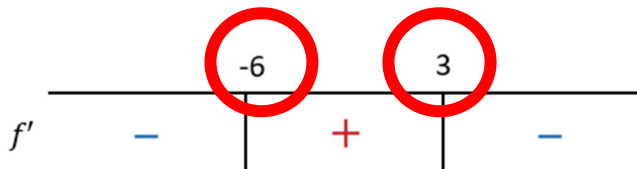


Binomi 8 – Luku 9 – Tehtävien malliratkaisut

9.1

a)

Derivaatan nollakohdat muodostavat merkkikaavion välit.



Merkkikaavion mukaan derivaatta saa arvon nolla, kun $x = -6$ ja $x = 3$.

b)

Merkkikaaviosta nähdään, että $f'(x) < 0$ eli derivaatta on negatiivinen, kun $x < -6$ tai $x > 3$.



Vastaus a) $x = -6$ ja $x = 3$

b) $x < -6$ tai $x > 3$

9.2

a)

Funktion f derivaatta saa arvon nolla, kun derivaattafunktion kuvaaja leikkaa x -akselin.

Kuvan perusteella $f'(x) = 0$, kun $x \approx -8$.



Kuvasta määritetty arvo on likiarvo.

b)

Derivaattafunktio saa positiivisia arvoja, kun sen kuvaaja kulkee x -akselin yläpuolella.

Kuvan mukaan $f'(x) > 0$, kun $x < -8$.

c)

Funktio f on kasvava, kun sen derivaatan arvot ovat positiivisia tai nolla.
Siis funktio f on kasvava, kun $x \leq -8$.

Vastaus a) $x \approx -8$

 b) $x < -8$

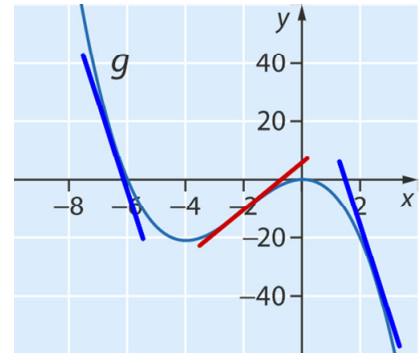
 c) $x \leq -8$

9.3

a)

Funktion g kuvaajan perusteella

- tangentit ovat nousevia tai vaakasuoria eli $g'(x) \geq 0$, kun $-4 \leq x \leq 0$. Funktio on tällöin siis **kasvava**.
- tangentit ovat laskevia tai vaakasuoria eli $g'(x) \leq 0$, kun $x \leq -4$ tai $x \geq 0$. Tällöin funktio on **vähenevä**.

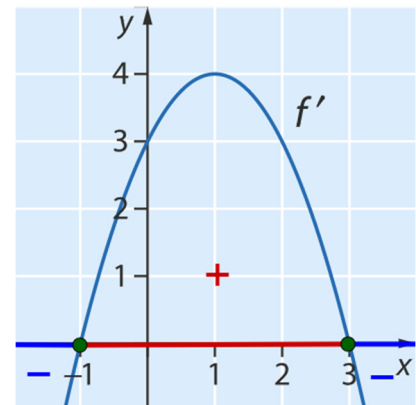


b)

Kuvaaja esittää nyt derivaattafunktiota f' . Tutkitaan derivaatan f' merkkiä.

Derivaatan f' kuvaajan perusteella

- derivaatan arvot ovat positiivisia tai nolla eli $f'(x) \geq 0$, kun $-1 \leq x \leq 3$. Tällöin funktio f on siis **kasvava**.
- derivaatan arvot ovat negatiivisia tai nolla eli $f'(x) \leq 0$, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 3$. Tällöin funktio f on **vähenevä**.



Vastaus a) Funktio g on kasvava, kun $-4 \leq x \leq 0$, ja vähenevä, kun $x \leq -4$ tai $x \geq 0$

 b) Funktio f on kasvava, kun $-1 \leq x \leq 3$, ja vähenevä, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 3$

9.4

a) Funktio g on vähenevä, kun sen derivaatta on negatiivinen.

Määritetään ensin funktion $g(x) = x^2 + 6x - 7$ derivaatta.

$$g'(x) = 2x + 6$$

Muodostetaan derivaatan avulla epäyhtälö ja ratkaistaan, milloin derivaatta on negatiivinen tai nolla.

$$\begin{aligned} g'(x) &\leq 0 \\ 2x + 6 &\leq 0 \\ 2x &\leq -6 \quad \| : 2 \\ x &\leq -3 \end{aligned}$$

Funktio g on vähenevä, kun $x \leq -3$.

b) Funktio h on kasvava, kun sen derivaatta on positiivinen.

Määritetään ensin funktion $h(x) = -x^3 + 75x - 4$ derivaatta.

$$h'(x) = -3x^2 + 75$$

Muodostetaan derivaatan avulla epäyhtälö ja ratkaistaan, milloin derivaatta on positiivinen tai nolla.

$$\begin{aligned} h'(x) &\geq 0 \\ -3x^2 + 75 &\geq 0 \end{aligned}$$

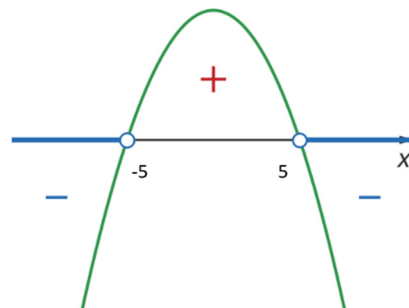
Ratkaistaan nollakohdat.

$$\begin{aligned} -3x^2 + 75 &= 0 \\ -3x^2 &= -75 \quad \| : (-3) \\ x^2 &= 25 \quad \| \sqrt{} \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

Kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli.
Hahmotellaan mallikuva.

Epäyhtälö $-3x^2 + 75 \geq 0$ toteutuu,
kun $-5 \leq x \leq 5$.

Funktio on siis kasvava, kun $-5 \leq x \leq 5$.



Vastaus a) $x \leq -3$
 b) $-5 \leq x \leq 5$

9.5

a)

Funktion derivaatan merkki vaihtuu derivaatan nollakohdassa.

Merkkikaavion mukaan $f'(x) = 0$, kun $x = \frac{1}{3}$.

b)

Funktion derivaatta on suurempi kuin nolla, kun derivaatan merkki on positiivinen.

Merkkikaavion mukaan $f'(x) \geq 0$, kun $x \leq \frac{1}{3}$.

c)

Funktio f on kasvava, kun funktion derivaatta on suurempi tai yhtä suuri kuin nolla.

Merkkikaavion mukaan $f'(x) \geq 0$, kun $x \leq \frac{1}{3}$.

Vastaus **a)** $x = \frac{1}{3}$

b) $x \leq \frac{1}{3}$

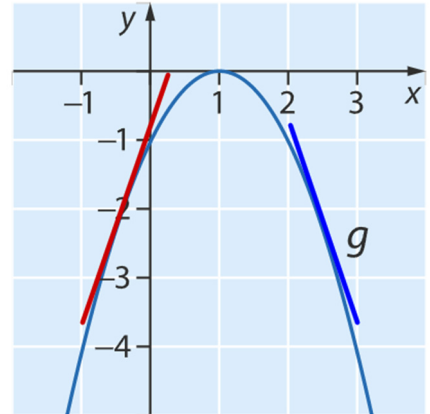
c) $x \leq \frac{1}{3}$

9.6

a)

Funktion g kuvaajan perusteella

- tangentit ovat nousevia tai vaakasuoria eli $g'(x) \geq 0$, kun $x \leq 1$. Funktio on tällöin siis **kasvava**.
- tangentit ovat laskevia tai vaakasuoria eli $g'(x) \leq 0$, kun $x \geq 1$. Tällöin funktio on **vähenevä**.

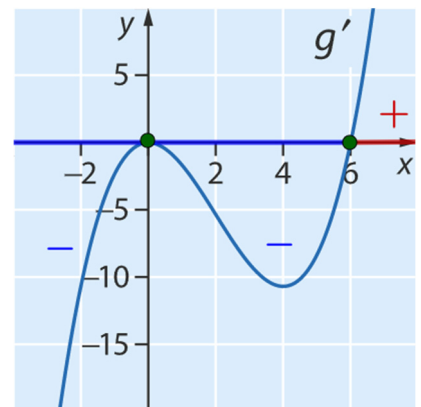


b)

Kuvaaja esittää nyt derivaattafunktiota g' .
Tutkitaan derivaatan merkkiä.

Derivaatan g' kuvaajan perusteella

- derivaatan arvot ovat positiivisia tai nolla eli $g'(x) \geq 0$, kun $x \geq 6$. Tällöin funktio g on siis **kasvava**.
- derivaatan arvot ovat negatiivisia tai nolla eli $g'(x) \leq 0$, kun $x \leq 6$. Tällöin funktio g on **vähenevä**.



Vastaus a) Funktio g on kasvava, kun $x \leq 1$, ja vähenevä, kun $x \geq 1$.

b) Funktio g on kasvava, kun $x \geq 6$, ja vähenevä, kun $x \leq 6$.

9.7

a)

Derivoidaan funktio $f(x) = -3x^2 + 18x - 5$.

$$f'(x) = -6x + 18$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

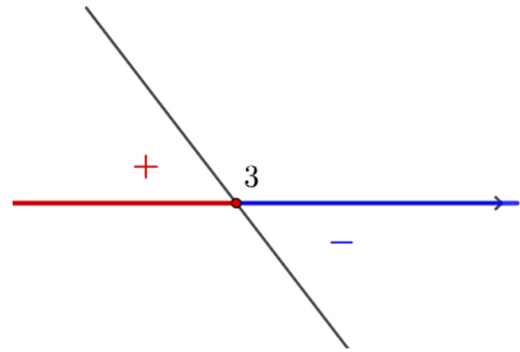
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -6x + 18 &= 0 \\ -6x &= -18 \quad \| : (-6) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

b)

Funktio f on vähenevä, kun sen derivaatta on negatiivinen tai nolla eli $f'(x) \leq 0$.

Derivaatta on $f'(x) = -6x + 18$, joten sen kuvaaja on laskeva suora.

Funktio on vähenevä eli $f'(x) \leq 0$, kun $x \geq 3$.



Vastaus a) $x = 3$

 b) $x \geq 3$

9.8

a)

Funktio on kasvava, kun derivaatta on positiivinen ja vähenevä, kun derivaatta on negatiivinen. Muodostetaan kulkukaavio.

	3	
g'	+	-
g		

b)

Muodostetaan derivaatan merkin avulla funktion kulkukaavio.

	-7		-1
g'	+	-	+
g			

9.9

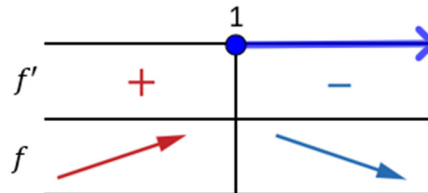
a)

Funktion f derivaatan nollakohta on se kohta, jossa derivaatan merkki vaihtuu.

Kulkukaavion perusteella nollakohta on $x = 1$.

b)

Kulkukaavion mukaan funktio on vähenevä, kun $x \geq 1$.



Vastaus a) $x = 1$

 b) $x \geq 1$

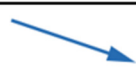
9.10

a)

Kuvaajan perusteella funktion derivaatan nollakohta on $x \approx -6$.

Derivaatta on negatiivinen, kun $x < -6$, ja positiivinen, kun $x > -6$.

Muodostetaan derivaatan merkkikaavio ja funktion f kulkukaavio.

	-6	
f'	-	+
f		

Funktio on siis vähenevä, kun $x \leq -6$.

b)

Kuvaajan perusteella derivaatan nollakohdat ovat $x \approx -3$ ja $x \approx 0$.

Derivaatta on negatiivinen, kun $-3 < x < 0$ ja kun $x > 0$.

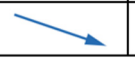
Derivaatta on positiivinen, kun $x < -3$.

Muodostetaan derivaatan merkkikaavio ja funktion f kulkukaavio.

	-3	0	
f'	+	-	-
f			

Funktio on siis vähenevä, kun $x \geq -3$.

Vastaus a) $x \leq -6$

	-6	
f'	-	+
f		

b) $x \geq -3$

	-3	0	
f'	+	-	-
f			

9.11

Derivoidaan ensin funktio g : $g'(x) = -3x^2 + 2x + 5$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5}}{2 \cdot (-3)} \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{-6} \\ x &= \frac{-2 \pm 8}{-6} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-2 - 8}{-6} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-2 + 8}{-6} = \frac{6}{-6} = -1$$

Määritetään derivaatan merkki testikohtien avulla. Valitaan yksi testikohta jokaiselta nollakohtien muodostamalta väliltä: $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$.

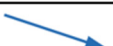
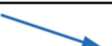
Lasketaan derivaatan arvot näissä kohdissa ja päätellään derivaatan merkki.

$$g'(-2) = -15 \quad (-)$$

$$g'(0) = 1 \quad (+)$$

$$g'(2) = -7 \quad (-)$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen avulla funktion kulkukaavio.

	-1	$\frac{5}{3}$	
g'	-	+	-
g			

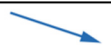
Tutkittavat muuttujan arvot $x = 2,55555$ ja $x = 2,55556$ kuuluvat välille $x \geq \frac{5}{3}$.

Muuttujien arvojen keskinäinen suuruusjärjestys on $2,55555 < 2,55556$.

Kulkukaavion mukaan funktio on vähenevä kyseisellä välillä, joten funktion arvo pienenee, kun muuttujan arvo kasvaa.

Näin ollen $g(2,55555) > g(2,55556)$.

Vastaus $g(2,55555)$ on suurempi.

	-1	$\frac{5}{3}$	
g'	-	+	-
g			

9.12

a)

Tutkitaan funktion f kulkua muodostamalla derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion kulkukaavio. Derivoidaan ensin funktio f .

$$f'(x) = 702 - 156x \quad 0 \leq x \leq 9$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 702 - 156x &= 0 \\ x &= 4,5 \end{aligned}$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio funktion määrittelyvälille $0 \leq x \leq 9$. Tutkitaan derivaatan merkki testipisteiden avulla.

	0	4,5	9
f'		+	-
f		↗	↘

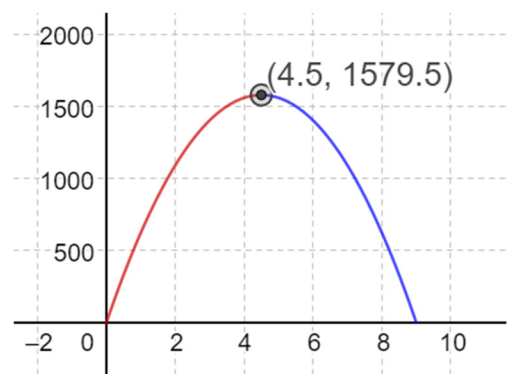
$$\begin{aligned} f'(1) &= 546 > 0 \\ f'(6) &= -78 < 0 \end{aligned}$$

Kulkukaavion mukaan myyntitulot laskevat, kun $4,5 \leq x \leq 9$ (€).

b)

Myyntitulon funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa suurimman arvonsa huipussa eli derivaatan nollakohdassa.

Myyntitulot ovat siis suurimmillaan, kun $x = 4,5$, eli jäätelöä kannattaa myydään hintaan 4,5 €.



Vastaus a) $4,5 \leq x \leq 9$ (€)

b) 4,5 €

9.13

a)

Tarkastelun alussa $t = 0$.

Lasketaan tautitapausten määrä tarkastelun alussa eli $f(0)$.

$$f(0) = -0,076 \cdot 0^3 + 1,213 \cdot 0^2 + 2,423 \cdot 0 + 30 = 30$$

Tapauksia oli 30 kappaletta.

b)

Tutkitaan funktion f kulkua muodostamalla derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion kulkukaavio. Derivoidaan ensin funktio f .

$$f'(t) = -0,228t^2 + 2,426t + 2,423 \quad 0 \leq x \leq 18$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ -0,228t^2 + 2,426t + 2,423 &= 0 \\ x &= -0,91933 \dots \text{ tai } x = 11,5596 \dots \end{aligned}$$

Funktion määrittelyvälille kuuluu vain $x = 11,5596 \dots$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio funktion määrittelyvälille $0 \leq x \leq 18$. Tutkitaan derivaatan merkki testipisteiden avulla.

	0	11,5...	18
f'		+	-
f			

$f'(1) = 4,621 > 0$
 $f'(12) = -1,297 < 0$

Kulkukaavion mukaan tautitapausten määrä alkaa laskea, kun $x = 11,559 \dots \approx 12$ (d).

Vastaus a) 30 kappaletta

 b) noin 12 vuorokauden kuluttua

9.14

Derivaatan g' kuvaajan perusteella

- derivaatan arvot ovat positiivisia tai nolla eli $g'(x) \geq 0$, kun $x \leq 0$.
Tällöin funktio g on siis **kasvava**.
- derivaatan arvot ovat negatiivisia tai nolla eli $g'(x) \leq 0$, kun $x \geq 0$.
Tällöin funktio g on **vähenevä**.

b)

Derivaatan g' kuvaajan perusteella derivaatan arvot ovat negatiivisia tai nolla eli $g'(x) \leq 0$ kaikkialla. Tällöin funktio g on **vähenevä** kaikkialla.

Vastaus **a)** Funktio g on kasvava, kun $x \leq 0$, ja vähenevä, kun $x \geq 0$.

b) Funktio g on vähenevä kaikkialla.

9.15

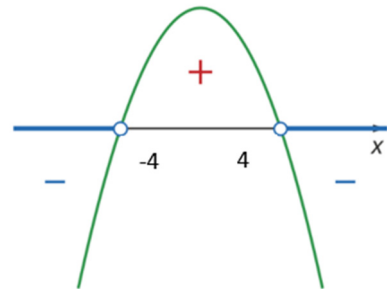
Derivoidaan funktio $f(x) = -x^3 + 48x + 2$.

$$f'(x) = -3x^2 + 48$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 48 &= 0 \\ -3x^2 &= -48 & \| : (-3) \\ x^2 &= 16 & \| \sqrt{} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Funktion derivaatta on alaspäin aukeava paraabeli. Selvitetään derivaatan merkki mallikuvan avulla.



- derivaatan arvot ovat positiivisia tai nolla eli $f'(x) \geq 0$, kun $-4 \leq x \leq 4$.
Tällöin funktio f on siis **kasvava**.
- derivaatan arvot ovat negatiivisia tai nolla eli $f'(x) \leq 0$, kun $x \leq -4$ tai $x \geq 4$. Tällöin funktio f on **vähenevä**.

Vastaus Funktio f on kasvava, kun $-4 \leq x \leq 4$, ja vähenevä, kun $x \leq -4$ tai $x \geq 4$.

9.16

a)

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x = x^2 - 4x$$

b)

Funktion kuvaajan tangentti on x -akselin suuntainen, kun tangentin kulmakerroin eli derivaatta on nolla. Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0 \quad \text{Tulon nollasääntö}$$

$$x = 0 \quad x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

Tangentti on x -akselin suuntainen, kun $x = 0$ tai $x = 4$.

c)

Muodostetaan derivaatan merkkikaavion avulla funktion kulkukaavio. Selvitetään derivaatan merkki testikohtien avulla.

$$f'(-1) = 5 > 0$$

$$f'(1) = -3 < 0$$

$$f'(5) = 5 > 0$$

	0	4
f'	+	-
f		

Funktio on siis vähenevä välillä $0 \leq x \leq 4$.

Vastaus a) $f'(x) = x^2 - 4x$

b) $x = 0$ tai $x = 4$

c) $0 \leq x \leq 4$

9.17

a)

Funktio on kasvava, kun derivaatta on positiivinen ja vähenevä, kun derivaatta on negatiivinen. Muodostetaan kulkukaavio.

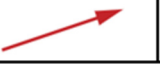
	1	
f'	+	-
f		

b)

Derivaatta on negatiivinen sen nollakohtien välillä silloin, kun funktio on vähenevä.

Kulkukaavion perusteella derivaatta on negatiivinen, kun $0 < x < 4$ ja $x > 4$.

Vastaus a)

	1	
f'	+	-
f		

b) $0 < x < 4$ ja $x > 4$

9.18

Derivoidaan ensin funktio f .

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot 3x^2 + \frac{5}{2} \cdot 2x + 3 = -2x^2 + 5x + 3$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -2x^2 + 5x + 3 &= 0 \\ x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)} \\ x &= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-4} \\ x &= \frac{-5 \pm 7}{-4} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-5 - 7}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3 \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-5 + 7}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Määritetään derivaatan merkki testikohtien avulla. Valitaan yksi testikohta jokaiselta nollakohtien muodostamalta väliltä: $x = -1$, $x = 0$, $x = 4$.

Lasketaan derivaatan arvot näissä kohdissa ja päätellään derivaatan merkki.

$$f'(-1) = -15 \quad (-)$$

$$f'(0) = 3 \quad (+)$$

$$f'(4) = -9 \quad (-)$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen avulla funktion kulkukaavio.

	$-\frac{1}{2}$	3	
f'	-	+	-
f			

Tutkittavat muuttujan arvot $x = -3,000000$

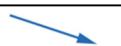
ja $x = -3,000001$ kuuluvat välille $x \leq -\frac{1}{2}$.

Muuttujien arvojen keskinäinen suuruusjärjestys on $-3,000000 > -3,000001$.

Kulkukaavion mukaan funktio on vähenevä kyseisellä välillä, joten funktion arvo pienenee, kun muuttujan arvo kasvaa.

Näin ollen $f(-3,000000) < f(-3,000001)$.

Vastaus $f(-3,000001)$ on suurempi.

	$-\frac{1}{2}$	3	
f'	-	+	-
f			

9.19

a)

Lausekkeen $-0,15t^2 + 2,4t + 1,8$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Ratkaistaan ensin, milloin pallo putoaa takaisin maahan eli korkeus on 0 m.

$$0,15t^2 + 2,4t + 1,8 = 0$$
$$t = -0,7178 \dots \text{ tai } t = 16,7178 \dots$$

Pallo lähtee liikkeelle hetkellä $t = 0$ ja putoaa maahan hetkellä $t = 16,7178 \dots$

Lauseke on siis määritelty välillä $0 \leq t \leq 16,7178 \dots$

Derivoidaan lauseke ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$-0,3t + 2,4 = 0$$
$$t = 8$$

Laaditaan merkki ja kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio määrittelyvälille $0 \leq t \leq 16,7178 \dots$

Derivaatta on laskeva suora, joten sen arvo on ennen nollakohtaa positiivinen ja nollakohdan jälkeen negatiivinen.

0	8	16,7178...
+	-	
		

Lausekkeen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten sen suurin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta.

Pallo on korkeimmillaan, kun $t = 8$. Lasketaan pallon korkeus h .

$$h = -0,15 \cdot 8^2 + 2,4 \cdot 8 + 1,8 = 11,4 \text{ (m)}$$

Pallo käy korkeimmillaan 11,4 metrin korkeudessa.

b)

Kulkukaaviosta nähdään, että pallon lentorata on laskeva aikavälillä 8 s – 16,7 s.

Vastaus a) 11,4 m

 b) 8 s – 16,7 s

9.20

a)

Alennuksen alkuhetkellä $x = 0$.

Lasketaan asiakkaiden määrä alussa eli $g(0)$.

$$g(0) = -2,1 \cdot 0^3 + 13 \cdot 0^2 + 27,8 \cdot 0 + 11 = 11$$

Asiakkaita oli 11.

b)

Tutkitaan funktion g kulkua muodostamalla derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion kulkukaavio. Derivoidaan ensin funktio g .

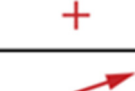
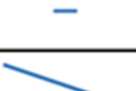
$$g'(x) = -6,3x^2 + 26x + 27,8 \quad 0 \leq x \leq 8,0$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ -6,3x^2 + 26x + 27,8 &= 0 \\ x &= -0,881 \dots \text{ tai } x = 5,008 \dots \end{aligned}$$

Funktion määrittelyvälille kuuluu vain $x = 5,008 \dots$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio funktion määrittelyvälille $0 \leq x \leq 8,0$. Tutkitaan derivaatan merkki testipisteiden avulla.

	0	5,008...	8,0
g'		+	-
g			

$$\begin{aligned} g'(1) &= 47,5 > 0 \\ g'(6) &= -43 < 0 \end{aligned}$$

Kulkukaavion mukaan asiakasmäärä alkaa vähentyä, kun $x = 5,008 \dots$ h $\approx$ 5 h.

Vastaus a) 11 asiakasta

 b) noin 5 tunnin kuluttua

9.21

a) Piirretään funktion

$f(x) = 0,2x^3 - 2x^2 + 5x + 0,4$ kuvaaja
ehdolla $0 \leq x \leq 6$.

b) Muodostetaan derivaatan avulla funktion
kulkukaavio.

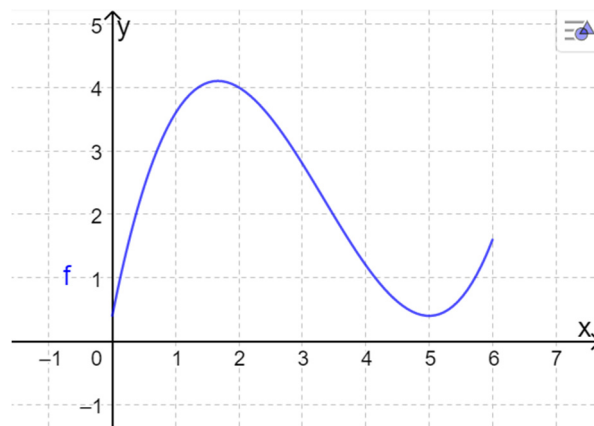
Funktion derivaatta on $f'(x) = 0,6x^2 - 4x + 5$.
Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 0,6x^2 - 4x + 5 &= 0 \\ x &= \frac{5}{3} \text{ tai } x = 5 \end{aligned}$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio funktion määrittelyvälille $0 \leq x \leq 6$.
Tutkitaan derivaatan merkki testipisteiden avulla.

	0	$\frac{5}{3}$	5	6
f'		+	-	+
f				

$$f(x) = 0,2x^3 - 2x^2 + 5x + 0,4, \quad (0 \leq x \leq 6)$$



$$\begin{aligned} f'(1) &= 1,6 > 0 \\ f'(2) &= -0,6 < 0 \\ f'(6) &= 2,6 > 0 \end{aligned}$$

Funktio on vähenevä välillä $1,7 \leq x \leq 5,0$.

c) Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 5$.

$$f'(5) = 0,6 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 + 5 = 0$$

Derivaatan arvo ilmaisee kyseiseen kohtaan piirretyn tangentin kulmakerrointa.
Koska kulmakerroin nolla, tangentti on vaakasuora.

d) Tunturin laki eli huippu on derivaatan ensimmäisessä nollakohdassa.

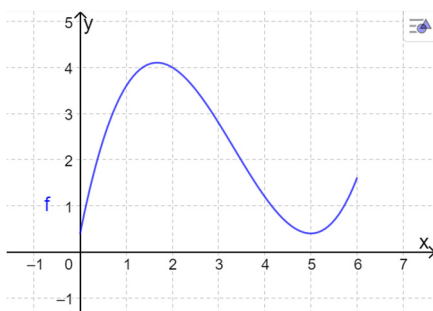
Lasketaan korkeus (100 m), kun $x = \frac{5}{3}$.

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 0,2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) + 0,4 = 4,103 \dots \approx 4,10$$

y-akselin yksikkö on 100 m, joten korkeus on $4,10 \cdot 100 \text{ m} = 410 \text{ m}$.

Vastaus

a)



b) $1,7 \leq x \leq 5,0$

c) $f'(5) = 0$

d) 410 m

9.22

a)

Derivoidaan ensin funktio f .

$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$

Funktion derivaatta on ylöspäin aukeava paraabeli. Funktio on siis vähenevä ennen huippukohtaa ja kasvava huippukohdan jälkeen. Koska derivaattafunktio on vähenevä jollain välillä, funktio $f(x)$ ei ole konvekksi.

b)

Funktio $g(x)$ on konvekksi, jos sen derivaattafunktio on kasvava.

Derivoidaan ensin funktio $g(x)$.

$$g'(x) = 4x^3 + 2ax$$

Jotta derivaattafunktio $g'(x)$ olisi kasvava, sen derivaattafunktion derivaatan $g''(x)$ tulee olla epänegatiivinen kaikkialla eli $12x^2 + 2a \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Koska $g''(x) = 12x^2 + 2a$ on ylöspäin aukeava paraabeli, yhtälö $12x^2 + 2a \geq 0$ pätee aina, jos funktiolla $g''(x)$ on korkeintaan yksi nollakohta.

$$\begin{aligned} 12x^2 + 2a &= 0 \\ 12x^2 &= -2a \\ x^2 &= -\frac{a}{6} \quad \parallel \sqrt{} \\ x &= \pm \sqrt{-\frac{a}{6}} \end{aligned}$$

Yhtälöllä on yksi ratkaisu, kun $-\frac{a}{6} = 0$ eli kun $a = 0$.

Yhtälöllä ei ole ratkaisua, kun juurrettava on negatiivinen eli $a > 0$.

Funktio $g(x)$ on siis konvekksi, kun $a \geq 0$.

Vastaus a) $f'(x)$ on vähenevä jollain välillä

b) $a \geq 0$