

Binomi 8 – Luku 6 – Tehtävien malliratkaisut

6.1

Funktion derivaatta kuvaa hetkellistä muutosnopeutta. Derivaatta on myös kuvaajalla piirretyn tangentin kulmakerroin. Näin ollen samaa tarkoittavat

- Funktion derivaatta kohdassa nolla (B)
- Tangentin kulmakerroin kohdassa nolla (D)
- Funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa nolla (F)

Vastaus B, D ja F

6.2

a)

Kuvaajan perusteella funktion arvo kohdassa $x = 1$ on 0, joten $f(1) \approx 0$.

b)

Kohtaan $x = 1$ piirretty tangentti kulkee pisteiden $(1, 0)$ ja $(2, 1)$ kautta, joten tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{1 - 0}{2 - 1} = 1$$

Näin ollen $f(1) \approx 1$.

c)

Kuvaajan perusteella funktion arvo kohdassa $x = 3$ on -2 , joten $f(1) \approx -2$.

d)

Kohtaan $x = 3$ piirretty tangentti kulkee pisteiden $(2, 1)$ ja $(3, -2)$ kautta, joten tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{-2 - 1}{3 - 2} = -3$$

Näin ollen $f(3) \approx -3$.

Vastaus **a)** 0

b) 1

c) -2

d) -3

6.3

a)

Merkintä $f(1)$ tarkoittaa funktion f arvoa kohdassa $x = 1$.

Kun $x = 1$, funktio kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta. Funktion arvo on pisteen y -koordinaatti, joten $f(1) = 2$.

b)

Merkintä $f'(-5)$ tarkoittaa funktion f derivaattaa eli tangentin kulmakerrointa kohdassa $x = -5$.

Määritetään kuvaajalle kohtaan $x = -5$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Tangentti kulkee pisteiden $(-5, 2)$ ja $(-2, 4)$ kautta. Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{4 - 2}{-2 - (-5)} = \frac{2}{-2 + 5} = \frac{2}{3}$$

Siis $f'(-5) = \frac{2}{3}$.

c)

Määritetään kuvaajalle kohtaan $x = 4$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Tangentti kulkee pisteiden $(4, -1)$ ja $(1, 3)$ kautta. Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{3 - (-1)}{1 - 4} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

Siis $f'(4) = -\frac{4}{3}$.

d)

Kohtaan $x = -2$ piirretty tangentti on vaakasuora eli $k = 0$. Näin ollen $f'(-2) = 0$.

Vastaus a) 2 b) $\frac{2}{3}$ c) $-\frac{4}{3}$ d) 0

6.4

a)

Funktio $f(x) = 12$ on vakiofunktio, joten sen derivaatta on nolla.

$$\begin{aligned} f(x) &= 12 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

← Jos $f(x) = c$,
niin $f'(x) = 0$.

b)

Funktio $g(x) = -7x + 1$ on ensimmäisen asteen polynomi, joten sen derivaatta on funktion ensimmäisen asteen termin kerroin.

$$\begin{aligned} g(x) &= -7x + 1 \\ g'(x) &= -7 \end{aligned}$$

← Jos $f(x) = kx + b$,
niin $f'(x) = k$.

c)

Funktio $h(x) = x^4$ on potenssifunktio, joten sen derivaatta saadaan potenssin derivointikaavalla.

$$\begin{aligned} h(x) &= x^4 \\ h'(x) &= 4x^{4-1} = 4x^3 \end{aligned}$$

← Jos $f(x) = x^n$,
niin $f'(x) = nx^{n-1}$.

Vastaus a) $f'(x) = 0$

 b) $g'(x) = -7$

 c) $h'(x) = 4x^3$

6.5

a)

Funktion f derivaatta kohdassa $x = 1$ on kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Määritetään kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Tangentti kulkee pisteiden $(1, 2)$ ja $(0, -1)$ kautta. Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{-1 - 2}{0 - 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Siis $f'(1) = 3$.

b)

Määritetään kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Tangentti kulkee pisteiden $(-1, 0)$ ja $(0, -1)$ kautta. Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{-1 - 0}{0 - (-1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

Siis $f'(-1) = -1$.

c)

Määritetään kuvaajalle kohtaan $x = -2$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Tangentti kulkee pisteiden $(-2, 2)$ ja $(-1, -1)$ kautta. Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{-1 - 2}{-1 - (-2)} = \frac{-3}{1} = -3$$

Siis $f'(-2) = -\frac{1}{3}$.

Vastaus **a)** 3 **b)** -1 **c)** -3

6.6

a)

Merkintä $f(0)$ tarkoittaa funktion f arvoa kohdassa $x = 0$.

Kun $x = 0$, funktio kulkee pisteen $(1, 0)$ kautta. Funktion arvo on pisteen y -koordinaatti, joten $f(0) = 0$.

b)

Merkintä $f'(0)$ tarkoittaa funktion f derivaattaa eli tangentin kulmakerrointa kohdassa $x = 0$.

Määritetään kuvaajalle kohtaan $x = 0$ piirretyn tangentin kulmakerroin.
Tangentti kulkee pisteiden $(0,0)$ ja $(1,1)$ kautta. Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{1 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Siis $f'(0) = 1$.

c)

Merkintä $f(-0,7)$ tarkoittaa funktion f arvoa kohdassa $x = -0,7$.

Kun $x = -0,7$, funktio kulkee pisteen $(0,7; -0,25)$ kautta.
Funktion arvo on pisteen y -koordinaatti, joten $f(-0,7) = -0,25$.

d)

Kohtaan $x = -0,5$ piirretty tangentti on vaakasuora eli $k = 0$. Näin ollen $f'(-0,5) = 0$.

Vastaus **a)** 0 **b)** 1 **c)** -0,25 **d)** 0

6.7

a)

Funktio $f(x) = -2$ on vakiofunktio, joten sen derivaatta on nolla.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

← Jos $f(x) = c$,
niin $f'(x) = 0$.

b)

Funktio $g(x) = x - 6$ on ensimmäisen asteen polynomi, joten sen derivaatta on funktion ensimmäisen asteen termin kerroin.

$$\begin{aligned} g(x) &= 1x - 6 \\ g'(x) &= 1 \end{aligned}$$

← Jos $f(x) = kx + b$,
niin $f'(x) = k$.

c)

Funktio $h(x) = x^6$ on potenssifunktio, joten sen derivaatta saadaan potenssin derivointikaavalla.

$$\begin{aligned} h(x) &= x^6 \\ h'(x) &= 6x^{6-1} = 6x^5 \end{aligned}$$

← Jos $f(x) = x^n$,
niin $f'(x) = nx^{n-1}$.

Vastaus a) $f'(x) = 0$

 b) $g'(x) = 1$

 c) $h'(x) = 6x^5$

6.8

a)

Funktio $a(x) = 3 - 7x$ on ensimmäisen asteen polynomi, joten sen derivaatta on funktion ensimmäisen asteen termin kerroin.

$$a(x) = 3 - 7x$$
$$a'(x) = -7$$



Jos $f(x) = kx + b$,
niin $f'(x) = k$.

b)

Funktio $b(x) = x^{12}$ on potenssifunktio, joten sen derivaatta saadaan potenssin derivointikaavalla.

$$b(x) = x^{12}$$
$$b'(x) = 12x^{12-1} = 12x^{11}$$



Jos $f(x) = x^n$,
niin $f'(x) = nx^{n-1}$.

c)

Funktio $c(x) = \pi$ on vakiofunktio, joten sen derivaatta on nolla.



Ympyrän kehän pituuden ja
halkaisijan suhde $\pi \approx 3,14$.

$$c(x) = \pi$$
$$c'(x) = 0$$

Vastaus a) $a'(x) = -7$

 b) $b'(x) = 12x^{11}$

 c) $c'(x) = 0$

6.9

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x \\ f'(x) &= 4 \end{aligned} \quad \text{eli A - 4}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 \\ g'(x) &= 2x \end{aligned} \quad \text{eli B - 5}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= 4 \\ h'(x) &= 0 \end{aligned} \quad \text{eli C - 1}$$

$$\begin{aligned} k(x) &= 2x^2 \\ k'(x) &= 2 \cdot 2x = 4x \end{aligned} \quad \text{eli D - 2}$$

$$\begin{aligned} r(x) &= x^4 \\ r'(x) &= 4x^3 \end{aligned} \quad \text{eli E - 3}$$

Vastaus A - 4
 B - 5
 C - 1
 D - 2
 E - 3

6.10

a)

Siirretään monomin kerroin 4 derivaatan eteen.

$$D(4x^5) = 4 \cdot D(x^5) = 4 \cdot 5x^{5-1} = 20x^4$$

b)

Summalausekkeessa termit voidaan derivoida erikseen.

$$\begin{aligned} & D(-4x^2 + 5x + 3) \\ &= D(-4x^2) - D(5x) + D(3) \\ &= -4 \cdot D(x^2) - 5 \cdot D(x) + D(3) \\ &= -4 \cdot 2x - 5 + 0 \\ &= -8x - 5 \end{aligned}$$

←	$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$
←	Jos $f(x) = k \cdot x$, niin $f'(x) = k$. Jos $f(x) = c$, niin $f'(x) = 0$.
←	$D(x^n) = nx^{n-1}$

c)

Derivoidaan lauseke termeittäin

$$\begin{aligned} & D\left(-\frac{1}{3}x^6 + \frac{3}{5}x^5 + 3x - 1\right) \\ &= D\left(-\frac{1}{3}x^6\right) + D\left(\frac{3}{5}x^5\right) + D(3x) + D(-1) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 6x^5 + \frac{3}{5} \cdot 5x^4 + 3 + 0 \\ &= -\frac{6}{3}x^5 + \frac{15}{5}x^4 + 3 \\ &= -2x^5 + 3x^4 + 3 \end{aligned}$$

Vastaus a) $20x^4$

 b) $-8x - 5$

 c) $-2x^5 + 3x^4 + 3$

6.11

a)

Funktio $p(x) = 4x + 2$ on ensimmäisen asteen polynomi, joten sen derivaatta on funktion ensimmäisen asteen termin kerroin.

$$p(x) = 4x + 2$$
$$p'(x) = 4$$



Jos $f(x) = kx + b$,
niin $f'(x) = k$.

b)

Derivoidaan funktio termeittäin.

$$q(x) = 3 - x^3$$
$$q'(x) = 0 - 3x^2 = -3x^2$$



$f'(x^n) = nx^{n-1}$
Jos $f(x) = c$, niin $f'(x) = 0$.

c)

$$r(x) = 3x^2 - 2x$$
$$r'(x) = 3 \cdot 2x - 2 = 6x - 2$$

Vastaus a) $p'(x) = 4$

 b) $q'(x) = -3x^2$

 c) $r'(x) = 6x - 2$

6.12

a)

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 5$$

$$f'(x) = 3 \cdot 2x - 2 - 0 = 6x - 2$$

$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$f'(x^n) = nx^{n-1}$$

Jos $f(x) = kx + b$, niin $f'(x) = k$.
 Jos $f(x) = c$, niin $f'(x) = 0$

b)

$$g(x) = 4x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4 \cdot 4x^3 - 6 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x - 3 \\ &= 16x^3 - 18x^2 + 8x - 3 \end{aligned}$$

c)

$$h(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 6$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{3}{4} \cdot 4x^3 - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x - 1 \\ &= 3x^3 - x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} = 3$$

Vastaus

a) $f'(x) = 6x - 2$

b) $g'(x) = 16x^3 - 18x^2 + 8x - 3$

c) $h'(x) = 3x^3 - x^2 + x - 1$

6.13

a)

Kun $x = 0$, funktio kulkee pisteen $(0, -3)$ kautta. Funktion arvo on pisteen y -koordinaatti, joten $f(0) = -3$.

b)

Määritetään kuvaajalle kohtaan $x = 0$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Tangentti kulkee pisteiden $(0, -3)$ ja $(1, -5)$ kautta. Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{-5 - (-3)}{1 - 0} = \frac{-5 + 3}{1} = \frac{-2}{1} = -2$$

Siis $f'(0) = -2$.

c)

Määritetään kuvaajalle kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Tangentti kulkee pisteiden $(3, 0)$ ja $(4, 4)$ kautta. Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{4 - 0}{4 - 3} = \frac{4}{1} = 4$$

Siis $f'(3) = 4$.

d)

$f(x) = 0$, kun funktion arvo on nolla eli kuvaaja leikkaa x -akselin.

Kuvaajan perusteella $f(x) = 0$, kun $x \approx -1$ tai $x \approx 3$.

e)

Funktion derivaatta saa arvon nolla, kun kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuora.

Vaakasuora tangentti voidaan piirtää paraabelin huippupisteen $(1, -4)$ kautta, joten $f'(x) = 0$, kun $x = 1$.

f)

Funktion derivaatta saa arvon -2 , kun kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on -2 .

Tällöin y -koordinaatti pienenee kahdella, kun x -koordinaatti kasvaa yhdellä.

Kuvaajalle kohtaan $x = 0$ piirretyn tangentin kulmakerroin on -2 , joten $f'(x) = -2$, kun $x = 0$.

Vastaus

a) -3

b) -2

c) 4

d) $x \approx -1$ tai $x \approx 3$

e) $x = 1$

f) $x = 0$

6.14

a)

Sievennetään ensin funktio osittelulain avulla.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x - 3) - (3x^2 - 2x + 1) \\ &= 2x - 3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ &= -3x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$f(x) = -3x^2 + 4x - 1$$



$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$f'(x) = -3 \cdot 2x + 4 - 0 = -6x + 4$$

b)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2(x^2 - 4x - 1) \\ &= 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot (-4x) + 2x^2 \cdot (-1) \\ &= 2x^4 - 8x^3 - 2x^2 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$g(x) = 2x^4 - 8x^3 - 2x^2$$



$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \cdot 4x^3 - 8 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x \\ &= 8x^3 - 24x^2 - 4x \end{aligned}$$

Vastaus a) $f'(x) = -6x + 4$

 b) $g'(x) = 8x^3 - 24x^2 - 4x$

6.15

a)

Sievennetään ensin funktio osittelulain avulla.

$$\begin{aligned}f(x) &= (2x - 1)(x + 1) \\&= 2x \cdot x + 2x \cdot 1 - 1 \cdot x - 1 \cdot 1 \\&= 2x^2 + 2x - x - 1 \\&= 2x^2 + x - 1\end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$f'(x) = 2 \cdot 2x + 1 - 0 = 4x + 1$$

b)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned}g(x) &= (x^2 - 1)(2x^2 - x) \\&= x^2 \cdot 2x^2 + x^2 \cdot (-x) - 1 \cdot 2x^2 - 1 \cdot (-x) \\&= 2x^4 - x^3 - 2x^2 + x\end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$g(x) = 2x^4 - 1x^3 - 2x^2 + x$$

$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2 \cdot 4x^3 - 1 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 \\&= 8x^3 - 3x^2 - 4x + 1\end{aligned}$$

Vastaus a) $f'(x) = 4x + 1$

 b) $g'(x) = 8x^3 - 3x^2 - 4x + 1$

6.16

a)

Sievennetään ensin funktio osittelulain avulla.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x(x^2 - 2x) \\ &= 3x \cdot x^2 + 3x \cdot (-2x) \\ &= 3x^3 - 6x^2 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$p(x) = 3x^3 - 6x^2$$



$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$p'(x) = 3 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x = 9x^2 - 12x$$

b)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned} r(x) &= x - x(x - 1)(x + 1) \\ &= x - (x^2 - x)(x + 1) \\ &= x - (x^3 + x^2 - x^2 - x) \\ &= x - x^3 + x \\ &= -x^3 + 2x \end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$r(x) = -1x^3 + 2x$$



$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\begin{aligned} r'(x) &= -1 \cdot 3x^2 + 2 \\ &= -3x^2 + 2 \end{aligned}$$

Vastaus a) $p'(x) = 9x^2 - 12x$

 b) $r'(x) = -3x^2 + 2$

6.17

a)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(3x - x^2) + (x + 2)(x + 3) \\ &= 3x^2 - x^3 + (x^2 + 3x + 2x + 6) \\ &= 3x^2 - x^3 + x^2 + 5x + 6 \\ &= -x^3 + 4x^2 + 5x + 6 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$f(x) = -1x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$

$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x + 5 + 0 \\ &= -3x^2 + 8x + 5 \end{aligned}$$

b)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned} g(t) &= 2t(t + 2)^2 \\ &= 2t(2 + t)(2 + t) \\ &= (4t + 2t^2)(2 + t) \\ &= 4t \cdot 2 + 4t \cdot t + 2t^2 \cdot 2 + 2t^2 \cdot t \\ &= 8t + 4t^2 + 4t^2 + 2t^3 \\ &= 2t^3 + 8t^2 + 8t \end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$g(t) = 2t^3 + 8t^2 + 8t$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2 \cdot 3t^2 + 8 \cdot 2t + 8 \\ &= 6t^2 + 16t + 8 \end{aligned}$$

Vastaus a) $f'(x) = -3x^2 + 8x + 5$

 b) $g'(t) = 6t^2 + 16t + 8$

6.18

a)

Ympyrän kehän pituuden funktiossa muuttuja on säde r ja vakiokerroin 2π .

Derivoidaan funktio.

$$p(r) = 2\pi r$$

$$p'(r) = 2\pi$$

b)

Ympyrän pinta-alan funktiossa muuttuja on säde r ja vakiokerroin π .

Derivoidaan funktio.

$$A(r) = \pi r^2$$

$$A'(r) = 2\pi r^{2-1} = 2\pi r$$

c)

Sektorin pinta-alan funktiossa muuttuja on säde r ja vakiokerroin $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi$.

Derivoidaan funktio.

$$A(r) = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2$$

$$A'(r) = \frac{2\alpha}{360^\circ} \pi r^{2-1} = \frac{\alpha}{180^\circ} \pi r$$

Vastaus a) $p'(r) = 2\pi$

 b) $A'(r) = 2\pi r$

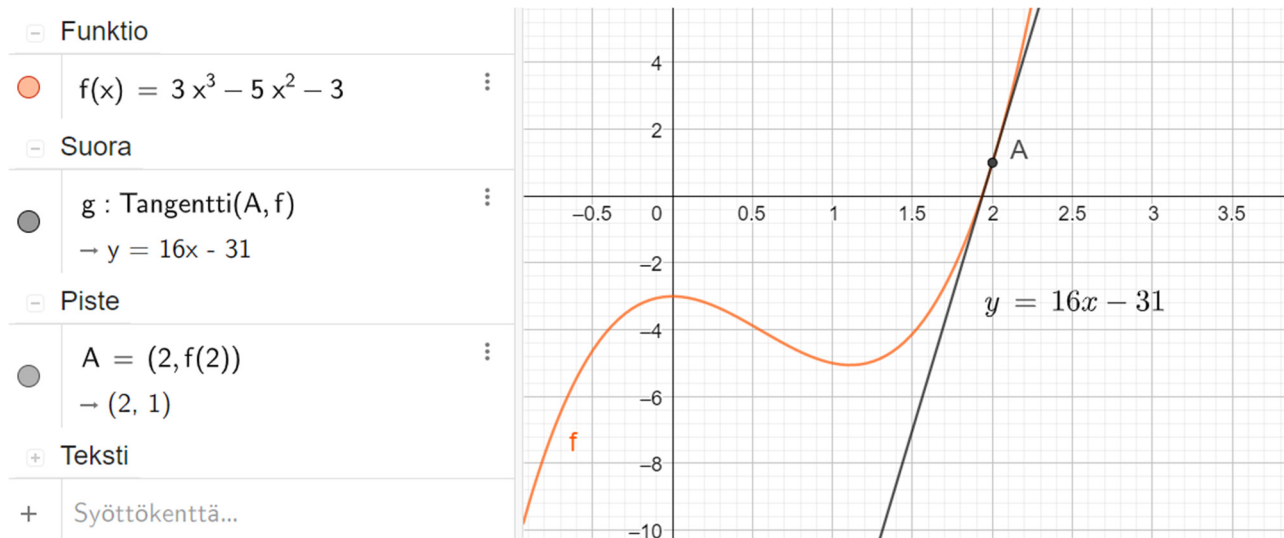
 c) $A'(r) = \frac{\alpha}{180^\circ} \pi r$

6.19

a)

Piirretään funktion kuvaajalle kohtaan $x = 2$ tangentti. Tangentin kulmakerroin on $f'(2)$.

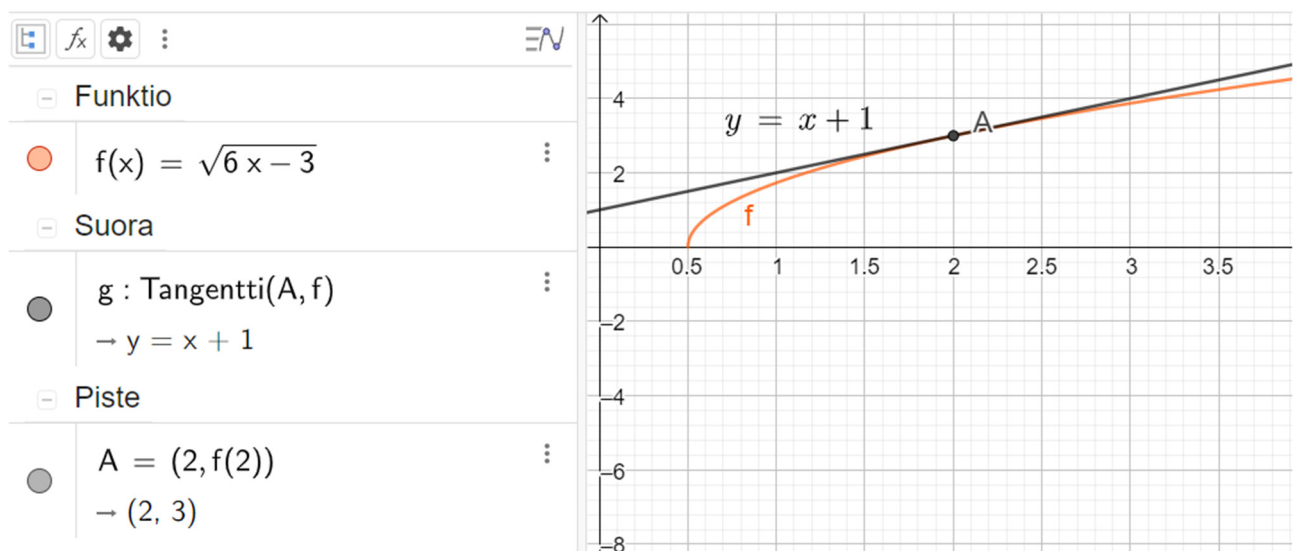
Pisteen käyrälle kohtaan $x = 2$ voi piirtää komennolla $A = (2, f(2))$



Tangentin kulmakerroin on 16, joten $f'(2) = 16$.

b)

Piirretään funktion kuvaajalle kohtaan $x = 2$ tangentti. Tangentin kulmakerroin on $f'(2)$.



Tangentin kulmakerroin on 1, joten $f'(2) = 1$.

Vastaus a) $f'(2) = 16$

b) $f'(2) = 1$

6.20

a)

Merkintä $f(-2)$ tarkoittaa funktion f arvoa kohdassa $x = -2$.

Kun $x = -2$, funktio kulkee pisteen $(-2, -7)$ kautta. Funktion arvo on pisteen y -koordinaatti, joten $f(-2) = -7$.

b)

Merkintä $f'(-2)$ tarkoittaa funktion f derivaattaa eli tangentin kulmakerrointa kohdassa $x = -2$.

Määritetään kuvaajalle kohtaan $x = -2$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Tangentti kulkee pisteiden $(-2, -7)$ ja $(-1, 1)$ kautta. Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{1 - (-7)}{-1 - (-2)} = \frac{8}{1} = 8$$

Siis $f'(-2) = 8$

c)

Kun $x = 1$, funktio kulkee pisteen $(1, -1)$ kautta. Funktion arvo on pisteen y -koordinaatti, joten $f(1) = -1$.

d)

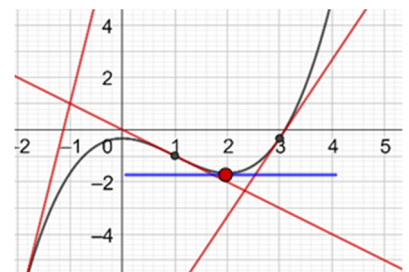
Määritetään kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Tangentti kulkee pisteiden $(1, -1)$ ja $(3, -3)$ kautta. Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{-3 - (-1)}{3 - 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Siis $f'(1) = -1$

e)

Kohtaan $x = 2$ piirretty tangentti on vaakasuora eli $k = 0$. Näin ollen $f'(2) = 0$.



Vastaus a) -7 b) 8 c) -1 d) -1 e) 0

6.21

a)

Funktio $f(x) = -3$ on vakiofunktio, joten sen derivaatta on nolla.

$$f(x) = -3$$
$$f'(x) = 0$$

← Jos $f(x) = c$,
niin $f'(x) = 0$.

b)

Funktio $g(x) = 6 - 3x$ on ensimmäisen asteen polynomi, joten sen derivaatta on funktion ensimmäisen asteen termin kerroin.

$$g(x) = 6 - 3x$$
$$g'(x) = -3$$

← Jos $f(x) = kx + b$,
niin $f'(x) = k$.

c)

Funktio $p(x) = 3x^3$ on potenssifunktio, joten sen derivaatta saadaan potenssin derivointikaavalla.

$$p(x) = 3x^3$$
$$p'(x) = 3 \cdot 3x^{3-1} = 9x^2$$

← Jos $f(x) = x^n$,
niin $f'(x) = nx^{n-1}$.

d)

Derivoidaan funktio termeittäin.

$$r(x) = 4 - 2x^6$$
$$r'(x) = 0 - 2 \cdot 6x^{6-1} = -12x^5$$

Vastaus a) $f'(x) = 0$

c) $p'(x) = 9x^2$

b) $g'(x) = -3$

d) $r'(x) = -12x^5$

6.22

$$f'(x) = 6 \quad \text{A} - 4$$

$$g'(x) = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2 \quad \text{B} - 3$$

$$h'(x) = 3 \cdot 2x - 0 = 6x \quad \text{C} - 1$$

$$p'(x) = 0 \quad \text{D} - 6$$

$$q'(x) = 3 \cdot 2x - 3 = 6x - 3 \quad \text{E} - 2$$

$$r'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 = 6x^2 - 3 \quad \text{F} - 5$$

$$s'(x) = 0 + 3 \cdot 2x = 6x \quad \text{G} - 1$$

Vastaus A - 4
 B - 3
 C - 1
 D - 6
 E - 2
 F - 5
 G - 1

6.23

a)

Siirretään monomin kerroin derivaatan eteen.

$$D\left(-\frac{2}{3}x^9\right) = -\frac{2}{3} \cdot D(x^9) = -\frac{2}{3} \cdot 9x^{9-1} = -\frac{18}{3} \cdot x^8 = -6x^8$$

b)

Summalausekkeessa termit voidaan derivoida erikseen.

$$\begin{aligned} & D(2x^4 - 3x^3 - 2x) \\ &= D(2x^4) - D(3x^3) - D(2x) \\ &= 2 \cdot D(x^4) - 3 \cdot D(x^3) - 2D(x) \\ &= 2 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 1 \\ &= 8x^3 - 9x^2 - 2 \end{aligned}$$

$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$

Jos $f(x) = k \cdot x$, niin $f'(x) = k$.
 Jos $f(x) = c$, niin $f'(x) = 0$.

$D(x^n) = nx^{n-1}$

c)

Derivoidaan lauseke termeittäin

$$\begin{aligned} & D\left(\frac{1}{4}x^6 - \frac{5}{6}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) \\ &= D\left(\frac{1}{4}x^6\right) - D\left(\frac{5}{6}x^4\right) + D\left(\frac{3}{2}x^2\right) - D\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1 \cdot 6}{4}x^5 - \frac{5 \cdot 4}{6}x^3 + \frac{3 \cdot 2}{2}x - \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{3}{2}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vastaus a) $-6x^8$

 b) $8x^3 - 9x^2 - 2$

 c) $\frac{3}{2}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

6.24

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned}f(x) &= (3x^2 - x) - (2x^3 - x^2 + 1) \\&= 3x^2 - x - 2x^3 + x^2 - 1 \\&= -2x^3 + 4x^2 - x - 1\end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$f(x) = -2x^3 + 4x^2 - x + 6$$

$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x - 1 + 0 \\&= -6x^2 + 8x - 1\end{aligned}$$

b)

Sievennetään ensin funktion lauseke osittelulain avulla.

$$\begin{aligned}g(x) &= -3x(3x - 1) \\&= -3x \cdot 3x - 3x \cdot (-1) \\&= -9x^2 + 3x\end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$g(x) = -9x^2 + 3x$$

$$\begin{aligned}g'(x) &= -9 \cdot 2x + 3 \\&= -18x + 3\end{aligned}$$

Vastaus **a)** $f'(x) = -6x^2 + 8x - 1$

b) $g'(x) = -18x + 3$

6.25

a)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned}f(x) &= (3x^2 - x)(2x - 3) + x(3x - 1) \\&= 6x^3 - 9x^2 - 2x^2 + 3x + 3x^2 - x \\&= 6x^3 - 8x^2 + 2x\end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$f(x) = 6x^3 - 8x^2 + 2x \quad \leftarrow \boxed{D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6 \cdot 3x^2 - 8 \cdot 2x + 2 \\&= 18x^2 - 16x + 2\end{aligned}$$

b)

Sievennetään ensin funktion lauseke osittelulain avulla.

$$\begin{aligned}g(x) &= 6x^2 - x^2(3x - 4)^2 \\&= 6x^2 - x^2(3x - 4)(3x - 4) \\&= 6x^2 - x^2(9x^2 - 12x - 12x + 16) \\&= 6x^2 - x^2(9x^2 - 24x + 16) \\&= 6x^2 - 9x^4 + 24x^3 - 16x^2 \\&= -9x^4 + 24x^3 - 10x^2\end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$\begin{aligned}f(x) &= -9x^4 + 24x^3 - 10x^2 \\g'(x) &= -9 \cdot 4x^3 + 24 \cdot 3x^2 - 10 \cdot 2x \\&= -36x^3 + 72x^2 - 20x\end{aligned}$$

Vastaus a) $f'(x) = 18x^2 - 16x + 2$

 b) $g'(a) = -36x^3 + 72x^2 - 20x$

6.26

a)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)(2x+3) - x^2(2x-1) \\&= x \cdot 2x + x \cdot 3 - 1 \cdot 2x - 1 \cdot 3 - x^2 \cdot 2x - x^2 \cdot (-1) \\&= 2x^2 + 3x - 2x - 3 - 2x^3 + x^2 \\&= -2x^3 + 3x^2 + x - 3\end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + x - 3$$



$$D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x + 1 - 0 \\&= -6x^2 + 6x + 1\end{aligned}$$

b)

Sievennetään ensin funktion lauseke osittelulain avulla.

$$\begin{aligned}h(a) &= (2a+1)^2 - (a^3 - a) \\&= (2a+1)(2a+1) - a^3 + a \\&= 2a \cdot 2a + 2a \cdot 1 + 1 \cdot 2a + 1 \cdot 1 - a^3 + a \\&= 4a^2 + 2a + 2a + 1 - a^3 + a \\&= -a^3 + 4a^2 + 5a + 1\end{aligned}$$

Derivoidaan funktion lauseke termeittäin.

$$\begin{aligned}h(a) &= -1a^3 + 4a^2 + 5a + 1 \\h'(a) &= -1 \cdot 3a^2 + 4 \cdot 2a + 5 + 0 \\&= -3a^2 + 8a + 5\end{aligned}$$

Vastaus a) $f'(x) = -6x^2 + 6x + 1$

 b) $h'(a) = -3a^2 + 8a + 5$

6.27

a)

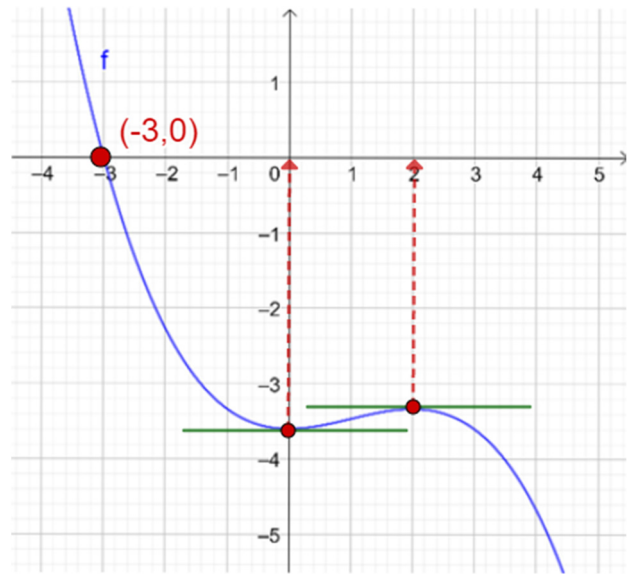
Funktio saa arvon nolla, kun se leikkaa x -akselin.

Kuvan perusteella $f(x) = 0$, kun $x \approx -3$.

b)

Funktion derivaatta saa arvon nolla, kun kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuora.

Kuvaajalle voidaan piirtää vaakasuora tangentti kohtiin $x \approx 0$ ja $x \approx 2$, joten $f'(x) = 0$ kun $x \approx 0$ tai $x \approx 2$.



Vastaus a) $x \approx -3$

 b) $x \approx 0$ tai $x \approx 2$

6.28

a)

Funktiossa $V(r) = \pi r^2 h$ muuttuja on r ja vakiokerroin πh .

Derivoidaan funktio.

$$V(r) = \pi r^2 h$$

$$V'(r) = \pi h \cdot 2r = 2\pi hr$$

b)

Funktiossa $V(h) = \pi r^2 h$ muuttuja on h ja vakiokerroin πr^2 .

Derivoidaan funktio.

$$V(h) = \pi r^2 h$$

$$V'(h) = \pi r^2 \cdot 1 = \pi r^2$$

c)

Funktiossa $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ muuttuja on r ja vakiokerroin $\frac{4}{3}\pi$.

Derivoidaan funktio.

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V'(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^{3-1} = 4\pi r^2$$

← r-säteisen pallon tilavuus

Vastaus a) $V'(r) = 2\pi hr$

 b) $V'(h) = \pi r^2$

 c) $V'(r) = 4\pi r^2$

6.29

a)

Kun muuttuja on x niin a on vakio.

$$\begin{aligned} & D(ax^3 + 3x^2 - 5xa^3 + 7x + a) \\ &= D(ax^3) + D(3x^2) - D(5xa^3) + D(7x) + D(a) \\ &= 3ax^2 + 3 \cdot 2x - 5a^3 + 7 + 0 \\ &= 3ax^2 + 6x - 5a^3 + 7 \end{aligned}$$

b)

Kun muuttuja on a niin x on vakio.

$$\begin{aligned} & D(ax^3 + 3x^2 - 5xa^3 + 7x + a) \\ &= D(ax^3) + D(3x^2) - D(5xa^3) + D(7x) + D(a) \\ &= x^3 + 0 - 5x \cdot 3a^2 + 0 + 1 \\ &= x^3 - 15xa^2 + 1 \end{aligned}$$

Vastaus **a)** $3ax^2 + 6x - 5a^3 + 7$

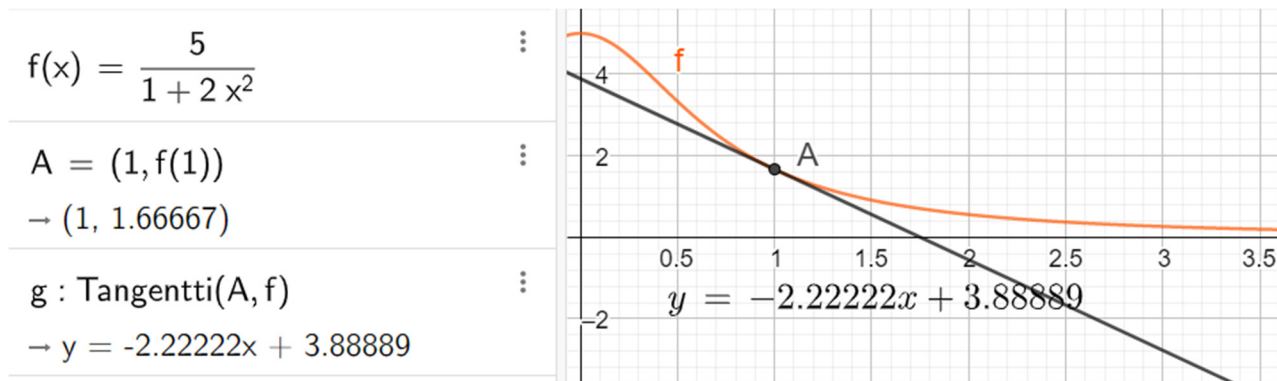
b) $x^3 - 15xa^2 + 1$

6.30

a)

Piirretään funktion kuvaajalle kohtaan $x = 1$ tangentti. Tangentin kulmakerroin on $f'(1)$.

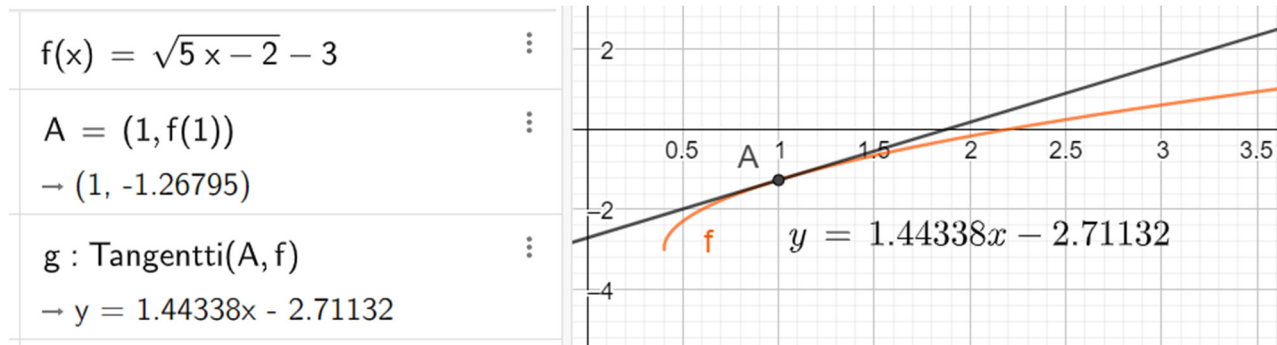
Pisteen käyrälle kohtaan $x = 1$ voi piirtää komennolla $A = (1, f(1))$



Tangentin kulmakerroin on $-2,222$ joten $f'(1) = -2,222$.

b)

Piirretään funktion kuvaajalle kohtaan $x = 1$ tangentti. Tangentin kulmakerroin on $f'(1)$.



Tangentin kulmakerroin on $1,443$ joten $f'(1) = 1,443$.

Vastaus a) $f'(1) = -2,222$ b) $f'(1) = 1,443$

6.31

Piirretään kaikki funktiot samaan kuvaajaan.

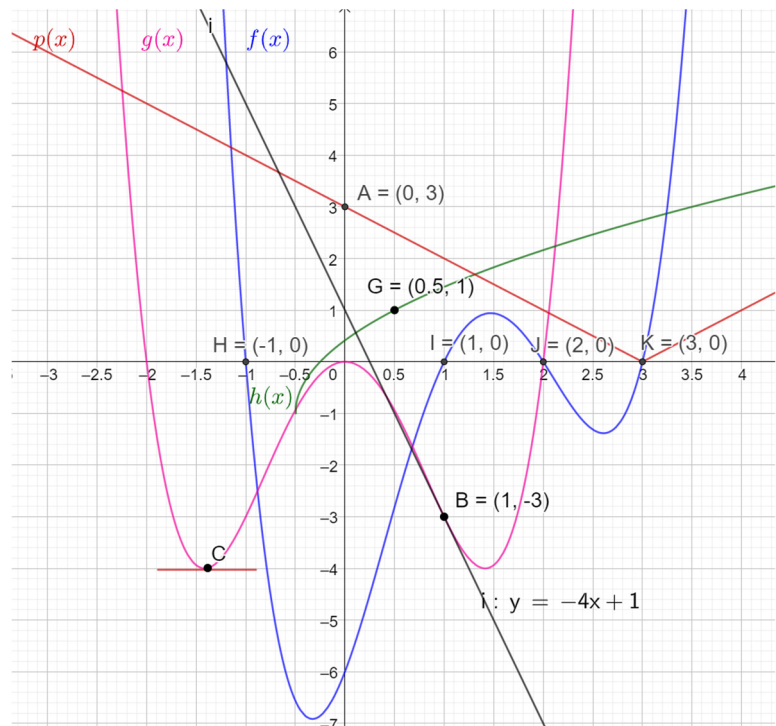
1. Kuvan perusteella y -akselin leikkaa pisteessä $(0, 3)$ funktion $p(x) = |x - 3|$ kuvaaja.

Funktio leikkaa y -akselin, kun x -koordinaatti on nolla.

Kyseinen piste on funktion p kuvaajalla, sillä

$$p(0) = |0 - 3| = |-3| = 3$$

2. Kuvan perusteella funktion $g(x) = x^4 - 4x^2$ kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on -4 .



Lasketaan funktion g derivaatan arvo, kun $x = 1$.

$$g'(x) = 4x^3 - 8x$$

$$g'(1) = 4 \cdot 1^3 - 8 \cdot 1 = 4 - 8 = -4$$

3. Kuvan perusteella funktiolle $g(x) = x^4 - 4x^2$ piirretyn tangentin kuvaaja on vaakasuora kohdassa $x \approx -1,4$, joten derivaatan arvo kyseisessä kohdassa on nolla.

$$g'(x) = 4x^3 - 8x$$

$$g'(-1,4) = 4 \cdot (-1,4)^3 - 8 \cdot 1,4 = 0,224 \approx 0$$

4. Kuvan perusteella funktio $h(x) = \sqrt{4x + 2} - 1$ saa arvon 1 kohdassa $\frac{1}{2} = 0,5$.

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2} + 2} - 1 = \sqrt{2 + 2} - 1 = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1$$

5. Kuvan perusteella funktiolla f on neljä nollakohtaa $x = -1, x = 1, x = 2$ ja $x = 3$.

$$f(-1) = (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 6 = 0$$

$$f(1) = 1^4 - 5 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 0$$

$$f(2) = 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 6 = 0$$

$$f(3) = 3^4 - 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 6 = 0$$

Vastaus 1. $p(x)$ 2. $g(x)$ 3. $g(x)$ 4. $h(x)$ 5. $f(x)$