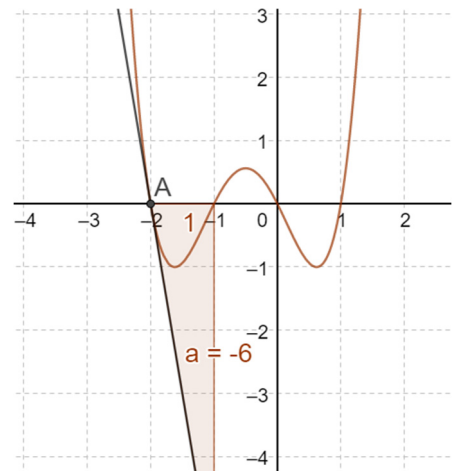


b)

Funktion derivaatta kohdassa $x = -2$ on funktiolle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Lisätään kuvaajalle piste kohtaan, jossa $x = -2$. Saadaan piste $(-2, 0)$.

Tangentin kulmakerroin on -6.

Funktion derivaatta kohdassa $x = 0$ on siis -6.



Vastaus a) 6

 b) -6

5.8

a)

Funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = -4$ on funktiolle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin.

Määritetään kulmakerroin piirto-ohjelman avulla.

1. Piirretään funktion f kuvaaja.
2. Lisätään kuvaajalle piste kohtaan $(-4, f(-4))$. Näin saadaan piste $(-4, 0)$.
3. Piirretään pisteeseen tangenti.
4. Määritetään tangentin kulmakerroin.

Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 12. Funktion f hetkellinen muutosnopeus kohdassa -4 on siis 12.

b)

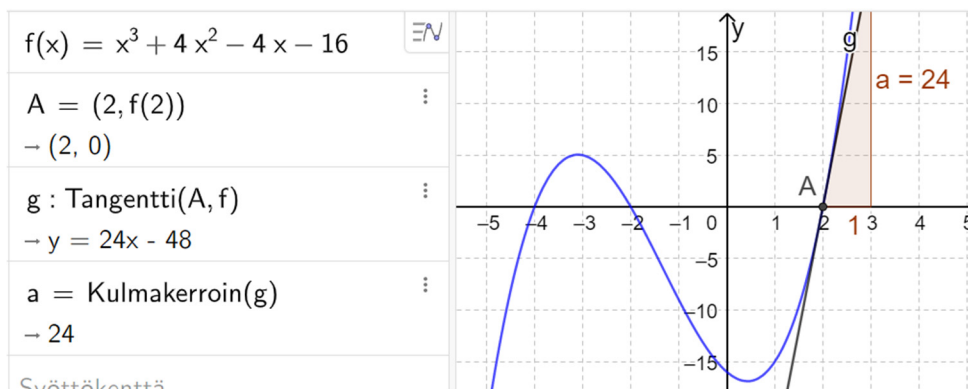
Funktion derivaatta kohdassa $x = -3$ on funktiolle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Lisätään kuvaajalle piste kohtaan, jossa $x = -3$. Saadaan piste $(-3, 5)$.

Tangentin kulmakerroin on -1 .

Funktion derivaatta kohdassa $x = -3$ on siis -1 .

c)

Piirretään funktiolle piste kohtaan $x = 2$ ja pisteeseen tangenti.



Tangentin yhtälö on $y = 24x - 48$, joten sen kulmakerroin on 24.

Vastaus a) 12 b) -1 c) $y = 24x - 48$, $k = 24$

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$$

$$A = (-4, f(-4))$$

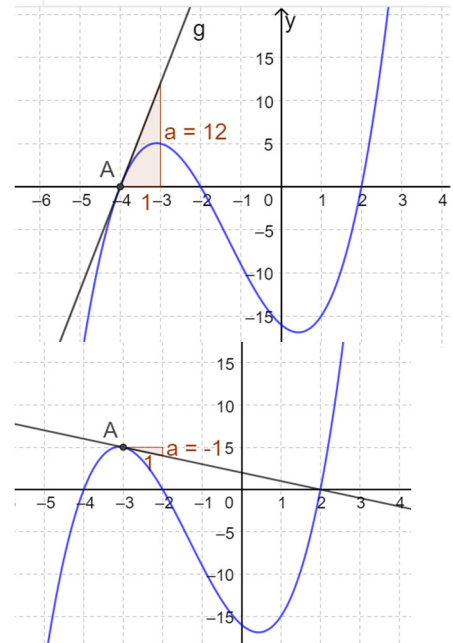
$$\rightarrow (-4, 0)$$

$$g : \text{Tangentti}(A, f)$$

$$\rightarrow y = 12x + 48$$

$$a = \text{Kulmakerroin}(g)$$

$$\rightarrow 12$$



5.9

a)

Piirretään funktion kuvaaja välillä $[-1, 3]$. Piirretään kuvaajalle piste (piste objektilla) ja pisteeseen tangenti.

Funktion derivaatta on 0, kun tangentin kulmakerroin on 0 eli tangenti on vaakasuora.

Siirretään pistettä ja seurataan tangentin kulmakertoimen muuttumista. Etsitään kohtia, joissa tangentin kulmakerroin saa arvon 0 eli tangenti on vaakasuora.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2, \quad (-1 \leq x \leq 3)$$

$$A = \text{Piste}(f)$$

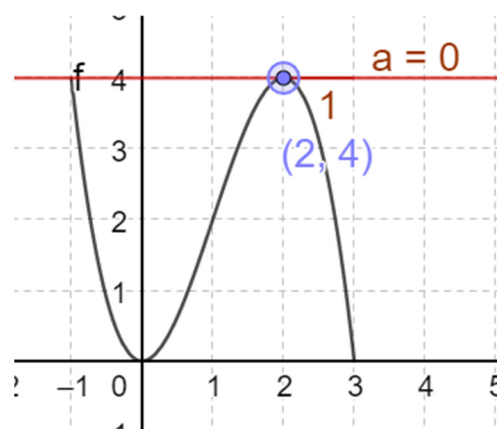
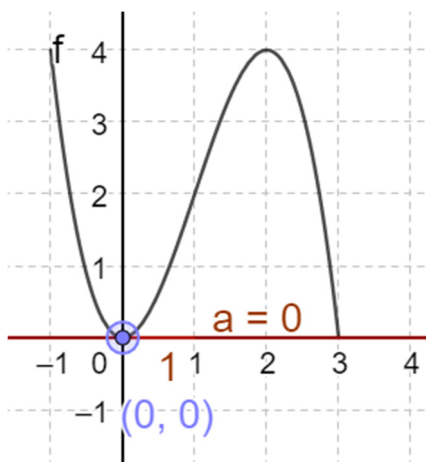
$$\rightarrow (1, 2)$$

$$g : \text{Tangentti}(A, f)$$

$$\rightarrow y = 3x - 1$$

$$a = \text{Kulmakerroin}(g)$$

$$\rightarrow 3$$

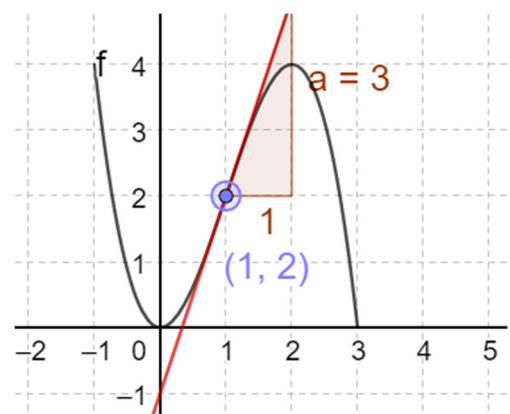


Huomataan, että kohtia on kaksi. Tangentin kulmakerroin eli derivaatta saa arvon 0, kun $x \approx 0$ ja $x \approx 2$.

b)

Funktion hetkellinen muutosnopeus on 3 kohdassa, jossa tangentin kulmakerroin on 3. Siirretään pistettä ja etsitään kysytty kohta.

Huomataan, että kohdassa $x \approx 1$ tangentin kulmakerroin eli hetkellinen muutosnopeus on 3.



Vastaus a) $x \approx 0$ ja $x \approx 2$

b) $x \approx 1$

5.10

a)

Derivaatan arvo kohdassa $x = 0$ on kyseiseen kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Kuvan perusteella tangentin yhtälö on $y = -5x + 1$, joten tangentin kulmakerroin on -5 .

Derivaatan arvo kohdassa $x = 0$ on siis -5 .

b)

Derivaatta saa arvon nolla, kun kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin on 0 eli tangentti on vaakasuora.

Kuvaajan perusteella tangentti on vaakasuora, kun $x = -0,745 \approx -0,75$ ja $x = 0,745 \approx 0,75$.

Vastaus a) -5

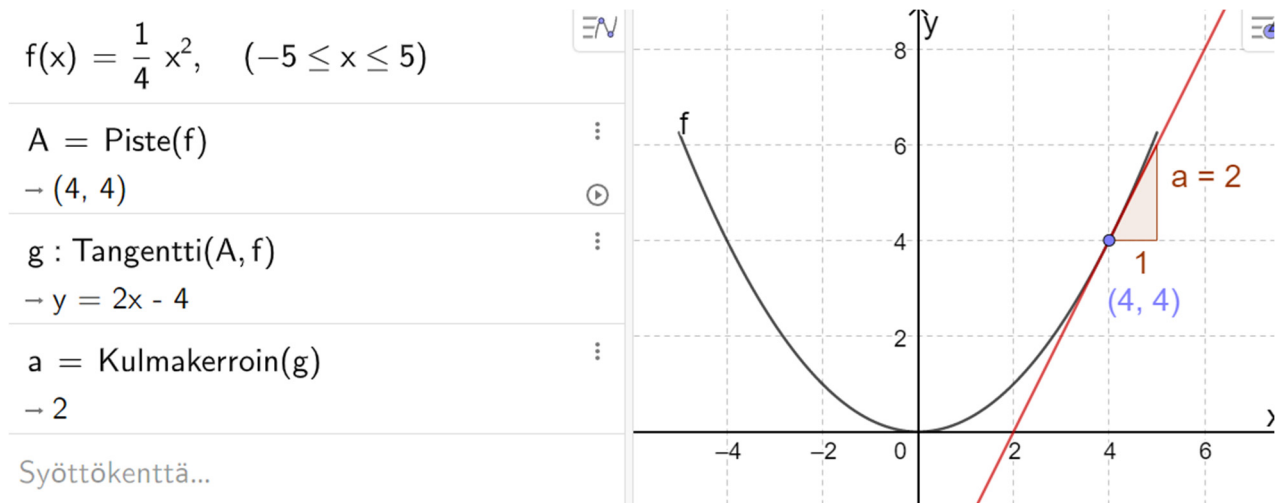
 b) $x \approx -0,75$ ja $x \approx 0,75$

5.11

a)

Piirretään funktion kuvaaja välillä $[-1, 3]$. Piirretään kuvaajalle piste (piste objektilla) ja pisteeseen tangenti.

Siirretään pistettä niin, että tangentin kulmakerroin on 2.

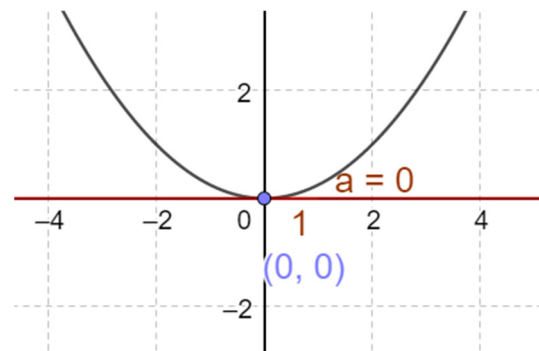


Huomataan, että kulmakerroin on 2, kun $x \approx 4$. Tangentin yhtälö on $y = 2x - 4$.

b)

Tangentin kulmakerroin muuttuu negatiivisesta positiiviseksi kohdassa, jossa kulmakerroin on 0.

Kysytty kohta on $x \approx 0$.



Vastaus a) $x \approx 4, y = 2x - 4$

 b) $x \approx 0$

5.12

a)

Hetkellinen muutosnopeus on kohtaan $x = 0$ piirretyn tangenttisuoran kulmakerroin.

Tangenttisuoralla on pisteet $(0, 0)$ ja $(1, 80)$. Lasketaan pisteiden avulla tangentin kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{80 - 0}{1 - 0} = \frac{80}{1} = 80$$

Funktion f hetkellinen muutosnopeus (eli derivaatta) kohdassa 0 on 80.

b)

Kohtaan $x = 2$ piirretyllä tangenttisuoralla on pisteet $(2, 0)$ ja $(0, 80)$.

Lasketaan pisteiden avulla tangentin kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{80 - 0}{0 - 2} = \frac{80}{-2} = -40$$

Funktion f hetkellinen muutosnopeus (eli derivaatta) kohdassa 2 on -40 .

c)

Kohtaan $x = 2$ piirretyllä tangenttisuoralla on pisteet $(4, 0)$ ja $(5, 80)$.

Lasketaan pisteiden avulla tangentin kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{80 - 0}{5 - 4} = \frac{80}{1} = 80$$

Funktion f hetkellinen muutosnopeus (eli derivaatta) kohdassa 4 on 80.

Vastaus **a)** 80

b) -40

c) 80

5.13

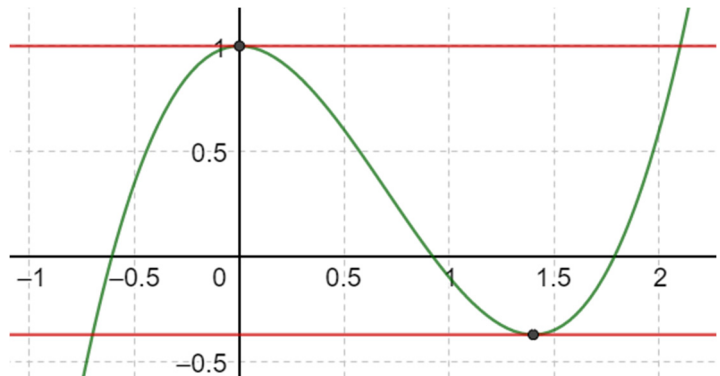
a)

Funktion nollakohdassa funktio saa arvon nolla. Funktion nollakohdassa kuvaaja leikkaa x -akselin.

Kuvan perusteella kohdat ovat $x \approx -0,6$, $x \approx 0,9$ ja $x \approx 1,8$.

b)

Funktion derivaatta saa arvon nolla, kun tangentti on vaakasuora eli sen kulmakerroin on 0. Tangentti on vaakasuora huippukohdissa eli $x \approx 0$ ja $x \approx 1,4$.



Vastaus a) $x \approx -0,6$, $x \approx 0,9$ ja $x \approx 1,8$

 b) $x \approx 0$ ja $x \approx 1,4$

5.14

a)

Hetkellinen muutosnopeus puolen sekunnin kuluttua on kohtaan $t = 0,5$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Kuvan perusteella tangentin yhtälö on $y = 9,19x + 1,4$, joten muutosnopeus on $9,19 \approx 9,2$ m/s.

b)

Pallon hetkellinen nopeus on 0 m/s kohdassa, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on 0 eli tangentti on vaakasuora.

Tangentti on vaakasuora kohdassa $x = 6,17 \approx 6,2$, joten hetkellinen nopeus on 0 m/s 6,2 sekunnin kuluttua.

c)

Huipun y-koordinaatti on 32,06, joten pallo käy 32 metrin korkeudessa.

Vastaus a) 9,2 m/s

 b) 6,2 s

 c) 32 m

5.15

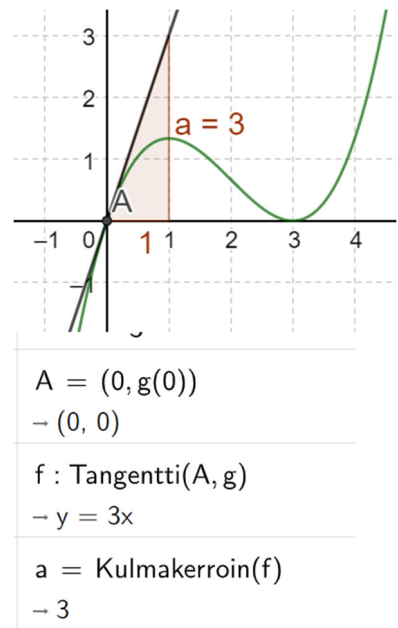
a)

Funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 0$ on funktiolle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin.

Määritetään kulmakerroin piirto-ohjelman avulla.

1. Piirretään funktion g kuvaaja.
2. Lisätään kuvaajalle piste kohtaan $(0, g(0))$.
Näin saadaan piste $(0, 0)$.
3. Piirretään pisteeseen tangenti.
4. Määritetään tangentin kulmakerroin.

Tangentin kulmakertoimeksi saadaan 3. Funktion g hetkellinen muutosnopeus kohdassa 0 on siis 3.

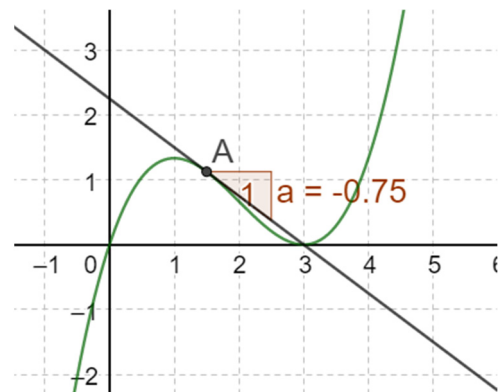


b)

Funktion derivaatta kohdassa $x = 1,5$ on funktiolle tähän kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Lisätään kuvaajalle piste kohtaan, jossa $x = 1,5$. Saadaan piste $(-1,5; 1,125)$.

Tangentin kulmakerroin on $-0,75$.

Funktion derivaatta kohdassa $x = 1,5$ on siis $-0,75$.



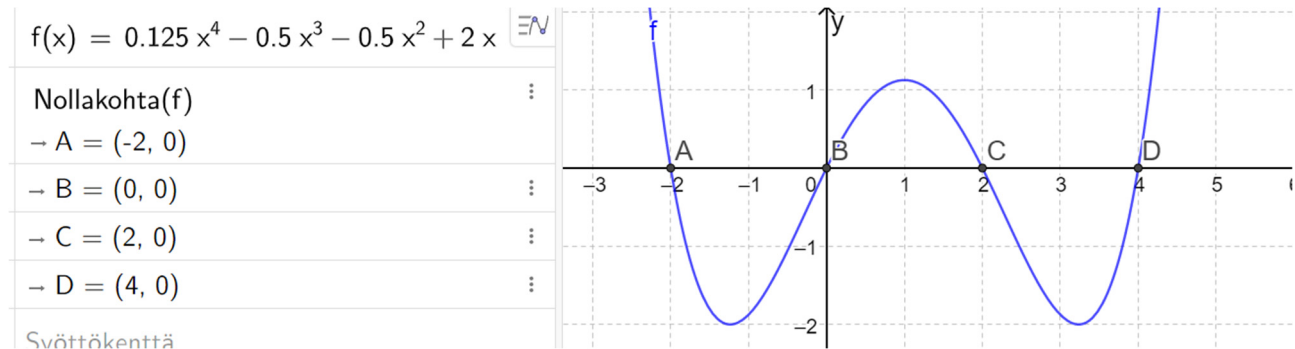
Vastaus a) 3

 b) $-0,75$

5.16

a)

Funktio saa nollakohdissa arvon nolla. Piirretään funktion kuvaaja ja selvitetään nollakohdat.



Nollakohdat ovat $x \approx -2$, $x \approx 0$, $x \approx 2$ ja $x \approx 4$.

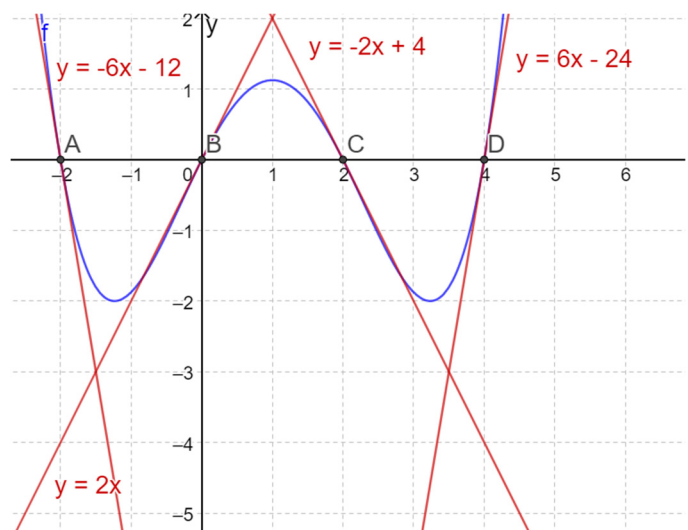
b)

Funktion hetkellinen muutosnopeus on funktiolle piirretyn tangentin kulmakerroin.

Määritetään nollakohtiin piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet piirto-ohjelman avulla.

Hetkelliset muutosnopeudet ovat

-6 kohdassa $x \approx 2$
 2 kohdassa $x \approx 0$
 -2 kohdassa $x \approx 2$
 6 kohdassa $x \approx 4$



c)

Kohtaan $x = 0$ piirretyn tangentin yhtälö on $y = 2x$.

Vastaus a) $x \approx -2$, $x \approx 0$, $x \approx 2$ ja $x \approx 4$

b) -6, kun $x \approx 2$; 2, kun $x \approx 0$; -2, kun $x \approx 2$; 6, kun $x \approx 4$

c) $y = 2x$

5.17

a) Piirretään funktion kuvaaja välillä $[-1, 2]$.
Piirretään kuvaajalle piste (piste objektilla)
ja pisteeseen tangenti.

Funktion derivaatta on 0, kun tangentin
kulmakerroin on 0 eli tangenti on vaakasuora.

Siirretään pistettä ja seurataan tangentin
kulmakertoimen muuttumista. Etsitään kohtia,
joissa tangentin kulmakerroin saa arvon 0 eli
tangenti on vaakasuora.

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + x, \quad (-1 \leq x \leq 2)$$

A = Piste(f)

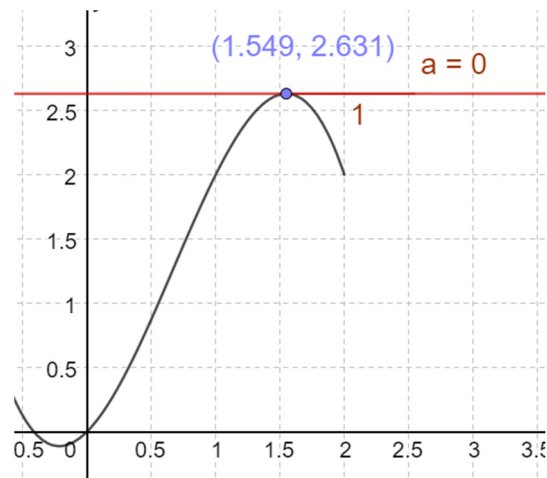
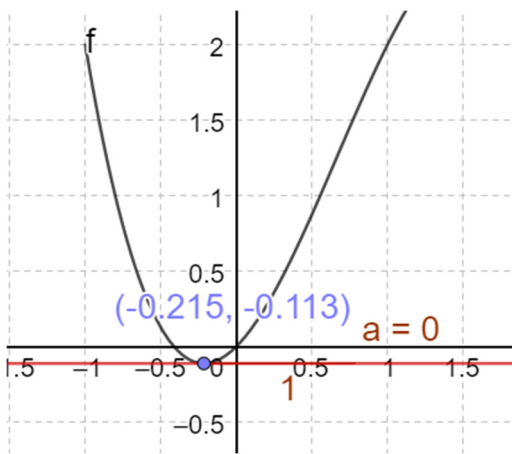
→ (-0.90877, 1.49347)

g : Tangentti(A, f)

→ $y = -5.11265x - 3.15275$

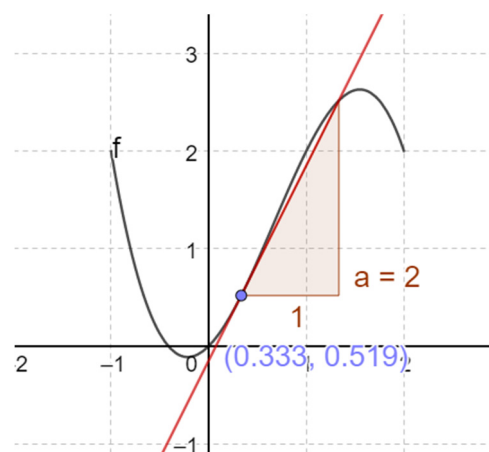
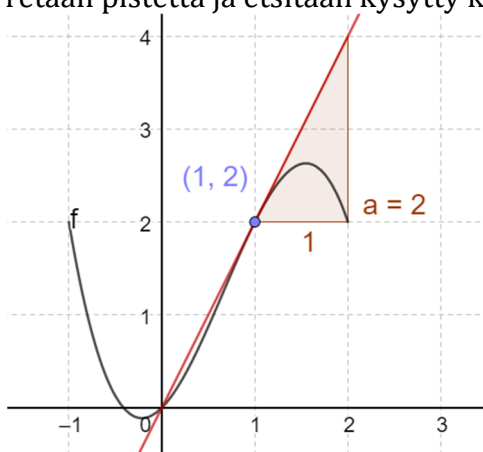
a = Kulmakerroin(g)

→ -5.11265



Huomataan, että kohtia on kaksi. Tangentin kulmakerroin eli derivaatta saa arvon 0, kun $x \approx -0,2$ ja $x \approx 1,5$.

b) Funktion hetkellinen muutosnopeus on 2 kohdassa, jossa tangentin kulmakerroin on 2. Siirretään pistettä ja etsitään kysytty kohta.



Huomataan, että kohdissa $x \approx 1,0$ ja $x \approx 0,3$ tangentin kulmakerroin eli hetkellinen muutosnopeus on 2.

Vastaus **a)** $x \approx -0,2$ ja $x \approx 1,5$ **b)** $x \approx 0,3$ ja $x \approx 1,0$

5.18

a)

Derivaatta saa arvon nolla, kun kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin on 0 eli tangentti on vaakasuora.

Kuvaajan perusteella tangentti on vaakasuora, kun $x = -1,869 \approx -1,87$ ja $x = 0,535 \approx 0,54$.

b)

Derivaatan arvo kohdassa $x = 0$ on kyseiseen kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin. Kuvan perusteella tangentin yhtälö on $-3x + y = 0$.

Muutetaan yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} -3x + y &= 0 \\ y &= 3x \end{aligned}$$

Kulmakerroin on siis 3, joten derivaatan arvo kohdassa $x = 0$ on 3.

Vastaus a) $x \approx -1,87$ ja $x \approx 0,54$

 b) 3

5.19

a)

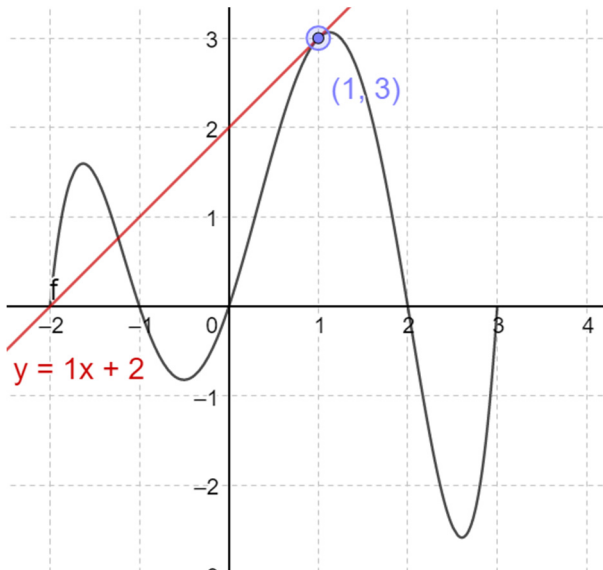
Piirretään funktion kuvaaja välillä $[-2, 3]$.
Piirretään kuvaajalle piste (piste objektilla)
ja pisteeseen tangenti.

Siirretään pistettä ja seurataan tangentin
kulmakertoimen muuttumista. Etsitään kohta,
jossa tangentin kulmakerroin on suurin.

Huomataan, että tangentin kulmakerroin eli
hetkellinen muutosnopeus on suurimmillaan,
kun $x \approx 3$.

b)

Siirretään pistettä ja seurataan tangentin
kulmakertoimen muuttumista. Etsitään kohta,
jossa tangentin kulmakerroin on 1 ja tangenti
leikkaa y-akselin kohdassa $y = 2$.



Huomataan, että tangentin yhtälö on $y = x + 2$, kun $x \approx 1$.

Vastaus a) $x \approx 3$

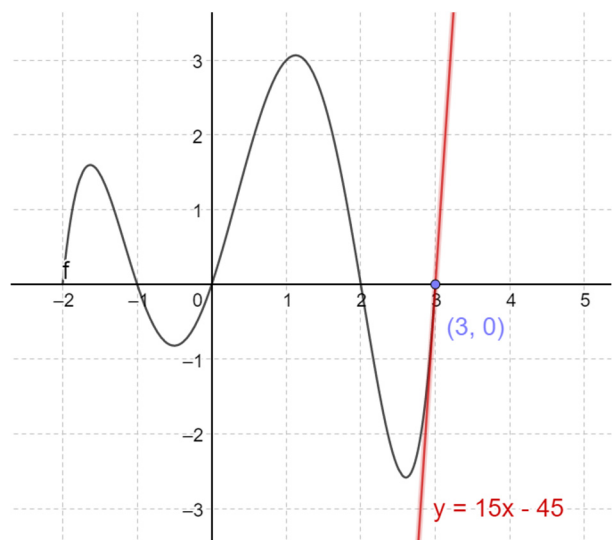
b) $x \approx 1$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{4}x^3 + 2x^2 + 3x, \quad (-2 \leq x \leq 3)$$

$$A = \text{Piste}(f) \\ - (0.333, 1.152)$$

$$g : \text{Tangentti}(A, f) \\ - y = 3.691x - 0.078$$

$$a = \text{Kulmakerroin}(g) \\ - 3.691$$



5.20

a)

Kohta $x = 3$ on kuvaajassa terävä kärki. Kärkeen ei voi piirtää yksikäsitteisesti tangenttia, joten derivaattaa ei ole olemassa.

b)

Kohdassa $x = 3$ piirretty tangentti olisi pystysuora ($x = 3$). Pystysuoralle suoralle ei ole kulmakerrointa määritelty, joten derivaattaakaan ei ole olemassa.

Vastaus

a) Kärkeen ei voi piirtää yksikäsitteisesti tangenttia, joten derivaattaa ei ole olemassa.

b) Pystysuoran tangentin kulmakerroin ei ole määritelty, joten derivaattaakaan ei ole olemassa.