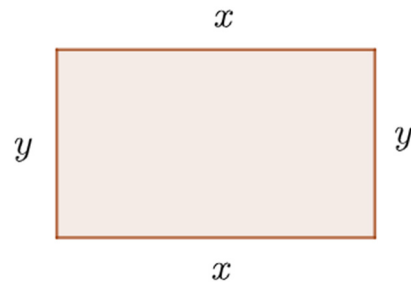


Binomi 8 – Luku 13 – Tehtävien malliratkaisut

13.1

a)

Piirretään mallikuva, jossa kannan pituus on x .
Merkitään toisen sivun pituutta kirjaimella y .



b)

Muodostetaan yhtälö suorakulmion piirin 140 m avulla ja ratkaistaan y .

$$\begin{aligned}2x + 2y &= 140 \\2y &= 140 - 2x \quad || : 2 \\y &= 70 - x\end{aligned}$$

Toisen sivun pituus on $y = 70 - x$ (m).

c)

Sivun x pituuden tulee olla positiivinen, joten $x > 0$.

Toisaalta sivun y pituuden tulee olla positiivinen.

$$\begin{aligned}y &> 0 \\70 - x &> 0 \\-x &> -70 \\x &< 70\end{aligned}$$

Muuttuja x voi siis saada arvot $0 < x < 70$ (m).

d)

Pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.

$$A(x) = xy = x(70 - x) = 70x - x^2 = -x^2 + 70x \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus b) $70 - x$ (m)

 c) $0 < x < 70$ (m)

 d) $A(x) = -x^2 + 70x$ (m²)

13.2

a)

Myyntitulo saadaan kappalehinnan 3,00 € ja myyntimäärän x tulona.

Myyntitulon lauseke on siis $M(x) = 3,00x$ (€).

b)

Myytyjen pullien kappalemäärä ei voi olla negatiivinen, joten $x \geq 0$.

c)

Kokonaiskustannusten lauseke saadaan myytyjen pullien määrän x ja pullakohtaisten kustannusten 1,30 € tulona.

Kokonaiskustannukset ovat siis $1,30x$.

Myyntivoitto saadaan myyntitulon ja kustannusten erotuksena.

$$T(x) = 3,00x - 1,30x = 1,70x \quad (\text{€})$$

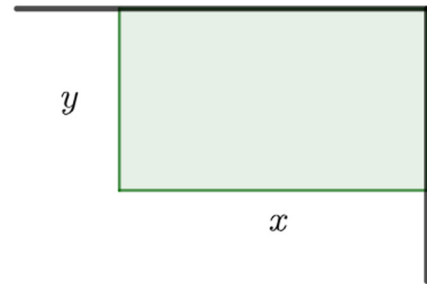
Vastaus a) $M(x) = 3,00x$ (€)

 b) $x \geq 0$

 c) $T(x) = 1,70x$ (€)

13.3

Piirretään mallikuva. Merkitään toisen sivun pituutta kirjaimella x ja toisen y .



Aidan pituus on 25,0 (m). Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan y .

$$\begin{aligned}x + y &= 25 \\ y &= 25 - x\end{aligned}$$

Pinta-ala on leveyden ja pituuden tulo. Muodostetaan pinta-alan funktio.

$$A(x) = x(25 - x) = 25x - x^2$$

Suorakulmion pinta-ala
 $A = \text{leveys} \cdot \text{pituus} = xy$

Muodostetaan funktion määrittelyväli. Sivujen pituuksien on oltava positiivisia.

$$\begin{aligned}x > 0 \quad \text{ja} \quad 25 - x > 0 \\ -x > -25 \\ x < 25\end{aligned}$$

Pinta-alafunktion A määrittelyväli on siis $0 < x < 25$ (m).

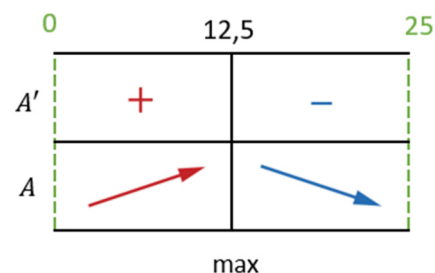
Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$A'(x) = 25 - 2x$$

$$\begin{aligned}A'(x) &= 0 \\ 25 - 2x &= 0 \\ x &= 12,5\end{aligned}$$

Muodostetaan kulkukaavio, joka on rajattu määrittelyvälille $0 < x < 25$. Valitaan testikohdat nollakohdan molemmilta puolilta.

$$\begin{aligned}A'(1) &= 23 \quad (> 0) \\ A'(20) &= -15 \quad (< 0)\end{aligned}$$



Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurimmillaan, kun toisen sivun pituus on $x = 12,5$ m.

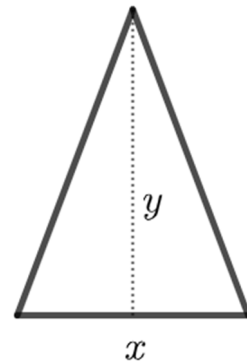
Toisen sivun pituus on tällöin $y = 25,0 - 12,5 = 12,5$ (m).

Vastaus 12,5 m ja 12,5 m

13.4

a)

Piirretään mallikuva, jossa kolmion kanta on x (cm) ja korkeus y (cm).



b)

Kannan ja korkeuden summa on 25 cm. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan y .

$$\begin{aligned}y + x &= 25 \\ y &= 25 - x\end{aligned}$$

c)

Kolmion pinta-alaa kuvaava funktio on

$$A(x) = \frac{xy}{2} = \frac{x(25 - x)}{2} = 12,5x - 0,5x^2 = -0,5x^2 + 12,5x \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Kannan ja korkeuden tulee olla positiivisia. Muodostetaan kannan pituuden x määrittelyväli.

$$\begin{aligned}x > 0 \quad \text{ja} \quad 25 - x > 0 \\ -x > -25 \\ x < 25\end{aligned}$$

Kannan pituus x voi saada arvoja väliltä $0 < x < 25$ (cm).

Vastaus b) $y = 25 - x$ (cm)

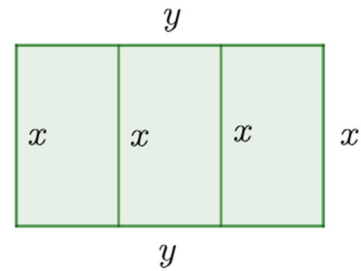
 c) $A(x) = -0,5x^2 + 12,5x$ (cm²), $0 < x < 25$ (cm)

13.5

a) Aitauksessa on neljä x sivua ja kaksi y sivua.

Muodostetaan aidan pituuden 400 m avulla yhtälö ja ratkaistaan y .

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 400 \\ 2y &= 400 - 4x \\ y &= 200 - 2x \text{ (m)} \end{aligned}$$



b) Sivujen pituuksien tulee olla positiivisia. Muodostetaan kannan pituuden x määrittelyväli.

$$\begin{aligned} x > 0 \quad \text{ja} \quad 200 - 2x > 0 \\ -2x &> -200 \\ x &< 100 \end{aligned}$$

Muuttuja x voi saada arvoja väliltä $0 < x < 100$ (m).

c) Pinta-ala on leveyden ja pituuden tulo. Muodostetaan pinta-alan funktio.

$$A(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2 = -2x^2 + 200x \text{ (m}^2\text{)}$$

d) Pinta-alafunktion A määrittelyväli on siis $0 < x < 100$ (m).

Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$A'(x) = -4x + 200$$

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -4x + 200 &= 0 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Muodostetaan kulkukaavio, joka on rajattu määrittelyvälille $0 < x < 100$.

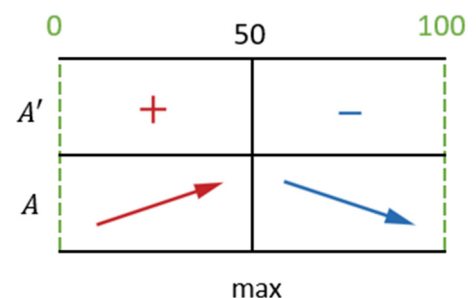
Valitaan testikohdat nollakohdan molemmilta puolilta.

$$\begin{aligned} A'(1) &= 196 \quad (> 0) \\ A'(100) &= -200 \quad (< 0) \end{aligned}$$

Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurimmillaan, kun leveys on $x = 50$ (m).

Lasketaan pinta-ala.

$$A(50) = -2 \cdot 50^2 + 200 \cdot 50 = 5000 \text{ (m}^2\text{)}$$



Vastaus

a) $y = 200 - 2x$ (m)

c) $A(x) = -2x^2 + 200x$ (m²)

b) $0 < x < 100$ (m)

d) 5 000 m²

13.6

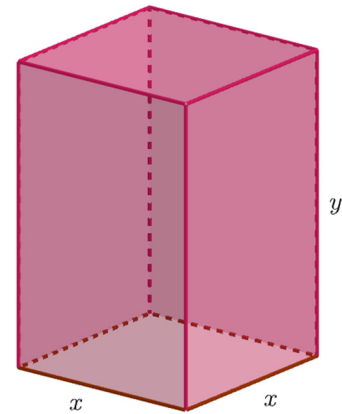
Pakkauksen pohja on neliö, joten merkitään pohjan sivuja (pituus ja leveys) kirjaimella x ja korkeutta kirjaimella y .

Pituuden, korkeuden ja leveyden summa on 54 cm. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkeus y .

$$\begin{aligned}x + x + y &= 54 \\ y &= 54 - 2x \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Muodostetaan pakkauksen tilavuusfunktio $V(x)$.

$$V(x) = x \cdot x \cdot (54 - 2x) = -2x^3 + 54x^2 \text{ (cm}^3\text{)}$$



Suorakulmisen särmiön tilavuus

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h$$

Muodostetaan funktion määrittelyväli. Sivujen pituuksien on oltava positiivisia.

$$\begin{aligned}x > 0 \quad \text{ja} \quad 27 - x > 0 \\ -x &> -27 \\ x &< 27\end{aligned}$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 27$ (cm).

Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned}V'(x) &= -6x^2 + 108x \\ V'(x) &= 0 \\ -6x^2 + 108x &= 0 \\ x &= 18 \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Kun määrittelyväli on syötetty ohjelmistoon, saadaan vain ehdon toteuttavat ratkaisut.

$x = 0$ ei kuulu määrittelyvälille.

Muodostetaan kulkukaavio, joka on rajattu määrittelyvälille $0 < x < 27$.

Valitaan testikohdat nollakohdan molemmilta puolilta.

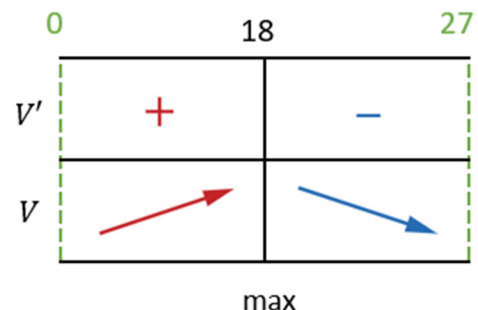
$$\begin{aligned}V'(1) &= 49 \quad (> 0) \\ V'(20) &= -160 \quad (< 0)\end{aligned}$$

Kulkukaavion perusteella tilavuuden maksimiarvo saadaan, kun $x = 18$ (cm).

Tällöin $y = 54 - 2 \cdot 18 = 18$ (cm).

Pakkauksen tilavuus suurimmillaan on

$$V(18) = -2 \cdot 18^3 + 54 \cdot 18^2 = 5832 \text{ (cm}^3\text{)} \approx 5,8 \text{ (l)}$$



$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$$

Vastaus kaikki mitat 18 cm, tilavuus 5,8 litraa

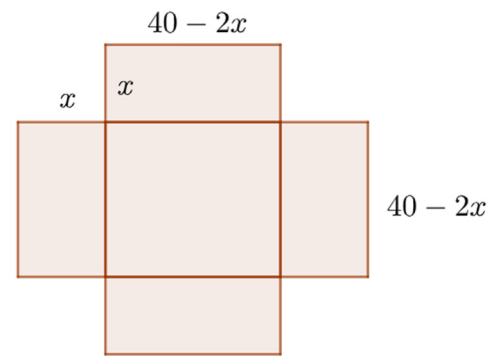
13.7

a) Piirretään mallikuva. Laatikon korkeus on poisleikattavan neliön sivun pituus x . Merkitään laatikon pohjan sivun pituutta kirjaimella y .

Neliönmuotoisen pahvin sivun pituus on 40 cm. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan y .

$$y + 2x = 40$$

$$y = 40 - 2x \text{ (cm)}$$



b) Muodostetaan särmiön tilavuuden lauseke.

$$V(x) = (40 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 160x^2 + 1600x \text{ (cm}^3\text{)}$$

Suorakulmaisen särmiön tilavuus

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h$$

c) Muodostetaan funktion määrittelyväli. Sivujen pituuksien on oltava positiivisia.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad 40 - 2x > 0$$

$$-2x > -40$$

$$x < 20$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 20$ (cm).

Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$V'(x) = 12x^2 - 320x + 1600$$

$$V'(x) = 0$$

$$12x^2 - 320x + 1600 = 0$$

$$x = 6,66 \dots \text{ (cm)}$$

Kun määrittelyväli on syötetty ohjelmistoon, saadaan vain ehdon toteuttavat ratkaisut.

$x = 20$ ei kuulu määrittelyvälille.

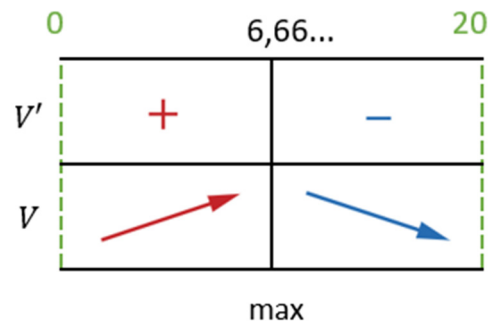
Muodostetaan kulkukaavio, joka on rajattu määrittelyvälille $0 < x < 20$.

Valitaan testikohdat nollakohdan molemmilta puolilta.

$$V'(1) = 1292 \quad (> 0)$$

$$V'(20) = -400 \quad (< 0)$$

Kulkukaavion perusteella tilavuuden maksimiarvo saadaan, kun poisleikattavan neliön sivun pituus on $x = 6,666 \dots \approx 6,67$ (cm).



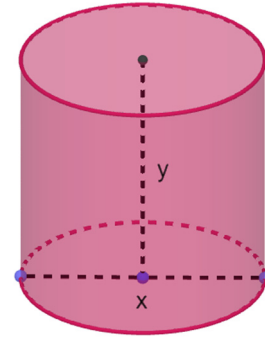
Vastaus a) $y = 40 - 2x$ (cm)

b) $V(x) = (40 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 160x^2 + 1600x$ (cm³)

c) 6,67 cm

13.8

Hahmotellaan mallikuva. Rasian pohja on ympyrä. Merkitään ympyrän halkaisijaa kirjaimella x ja korkeutta kirjaimella y . Pohjan halkaisijan ja korkeuden summa on 20 cm. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkeus y .



$$x + y = 20$$

$$y = 20 - x \text{ (cm)}$$

Muodostetaan rasian tilavuusfunktio $V(x)$.

Pohjan säde on $r = \frac{x}{2}$.

$$V(x) = \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot (20 - x) = -\frac{\pi}{4}x^3 + 5\pi x^2 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Ympyräpohjaisen lieriön tilavuus

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Muodostetaan funktion määrittelyväli. Pituuksien on oltava positiivisia.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad 20 - x > 0$$

$$-x > -20$$

$$x < 20$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 20$ (cm).

Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$V'(x) = -\frac{3}{4}\pi x^2 + 10\pi x$$

$$V'(x) = 0$$

$$-\frac{3}{4}\pi x^2 + 10\pi x = 0$$

$$x = \frac{40}{3} \text{ (cm)}$$

Kun määrittelyväli on syötetty ohjelmistoon, saadaan vain ehdon toteuttavat ratkaisut.

$x = 0$ ei kuulu määrittelyvälille.

Muodostetaan kulkukaavio, joka on rajattu määrittelyvälille $0 < x < 20$.

Valitaan testikohdat nollakohdan molemmilta puolilta.

$$V'(1) = 29,05 \dots \quad (> 0)$$

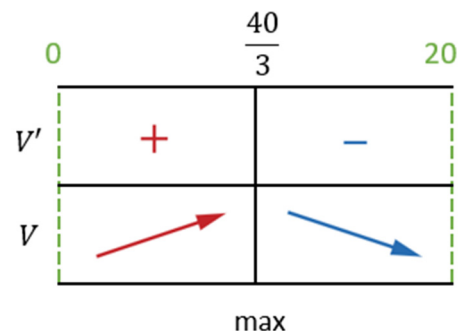
$$V'(15) = -58,90 \dots \quad (< 0)$$

Kulkukaavion perusteella tilavuuden maksimiarvo

saadaan, kun $x = \frac{40}{3} = 13,333 \dots$ (cm).

Tällöin korkeus on

$$y = 20 - \frac{40}{3} = 6,666 \dots \approx 6,7 \text{ cm.}$$



Pakkauksen tilavuus suurimmillaan on siis $V\left(\frac{40}{3}\right) = 930,8422 \dots \text{ cm}^3 \approx 930 \text{ cm}^3$.

Vastaus korkeus 6,7 cm, tilavuus 930 cm^3

13.9

a) Myyntitulo saadaan sukkaparin hinnan x (€) ja myyntimäärän $-60x + 1100$ tulona.

Myyntitulon funktio on siis $M(x) = x \cdot (-60x + 1100) = -60x^2 + 1100x$.

Myyntitulofunktio on määritelty välillä $0 \leq x \leq 18$ (€).

Derivoidaan funktio M ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$M'(x) = -120x + 1100, \quad 0 < x < 18$$

$$M'(x) = 0$$

$$-120x + 1100 = 0$$

$$x = 9,1666 \dots$$

Funktio M on määritelty suljetulla välillä $0 \leq x \leq 18$. Suljetulla välillä määritelty polynomifunktio saa suurimman arvonsa määrittelyvälin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$M(0) = 0$$

$$M(18) = 360$$

$$M(9,166 \dots) = 5041,666 \dots$$

Myyntitulo on siis suurimmillaan, kun $x = 9,166 \dots \approx 9,17$ (€) eli kun sukkaparin hinta on 9,17 €.

b) Myyntivoitto saadaan, kun myyntitulosta M vähennetään kokonaiskustannukset. Yhden parin kustannukset ovat 5,00 €, joten kun pareja myydään $-60x + 1100$ kappaletta, ovat kokonaiskustannukset $5 \cdot (-60x + 1100) = -300x + 5500$. Myyntivoitto on siis

$$T(x) = \underbrace{-60x^2 + 1100x}_{\text{myyntitulo}} - \underbrace{(-300x + 5500)}_{\text{kokonaiskustannukset}} = -60x^2 + 1400x - 5500$$

Myyntivoittofunktio on määritelty myös välillä $0 \leq x \leq 18$ (€).

Derivoidaan funktio T ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$T'(x) = -120x + 1400, \quad 0 < x < 18$$

$$T'(x) = 0$$

$$-120x + 1400 = 0$$

$$x = 11,666 \dots$$

Funktio T on määritelty suljetulla välillä $0 \leq x \leq 18$. Suljetulla välillä määritelty polynomifunktio saa suurimman arvonsa määrittelyvälin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$T(0) = -5500$$

$$T(18) = 260$$

$$T(11,666 \dots) = 2666,666 \dots$$

Myyntivoitto on siis suurimmillaan, kun $x = 11,666 \dots \approx 11,67$ (€) eli kun sukkaparin hinta on 11,67 €.

Vastaus a) 9,17 € b) 11,67 €

13.10

Myyntitulo saadaan lenkkareiden hinnan x (€) ja myyntimäärän $f(x) = -30x + 1000$ tulona.

Myyntitulon funktio on siis $M(x) = x \cdot (-30x + 1000) = -30x^2 + 1000x$.

Hinta ja myyntimäärä eivät voi olla negatiivisia. Muodostetaan määrittelyväli.

$$\begin{aligned}x \geq 0 \quad \text{ja} \quad -30x + 1000 &\geq 0 \\-30x &\geq -1000 \\x &\leq \frac{100}{3}\end{aligned}$$

Myyntitulofunktion $M(x)$ määrittelyväli on siis $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$ (€).

Derivoidaan funktio M ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$M'(x) = -60x + 1000, \quad 0 < x < \frac{100}{3}$$

$$\begin{aligned}M'(x) &= 0 \\-60x + 1000 &= 0 \\x &= 16,666 \dots \approx 17 \text{ (€)}\end{aligned}$$

Funktio M on määritelty suljetulla välillä $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$. Suljetulla välillä määritelty polynomifunktio saa suurimman arvonsa määrittelyvälin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$M(0) = 0$$

$$M\left(\frac{100}{3}\right) = 0$$

$$M(16,666 \dots) = 8333,333 \dots \approx 8333$$

Myyntitulo on siis suurimmillaan, kun kenkien hinta on noin 17 €.

Myyntitulo on tällöin funktion suurin arvo eli 8 333 €.

Vastaus hinta 17 €, myyntitulo 8 333 €

13.11

Muodostetaan lipputulaja kuvaava funktio M taulukon avulla.

| Lipun hinta (€) | Katsojat (kpl) | Lipputulo M (€) |
|--------------------|-----------------------|---|
| 15 | 3000 | $15 \cdot 3000$ |
| $15 + 1$ | $3000 - 1000$ | $(15 + 1)(3000 - 1000)$ |
| $15 + 1 \cdot 2$ | $3000 - 1000 \cdot 2$ | $(15 + 1 \cdot 2)(3000 - 1000 \cdot 2)$ |
| $15 + 1 \cdot 3$ | $3000 - 1000 \cdot 3$ | $(15 + 1 \cdot 3)(3000 - 1000 \cdot 3)$ |
| $15 + 1x = 15 + x$ | $3000 - 1000x$ | $(15 + x)(3000 - 1000x)$ |

Lipputulo riippuu siis 1 € hinnankorotusten lukumäärästä x .

$$M(x) = \underbrace{(15 + x)}_{\text{hinta}} \underbrace{(3000 - 100x)}_{\text{myyntimäärä}} = -100x^2 + 1500x + 45000$$

Funktio M määritelty, kun hinta ja katsojamäärä eivät ole negatiivisia.

$$\begin{aligned} 15 + x \geq 0 & \quad \text{ja} \quad 3000 - 100x \geq 0 \\ x \geq -15 & \quad \quad \quad x \leq 30 \end{aligned}$$

Funktio M on siis määritelty, kun $-15 \leq x \leq 30$.

Derivoidaan funktio M ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$M'(x) = -200x + 1500, \quad -15 < x < 30$$

$$\begin{aligned} M'(x) &= 0 \\ -200x + 1500 &= 0 \\ x &= 7,5 \end{aligned}$$

Funktio M on määritelty suljetulla välillä $-15 \leq x \leq 30$. Suljetulla välillä määritelty polynomifunktio saa suurimman arvonsa määrittelyvälin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$\begin{aligned} M(-15) &= 0 \\ M(30) &= 0 \\ M(7,5) &= 50625 \end{aligned}$$

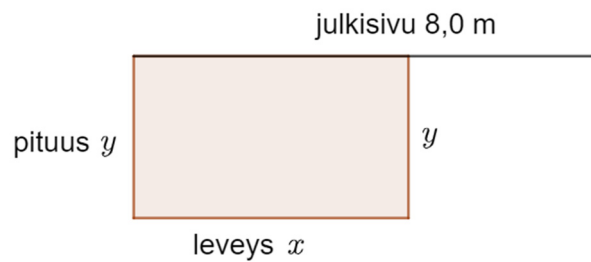
Lipputulo on siis suurimmillaan, kun $x = 7,5$ (€). Tällöin suurin arvo eli lipputulot ovat 50 625,00 €.

Lipun hinta on $15,00 + 7,50 = 22,50$ €.

Vastaus lipun hinta 22,50 €, lipputulot 50 625,00 €

13.12

Piirretään mallikuva. Merkitään terassin leveyttä kirjaimella x . Terassin leveys on korkeintaan julkisivun leveys, joten $0 < x \leq 8,0$ (m). Merkitään terassin pituutta kirjaimella y .



Aitaa on käytettävissä 20,0 m.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan y .

$$x + y + y = 20,0$$

$$y6 = 10 - 0,5x$$

Terassi on suorakulmio, joten sen pinta-ala on pituuden ja leveyden tulo.

$$A(x) = xy = x \cdot (10 - 0,5x) = -0,5x^2 + 10x$$

Leveyden määrittelyväli on $0 < x \leq 8,0$ (m), joten se on myös funktion A määrittelyväli.

Perustellaan pinta-alan suurin arvo. Derivoidaan funktio A ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$A'(x) = -x + 10$$

$$A'(x) = 0$$

$$-x + 10 = 0$$

$$x = 10$$

Derivaatan nollakohta ei kuulu määrittelyvälille.

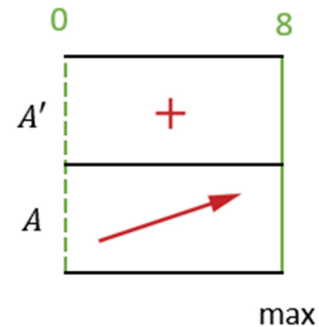
Muodostetaan kulkukaavio määrittelyvälillä testipisteen

$A'(1) = 9 (> 0)$ avulla.

Suurin arvo saadaan siis, kun $x = 8$.

Tällöin leveys on 8,0 m ja pituus $y = 10,0 - 0,5 \cdot 8 = 6,0$ (m).

Terassin pinta-ala on siis $A = 8,0 \cdot 6,0 = 48$ (m²).



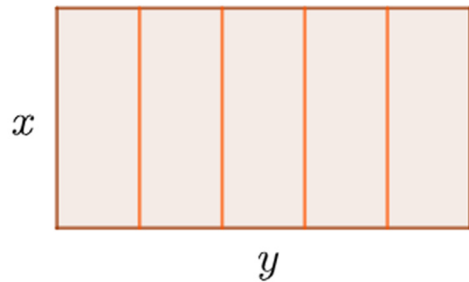
Vastaus leveys 8,0 m, pituus 6,0 m ja pinta-ala 48 m²

13.13

Piirretään mallikuva.

Muodostetaan aidan pituuden 200 m avulla yhtälö ja ratkaistaan y .

$$6x + 2y = 200$$
$$y = 100 - 3x \text{ (m)}$$



Sivujen pituuksien tulee olla positiivisia. Muodostetaan kannan pituuden x määrittelyväli.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad 100 - 3x > 0$$
$$-3x > -100$$
$$x < \frac{100}{3}$$

Muuttuja x voi saada arvoja väliltä $0 < x < \frac{100}{3}$ (m).

Pinta-ala on leveyden ja pituuden tulo. Muodostetaan pinta-alan funktio.

$$A(x) = x(100 - 3x) = -3x^2 + 100x \text{ (m}^2\text{)}$$

Pinta-alafunktion A määrittelyväli on siis $0 < x < \frac{100}{3}$ (m).

Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$A'(x) = -6x + 100$$

$$A'(x) = 0$$
$$-6x + 100 = 0$$
$$x = \frac{100}{6}$$

Muodostetaan kulkukaavio, joka on rajattu määrittelyvälille $0 < x < \frac{100}{3}$.

Valitaan testikohdat nollakohdan molemmilta puolilta.

$$A'(1) = 94 \quad (> 0)$$
$$A'(20) = -20 \quad (< 0)$$

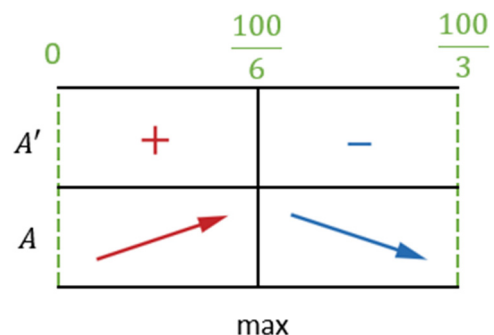
Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurimmillaan, kun $x = \frac{100}{6} = 16,666 \dots \approx 16,7$ (m).

Toisen sivun pituus on tällöin

$$y = 100 - 3 \cdot \frac{100}{6} = 50,0 \text{ (m)}.$$

Yhden osaston leveys on $\frac{50,0 \text{ m}}{5} = 10,0$ m.

Koko alueen pinta-ala on $A\left(\frac{100}{6}\right) = 833,333 \dots \approx 833$ (m²).



Vastaus osaston sivut 16,7 m ja 10,0 m, koko pinta-ala 833 m²

13.14

Särmiön pohja on neliö, joten merkitään pohjan sivuja (pituus ja leveys) kirjaimella x ja korkeutta kirjaimella y .

Rautalankaa on käytössä yhteensä 50 cm. Neliön sivuihin kuluu $8x$ (cm), korkeuteen y (cm) ja päihin $2 \cdot 1 = 2$ cm. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan y .

$$8x + y + 2 = 50$$
$$y = 48 - 8x \text{ (cm)}$$

Muodostetaan pakkauksen tilavuusfunktio $V(x)$.

$$V(x) = x \cdot x \cdot (48 - 8x) = -8x^3 + 48x^2 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Suorakulmisen särmiön tilavuus

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h$$

Muodostetaan funktion määrittelyväli. Sivujen pituuksien on oltava positiivisia.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad 48 - 8x > 0$$
$$-8x > -48$$
$$x < 6$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 6$ (cm).

Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$V'(x) = -24x^2 + 96x$$

$$V'(x) = 0$$
$$-24x^2 + 96x = 0$$
$$x = 4 \text{ (cm)}$$

Kun määrittelyväli on syötetty ohjelmistoon, saadaan vain ehdon toteuttavat ratkaisut.

$x = 0$ ei kuulu määrittelyvälille.

Muodostetaan kulkukaavio, joka on rajattu määrittelyvälille $0 < x < 6$.

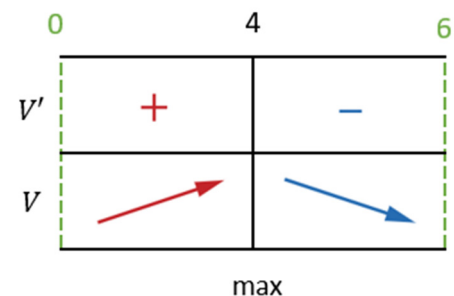
Valitaan testikohdat nollakohdan molemmilta puolilta.

$$V'(1) = 72 \quad (> 0)$$

$$V'(5) = -120 \quad (< 0)$$

Kulkukaavion perusteella tilavuuden maksimiarvo saadaan, kun $x = 4$ (cm).

Tällöin $y = 48 - 8 \cdot 4 = 16$ (cm).



Vastaus neliön sivu 4 cm ja korkeus 16 cm

13.15

Merkitään laukun pohjan sivuja (pituus ja leveys) kirjaimella x ja y .

Pituuden, korkeuden ja leveyden summa on 115 cm. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan leveys y , kun korkeus on 20 cm.

$$\begin{aligned}x + y + 20 &= 115 \\y &= 95 - x \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Muodostetaan pakkauksen tilavuusfunktio $V(x)$.

$$V(x) = x \cdot (95 - x) \cdot 20 = -20x^2 + 1900x \text{ (cm}^3\text{)}$$

Suorakulmaisen särmiön tilavuus

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h$$

Muodostetaan funktion määrittelyväli. Sivujen pituuksien on oltava positiivisia.

$$\begin{aligned}x > 0 \quad \text{ja} \quad 95 - x > 0 \\x < 95\end{aligned}$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 95$ (cm).

Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$V'(x) = -40x + 1900$$

$$\begin{aligned}V'(x) &= 0 \\-40x + 1900 &= 0 \\x &= 47,5 \text{ (cm)}\end{aligned}$$

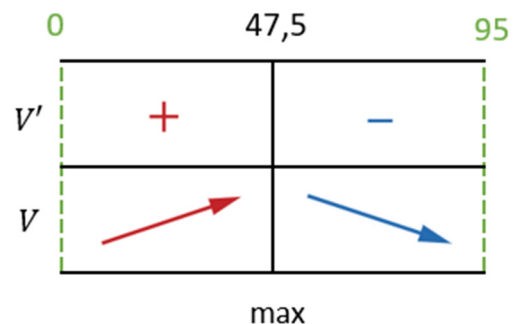
Muodostetaan kulkukaavio, joka on rajattu määrittelyvälille $0 < x < 95$. Valitaan testikohdat nollakohdan molemmilta puolilta.

$$\begin{aligned}V'(1) &= 1860 \quad (> 0) \\V'(50) &= -100 \quad (< 0)\end{aligned}$$

Kulkukaavion perusteella tilavuuden maksimiarvo saadaan, kun $x = 47,5$ (cm).

Laukun tilavuus suurimmillaan on

$$\begin{aligned}V(47,5) &= -20 \cdot 47,5^2 + 1900 \cdot 47,5 \\&= 45125 \text{ (cm}^3\text{)} \approx 45 \text{ (dm}^3\text{)}\end{aligned}$$



Vastaus 45 dm³

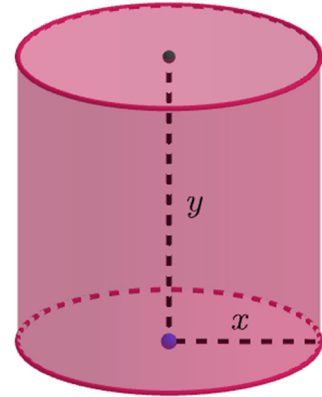
13.16

Hahmotellaan mallikuva.

Maljakon pohja on ympyrä. Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella x ja korkeutta kirjaimella y .

Pohjan säteen ja korkeuden summa on 55 cm.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkeus y .

$$\begin{aligned}x + y &= 55 \\y &= 55 - x \text{ (cm)}\end{aligned}$$



Muodostetaan rasian tilavuusfunktio $V(x)$.

$$V(x) = \pi \cdot x^2 \cdot (55 - x) = -\pi x^3 + 55\pi x^2 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Ympyräpohjaisen lieriön tilavuus

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

Muodostetaan funktion määrittelyväli. Pituuksien on oltava positiivisia.

$$\begin{aligned}x > 0 \quad \text{ja} \quad 55 - x > 0 \\-x > -55 \\x < 55\end{aligned}$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 55$ (cm).

Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$V'(x) = -3\pi x^2 + 110\pi x, \quad 0 < x < 55$$

$$\begin{aligned}V'(x) &= 0 \\-3\pi x^2 + 110\pi x &= 0 \\x &= \frac{110}{3} \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Kun määrittelyväli on syötetty ohjelmistoon, saadaan vain ehdon toteuttavat ratkaisut.

$x = 0$ ei kuulu määrittelyvälille.

Muodostetaan kulkukaavio, joka on rajattu määrittelyvälille $0 < x < 55$.

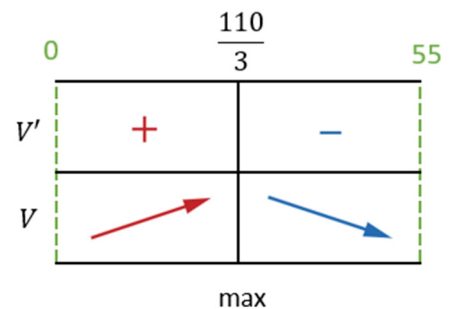
Valitaan testikohdat nollakohdan molemmilta puolilta.

$$\begin{aligned}V'(1) &= 336,15 \dots \quad (> 0) \\V'(50) &= -6283,18 \dots \quad (< 0)\end{aligned}$$

Kulkukaavion perusteella tilavuuden maksimiarvo saadaan, kun säde on $x = \frac{110}{3} = 36,666 \dots \approx 37$ (cm).

Tällöin korkeus on

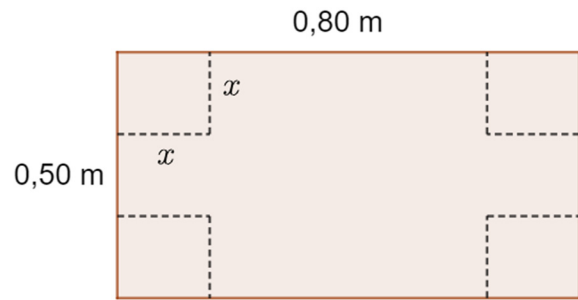
$$y = 55 - 36,666 \dots = 18,333 \dots \approx 18 \text{ cm.}$$



Vastaus pohjan säde 37 cm ja korkeus 18 cm

13.17

a) Piirretään mallikuva. Laatikon korkeus on poisleikattavan neliön sivun pituus x . Merkitään laatikon pohjan leveyttä kirjaimella y ja pituutta kirjaimella z .



Alkuperäisistä pituuksista vähennetään pois leikatut osat eli $2x$. Laatikon pohjan leveys on $y = 0,80 - 2x$ (m) ja pituus $z = 0,50 - 2x$ (m).

Muodostetaan särmiön tilavuuden lauseke.

$$\begin{aligned} V(x) &= yzx \\ &= (0,80 - 2x)(0,50 - 2x)x \\ &= 4x^3 - 2,6x^2 + 0,4x \quad (\text{m}^3) \end{aligned}$$

Suorakulmaisen särmiön tilavuus
 $V = A_{\text{pohja}} \cdot h$

Muodostetaan funktion määrittelyväli. Leveyden ja pituuden tulee olla positiivisia.

$$\begin{aligned} x > 0 \quad \text{ja} \quad 0,8 - 2x > 0 \quad & 0,5 - 2x > 0 \\ & x < 0,4 \quad & x < 0,25 \end{aligned}$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 0,25$ (m).

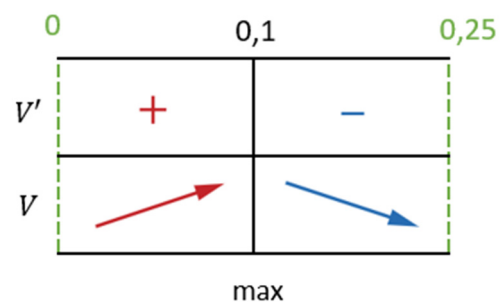
Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} V'(x) &= 12x^2 - 5,2x + 0,4 \\ V'(x) &= 0 \\ 12x^2 - 5,2x + 0,4 &= 0 \\ x &= 0,1 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Kun määrittelyväli on syötetty ohjelmistoon, saadaan vain ehdon toteuttavat ratkaisut.
 $x = 0,333 \dots$ ei kuulu määrittelyvälille.

Muodostetaan kulkukaavio, joka on rajattu määrittelyvälille $0 < x < 0,25$. Valitaan testikohdat nollakohdan molemmilta puolilta.

$$\begin{aligned} V'(0,05) &= 0,17 \quad (> 0) \\ V'(0,2) &= -0,16 \quad (< 0) \end{aligned}$$



Kulkukaavion perusteella tilavuuden maksimiarvo saadaan, kun poisleikattavan neliön sivun pituus on $x = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$.

b) Lasketaan tilavuusfunktion suurin arvo.

$$V(0,1) = 4 \cdot 0,1^3 - 2,6 \cdot 0,1^2 + 0,4 \cdot 0,1 = 0,018 \text{ (m}^3\text{)}$$

Laatikkoon mahtuu enimmillään marjoja $0,018 \text{ m}^3 = 18 \text{ dm}^3 = 18 \text{ l}$.

Vastaus a) 10 cm b) 18 l

13.18

a) Myyntitulo saadaan pullon hinnan x (€) ja myyntimäärän $f(x) = 3000 - 580x$ tulona. Myyntitulon funktio on siis $M(x) = x \cdot (3000 - 580x)$. Myyntitulofunktio on määritelty välillä $0 \leq x \leq 5$ (€). Derivoidaan funktio M ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$M'(x) = -1160x + 3000, \quad 0 < x < 5$$

$$\begin{aligned} M'(x) &= 0 \\ -120x + 1100 &= 0 \\ x &= \frac{75}{29} \approx 2,586 \dots \end{aligned}$$

Funktio M on määritelty suljetulla välillä $0 \leq x \leq 5$. Suljetulla välillä määritelty polynomifunktio saa suurimman arvonsa määrittelyvälin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$M(0) = 0$$

$$M(5) = 500$$

$$M(2,586 \dots) = 3879,310 \dots \approx 3879,31$$

Myyntitulo on siis suurimmillaan, kun $x = 2,586 \dots \approx 2,59$ (€) eli kun pullon hinta on 2,59 €. Myyntitulo on tällöin funktion M suurin arvo 3879,31 €.

b) Myyntivoitto saadaan, kun myyntitulosta M vähennetään kokonaiskustannukset. Yhden pullon kustannukset ovat 0,35 €, joten kun pulloja myydään $3000 - 580x$ kappaletta, ovat kokonaiskustannukset $0,35(3000 - 580x) = -203x + 1050$. Myyntivoitto on siis

$$T(x) = \underbrace{-580x^2 + 3000x}_{\text{myyntitulo}} - \underbrace{(-203x + 1050)}_{\text{kokonaiskustannukset}} = -580x^2 + 3203x - 1050$$

Myyntivoittofunktio on määritelty myös välillä $0 \leq x \leq 5$ (€). Derivoidaan funktio T ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$T'(x) = -1160x + 3203, \quad 0 < x < 5$$

$$\begin{aligned} T'(x) &= 0 \\ -1160x + 3203 &= 0 \\ x &= \frac{3203}{1160} = 2,761 \dots \end{aligned}$$

Funktio T on määritelty suljetulla välillä $0 \leq x \leq 5$. Suljetulla välillä määritelty polynomifunktio saa suurimman arvonsa määrittelyvälin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$T(0) = -1050$$

$$T(5) = 465$$

$$T(2,761 \dots) = 3372,072 \dots$$

Myyntivoitto on siis suurimmillaan, kun $x = 2,761 \dots$ (€) $\approx 2,76$ (€) eli kun pullon hinta on 2,76 €. Voitto on tällöin funktion T suurin arvo 3372,072 ... € $\approx 3372,07$ €.

Vastaus **a)** 2,59 €, 3879,31 € **b)** 2,76 €, 3372,07 €

13.19

Muodostetaan lipputuloja kuvaava funktio M taulukon avulla.

| Kilohinta (€/kg) | Myynti (kg) | Myyntitulo (€) |
|----------------------|--------------------|--|
| 6,50 | 140 | $6,50 \cdot 140$ |
| $6,50 - 0,2$ | $140 + 25$ | $(6,50 - 0,2)(140 + 25)$ |
| $6,50 - 0,2 \cdot 2$ | $140 + 25 \cdot 2$ | $(6,50 - 0,2 \cdot 2)(140 + 25 \cdot 2)$ |
| $6,50 - 0,2 \cdot 3$ | $140 + 25 \cdot 3$ | $(6,50 - 0,2 \cdot 3)(140 + 25 \cdot 3)$ |
| $6,50 - 0,2x$ | $140 + 25x$ | $(6,50 - 0,2x)(140 + 25x)$ |

Myyntitulo riippuu siis 0,20 € hinnan laskujen lukumäärästä x .

$$M(x) = \underbrace{(6,50 - 0,2x)}_{\text{hinta}} \underbrace{(140 + 25x)}_{\text{myyntimäärä}} = -5x^2 + 134,5x + 910$$

Funktio M määritelty, kun hinta ja myyntimäärä eivät ole negatiivisia.

$$6,50 - 0,2x \geq 0 \quad \text{ja} \quad 140 + 25x \geq 0$$

$$x \leq 32,5 \quad \quad \quad x \geq -5,6$$

Funktio M on siis määritelty, kun $-5,6 \leq x \leq 32,5$.

Derivoidaan funktio M ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$M'(x) = -10x + 134,5, \quad -5,6 < x < 32,5$$

$$M'(x) = 0$$

$$-10x + 134,5 = 0$$

$$x = 13,45$$

Funktio M on määritelty suljetulla välillä $-5,6 \leq x \leq 32,5$. Suljetulla välillä määritelty polynomifunktio saa suurimman arvonsa määrittelyvälin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$M(-5,6) = 0$$

$$M(32,5) = 0$$

$$M(13,45) = 1814,512 \dots$$

Myyntitulo on siis suurimmillaan, kun $x = 13,45$. Lihan kilohinta on tällöin

$$6,50 - 0,2 \cdot 13,45 = 3,81 \left(\frac{\text{€}}{\text{kg}} \right).$$

Vastaus 3,81 €/kg

13.20

a)

Jos 0,40 € hinnankorotuksia tehdään x kappaletta, niin

- myyntihinta on $18 + 0,40x$ (€)
- myyntimäärä $400 - 20x$

Muodostetaan myyntitulon funktio M .

$$M(x) = \underbrace{(18 + 0,40x)}_{\text{hinta}} \underbrace{(400 - 20x)}_{\text{myyntimäärä}} = -8x^2 - 200x + 7200$$

Funktio M määritelty, kun hinta ja myyntimäärä eivät ole negatiivisia.

$$\begin{array}{l} 18 + 0,40x \geq 0 \quad \text{ja} \quad 400 - 20x \geq 0 \\ x \geq -45 \quad \quad \quad x \geq 20 \end{array}$$

Funktio M on siis määritelty, kun $-45 \leq x \leq 20$.

Derivoidaan funktio M ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$M'(x) = -16x - 200, \quad -45 < x < 20$$

$$\begin{array}{l} M'(x) = 0 \\ -16x - 200 = 0 \\ x = -12,5 \end{array}$$

Funktio M on määritelty suljetulla välillä $-45 \leq x \leq 20$. Suljetulla välillä määritelty polynomifunktio saa suurimman arvonsa määrittelyvälin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$M(-45) = 0$$

$$M(20) = 0$$

$$M(-12,5) = 8450$$

Myyntitulo on siis suurimmillaan, kun $x = -12,5$. Kappalehinta on tällöin $18 + 0,4 \cdot (-12,5) = 13,00$ (€).

b)

Jos 0,40 € hinnankorotuksia tehdään x kappaletta, niin

- yhdestä kynttilästä saatava voitto on $18 - 12 + 0,40x = 6 + 0,40x$ (€)
- myyntimäärä $400 - 20x$

Muodostetaan myyntivoiton funktio T .

$$M(x) = \underbrace{(6 + 0,4x)}_{\text{hinta}} \underbrace{(400 - 20x)}_{\text{myyntimäärä}} = -8x^2 + 40x + 2400$$

Funktio T määritelty, kun hinta ja myyntimäärä eivät ole negatiivisia.

$$\begin{array}{l} 6 + 0,4x \geq 0 \quad \text{ja} \quad 400 - 20x \geq 0 \\ x \geq -15 \quad \quad \quad x \geq 20 \end{array}$$

Funktio T on siis määritelty, kun $-15 \leq x \leq 20$.

Derivoidaan funktio T ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$M'(x) = -16x + 40, \quad -15 < x < 20$$

$$\begin{array}{l} M'(x) = 0 \\ -16x + 40 = 0 \\ x = 2,5 \end{array}$$

Funktio M on määritelty suljetulla välillä $-15 \leq x \leq 20$. Suljetulla välillä määritelty polynomifunktio saa suurimman arvonsa määrittelyvälin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvot näissä kohdissa.

$$\begin{array}{l} M(-15) = 0 \\ M(20) = 0 \\ M(2,5) = 2450 \end{array}$$

Myyntivoitto on siis suurimmillaan, kun $x = 2,5$. Kappalehinta on tällöin $18,00 + 0,40 \cdot 2,5 = 19,00$ (€).

Vastaus **a)** 13,00 €

b) 19,00 €

13.21

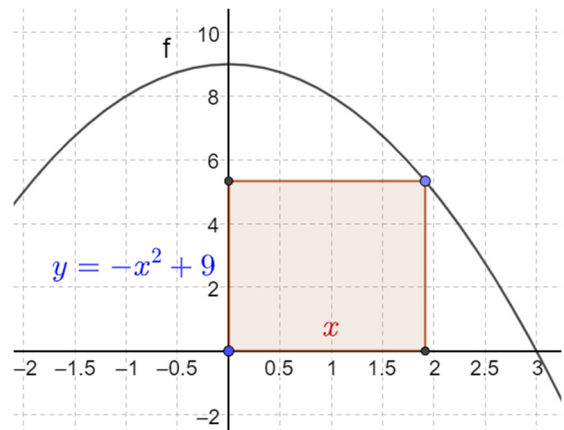
Piirretään kuva koordinaatistoon.

Suorakulmion kannan pituus on x ja suorakulmion korkeus y . Korkeus riippuu kannan pituudesta yhtälön $y = -x^2 + 9$ mukaan.

Muodostetaan suorakulmion pinta-alafunktio A .

$$A(x) = xy = x \cdot (-x^2 + 9) = -x^3 + 9x$$

Selvitetään määrittelyväli.



Vasen pystyreuna on positiivisella y -akselilla, joten $x > 0$.

Alareuna on positiivisella x -akselilla, joten

$$\begin{aligned} y &> 0 \\ -x^2 + 9 &> 0 \\ -3 < x < 3 \end{aligned}$$

Määrittelyväli on siis $0 < x < 3$.

Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$A'(x) = -3x^2 + 9$$

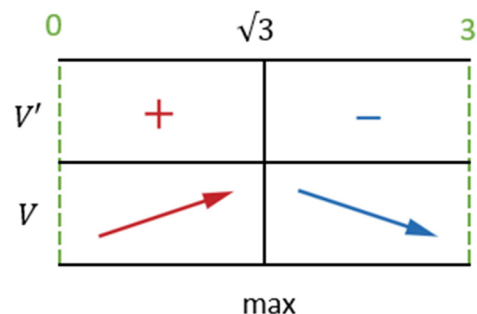
$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 9 &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vain positiivinen ratkaisu $x = \sqrt{3}$ kuuluu määrittelyvälille.

Muodostetaan kulkukaavio, joka on rajattu määrittelyvälille $0 < x < 3$.

Valitaan testikohdat nollakohdan molemmilta puolilta.

$$\begin{aligned} A'(1) &= 6 \quad (> 0) \\ A'(2) &= -3 \quad (< 0) \end{aligned}$$



Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurimmillaan, kun $x = \sqrt{3}$.

Pinta-ala on tällöin

$$A(\sqrt{3}) = -(\sqrt{3})^3 + 9 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \approx 10,392 \approx 10,39.$$

Vastaus $6\sqrt{3} \approx 10,39$