

MAB Preliminäärikoe K2025, pistetytysohje

Koe koostuu 11 tehtävästä, joista vastataan yhdeksään. Tehtävät on jaettu kahteen osaan. A-osassa on kuusi tehtävää, joista vastataan viiteen. B-osassa on viisi tehtävää, joista vastataan neljään. Tehtävät 1–9 arvostellaan pistein 0–12, ja tehtävät 10 ja 11 pistein 0–18. Kokeen maksimipistemäärä on 120 ja sen voi saavuttaa vain, jos vastaa tehtäviin 10 ja 11.

A-osassa saat käyttää koejärjestelmässä olevaa taulukkokirjaa ja perusohjelmia. A-osa palautetaan tehtävän 6 jälkeen olevalla painikkeella. Tämän jälkeen A-osan vastauksia ei voi enää muokata. A-osan palauttamisen jälkeen kaikki koejärjestelmän ohjelmat ovat käytettävissäsi. Voit vastata B-osan tehtäviin myös ennen A-osan palauttamista.

Tuota halutessasi vastausten tueksi piirroksia, kaavioita tai taulukoita ja liitä niistä kuvakaappaukset tekstivastauksen yhteyteen.

Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

Sisällys

A-osa

Vastaa viiteen tehtävään.

1.	Perusmatematiikkaa		12 p.
2.	Lyhyitä laskuja		12 p.
3.	Ruudukkojen väritystä	Aineisto	12 p.
4.	Kolikkoja pöytäliinalla		12 p.
5.	Uppopallo		12 p.
6.	Derivaatan ominaisuuksia	Aineisto	12 p.

B-osa

Vastaa neljään tehtävään.

7.	Palkkoja ja veroja	Aineisto	12 p.
8.	Paraabelin huippu		12 p.
9.	Tilasto vs. todennäköisyys	Aineisto	12 p.
10.	Lääkeainematematiikkaa	Aineisto	18 p.
11.	Koululaisia	Aineisto	18 p.

Koe yhteensä 120 p.

A-osa

 Vastaa viiteen tehtävään.

1. Perusmatematiikkaa 12 p.

1.1 Ratkaise yhtälö $6(x - 5) + 1 = 5 + 8x$. 4 p.

RATKAISU

$$6x - 30 + 1 = 5 + 8x$$

$$-2x = 34$$

$$x = \frac{34}{-2}$$

$$x = -17$$

PISTEYTYS:

-Jokainen rivi (1 p.)

1.2 Ratkaise yhtälö $x^2 + 5x = 0$. 4 p.

RATKAISU

$$a = 1, b = 5, c = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = -5 \text{ tai}$$

$$x = 0$$

TAI

$$x(x + 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x + 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ tai}$$

$$x = -5$$

PISTEYTYS

-Jokainen rivi (1 p.)

Voidaan ratkaista myös laskimella

$$a=1$$
$$= 1$$

$$b=5$$
$$= 5$$

$$c=0$$
$$= 0$$

$$x1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4*a*c})/(2*a)$$
$$= 0$$

$$x2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4*a*c})/(2*a)$$
$$= -5$$

1.3 Ratkaise yhtälö $4^x = 32^8$. 4 p.

RATKAISU

$$(2^2)^x = (2^5)^8$$

$$2^{2x} = 2^{40}$$

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

PISTEYTYS

- Jokainen rivi (1 p.)

Voidaan ratkaista myös logaritmin avulla seuraavasti

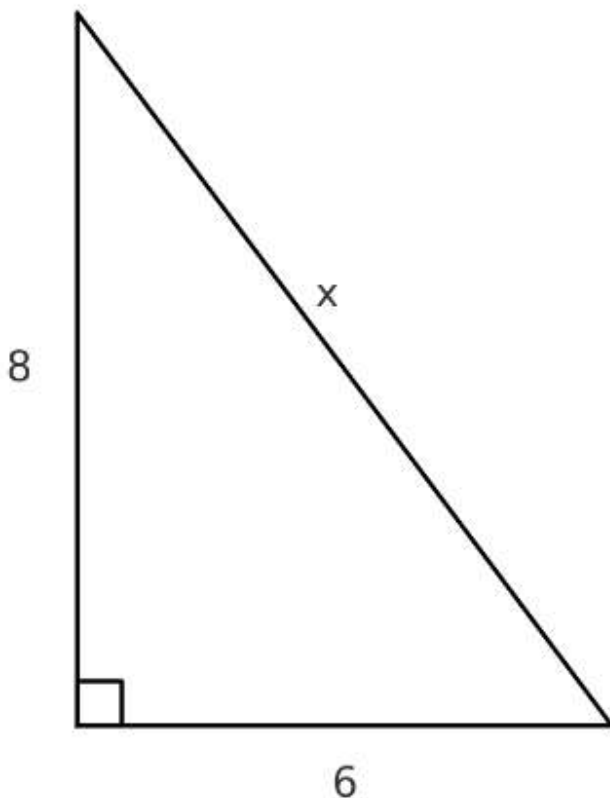
$$\log(4; 32^8) = 20$$

tai ottamalla jokin logaritmi puolittain ja käyttämällä logaritmin laskusääntöjä.

2. Lyhyitä laskuja 12 p.

Kirjoita tämän tehtävän vastauskenttiin pelkät laskujen lopputulokset ilman yksiköitä, välivaiheita ja perusteluja.

2.1 Laske hypotenuusan x pituus. 2 p.



RATKAISU

Pythagoraan lauseella saadaan

$$x^2 = 8^2 + 6^2$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm\sqrt{100}$$

$$x = 10$$

$$x = \boxed{}$$

- 2.2 Kun tehdään makaronilaatikko kuusihenkiselle perheelle, tarvitaan 400 grammaa jauhelihaa. Montako grammaa jauhelihaa tarvitaan, kun tehdään makaronilaatikko 21 opiskelijan luokalle? **2 p.**

RATKAISU

Jauhelihan määrä ja opiskelijoiden lukumäärä ovat suoraan verrannolliset

$$\frac{x}{400} = \frac{21}{6}$$
$$x = \frac{21 \cdot 400}{6}$$
$$x = 1400$$

tai laskemalla jauhelihan kulutus henkeä kohden ja kertomalla se opiskelijoiden lukumäärällä.

Jauhelihaa tarvitaan grammaa.

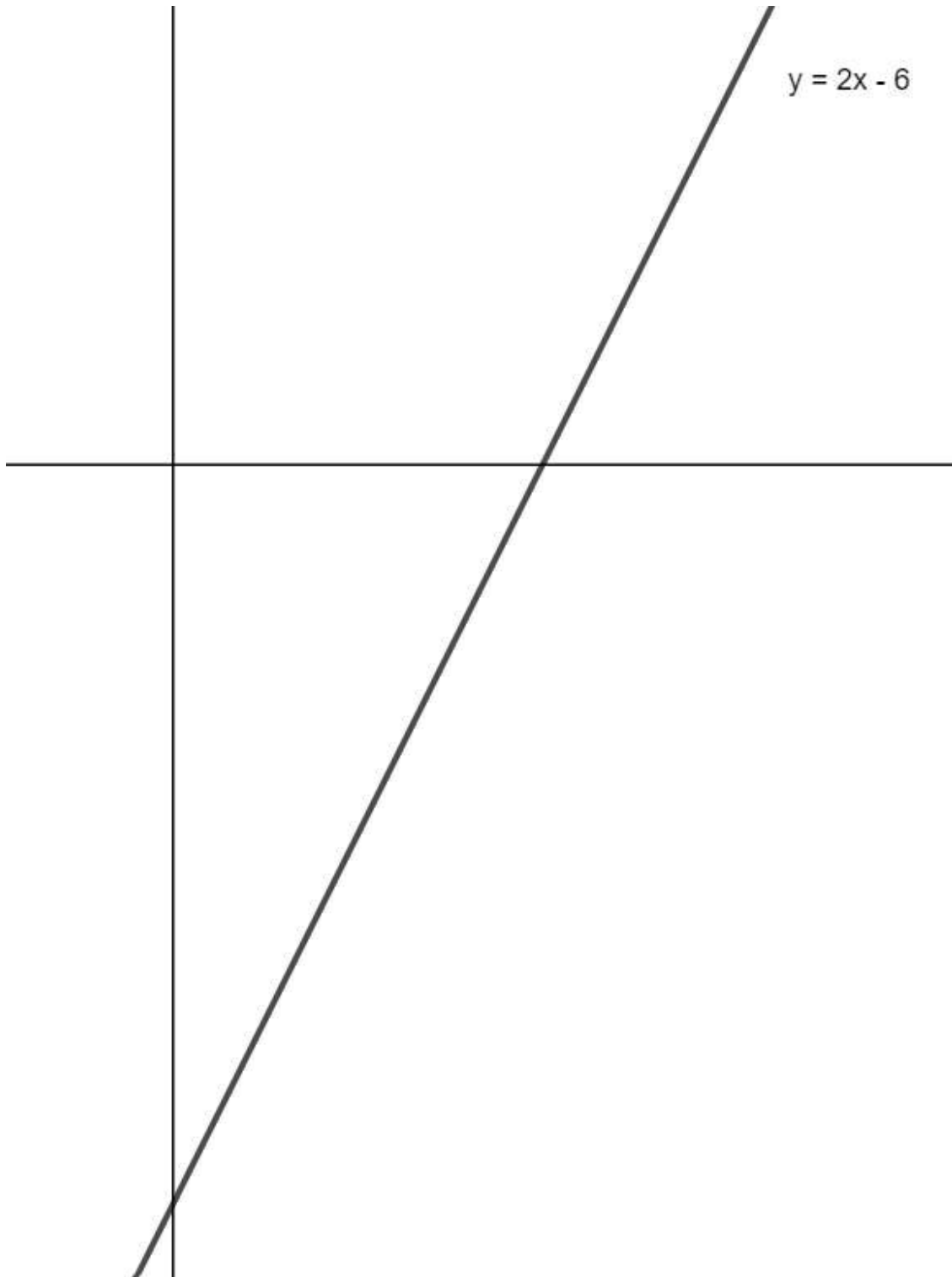
- 2.3 Laske $\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) : \frac{3}{5}$. Anna vastaus sievennettynä murtolukuna. **2 p.**

RATKAISU

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) : \frac{3}{5} = \left(\frac{5}{15} + \frac{12}{15}\right) : \frac{3}{5} =$$
$$\frac{17}{15} : \frac{3}{5} = \frac{17}{15} \cdot \frac{5}{3} = \frac{17 \cdot 5}{15 \cdot 3} =$$
$$\frac{17 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{17}{9}$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) : \frac{3}{5} = \text{$$

- 2.4 Laske suoran $y = 2x - 6$ ja koordinaattiakselien rajaaman kolmion ala. **2 p.**

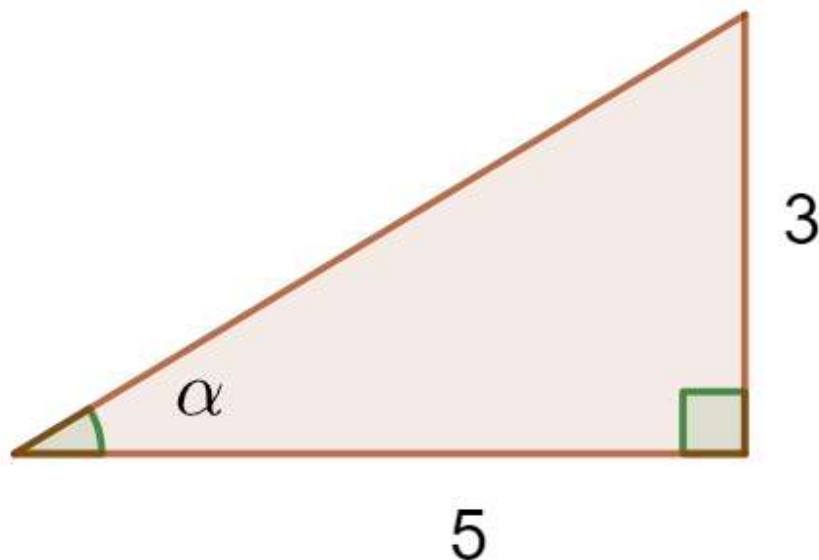
**RATKAISU** x -akselin leikkauskohta $x = 3$ y -akselin leikkauskohta $y = -6$

Kolmion ala

$$A = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

$$A = \boxed{}$$

2.5 Laske kulma α asteen tarkkuudella. 2 p.



RATKAISU

$$\tan \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\alpha \approx 31^\circ$$

$$\alpha = \boxed{}^\circ$$

- 2.6 Sirpa sijoittaa 10000 euroa tilille, jonka vuosittainen nettokorko on 1 %. Kuinka paljon tilillä on rahaa kahden vuoden kuluttua. Anna vastaus euron tarkkuudella. **2 p.**

RATKAISU

$$1,01^2 \cdot 10000 = 10201$$

Tilillä on rahaa €.

3. Ruudukkojen väritystä 12 p.

Aineisto

3.A Kuva: Ruudukkoja

Aatos on saapunut koululle hyvissä ajoin ennen ylioppilaskirjoituksia ja kuluttaa aikaa piirtämällä ruutuvihkoon.

Hän piirtää ensin 3×3 ruudukon reunat ja värittää sitten ruudukon reunasolut. Seuraavaksi hän piirtää 4×4 ja 5×5 ruudukot ja värittää niiden reunasolut.

Aatos jatkaa piirtelyään samalla tavalla, jolloin yhä suurempia ruudukkoja muodostuu paperille.

Merkitään 3×3 ruudukon väritettyjen solujen lukumäärää a_1 , 4×4 ruudukon väritettyjen solujen lukumäärää a_2 , 5×5 ruudukon väritettyjen solujen lukumäärää a_3 ja niin edelleen.

Tarkastellaan näin muodostuvaa lukujonoa $a_1, a_2, a_3, \dots$.

3.1 Määritä luvut a_4 ja a_5 . Anna vastaukset ilman välivaihteita tai perusteluja. 2 p.

PERUSTELU

Neliöt voi luonnostella paperille, minkä jälkeen reunasolujen lukumäärät voidaan laskea.

Reunasolujen lukumäärä voidaan myös laskea havaitsemalla, että reunasolujen lukumäärä $n \times n$ -ruudukossa saadaan vähentämällä värjäämättömän "keskusheliön" solujen lukumäärä $(n-2)^2$ koko ruudukon solujen lukumäärästä n^2 . Näin saadaan

$$a_4 = 6^2 - (6-2)^2 = 36 - 16 = 20 \text{ ja } a_5 = 7^2 - (7-2)^2 = 49 - 25 = 24.$$

PISTEYTYS

- Lukujonon neljäs jäsen oikein. (1 p.)
- Lukujonon viides jäsen oikein. (1 p.)

$$a_4 = \boxed{}^{1 \text{ p.}}$$

$$a_5 = \boxed{}^{1 \text{ p.}}$$

3.2 Lukujen a_n muodostaman lukujonon yleinen jäsen voidaan lausua muodossa $a_n = k \cdot n + b$, missä k ja b ovat kokonaislukuja. Määritä luvut k ja b . 4 p.

RATKAISU

Kuvasta saadaan, että $a_1 = 8$, $a_2 = 12$ ja $a_3 = 16$.

Tutkimalla lukujonon peräkkäisten jäsenten erotuksia havaitaan, että

$$a_2 - a_1 = 12 - 8 = 4, \quad a_3 - a_2 = 16 - 12 = 4, \\ a_4 - a_3 = 20 - 16 = 4 \text{ ja } a_5 - a_4 = 24 - 20 = 4.$$

Koska lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, on kyseessä aritmeettinen lukujono. Lukujonon erotusluku on $d = 4$.

Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, missä a_1 on lukujonon ensimmäinen jäsen.

Sijoittamalla luvut yleisen termin lausekkeeseen saadaan

$$a_n = 8 + (n-1) \cdot 4 = 8 + 4n - 4 = 4n + 4.$$

Vastaus: $k = 4$ ja $b = 4$

PISTEYTYS

- Kokelas on päättellyt, että kyseessä on aritmeettinen lukujono. (2 p.)
- Lukujonon erotus ja ensimmäinen jäsen oikein. (1 p.)
- Oikea vastaus pyydettyä muodossa. (1 p.)

3.3 Aatos jatkaa piirtämistä ja värittämistä kasvattaen ruudukon sivun pituutta yhdellä ruudulla kerrallaan. Viimeinen ruudukko, jonka Aatos piirtää ja värittää, on 25×25 -ruudukko.

Kuinka monta solua Aatos tulee värittäneeksi koko piirtelyurakkansa aikana? 6 p.

RATKAISU

Lukujonon (a_n) jäsenet ilmaisevat $n \times n$ -ruudukossa väritettyjen solujen lukumäärän. Lasketaan yhteen lukujonon jäsenet ensimmäisestä jäsenestä aina sellaiseen jäseneen, joka vastaa 25×25 -ruudukon värjättyjen solujen lukumäärää.

Ruudukko, jonka sivun pituus on m , sisältää a_{m-2} värjättyä solua. Lasketaan siis

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{23} = 23 \cdot \frac{a_1 + a_{23}}{2} = 23 \cdot \frac{8 + 4 \cdot 23 + 4}{2} = 23 \cdot 52 = 1196.$$

PISTEYTY

- Kokelas on oivaltanut, että kysytty suure on aritmeettinen summa. (1 p.)
- Kysytty lukumäärä on lukujonon 23. ensimmäisen jäsenen summa. (2 p.)
- Aritmeettisen summan lauseke muodostettu oikein lukuarvoilla. (2 p.)
- Arimeettinen summa oikein laskettu. (1 p.)

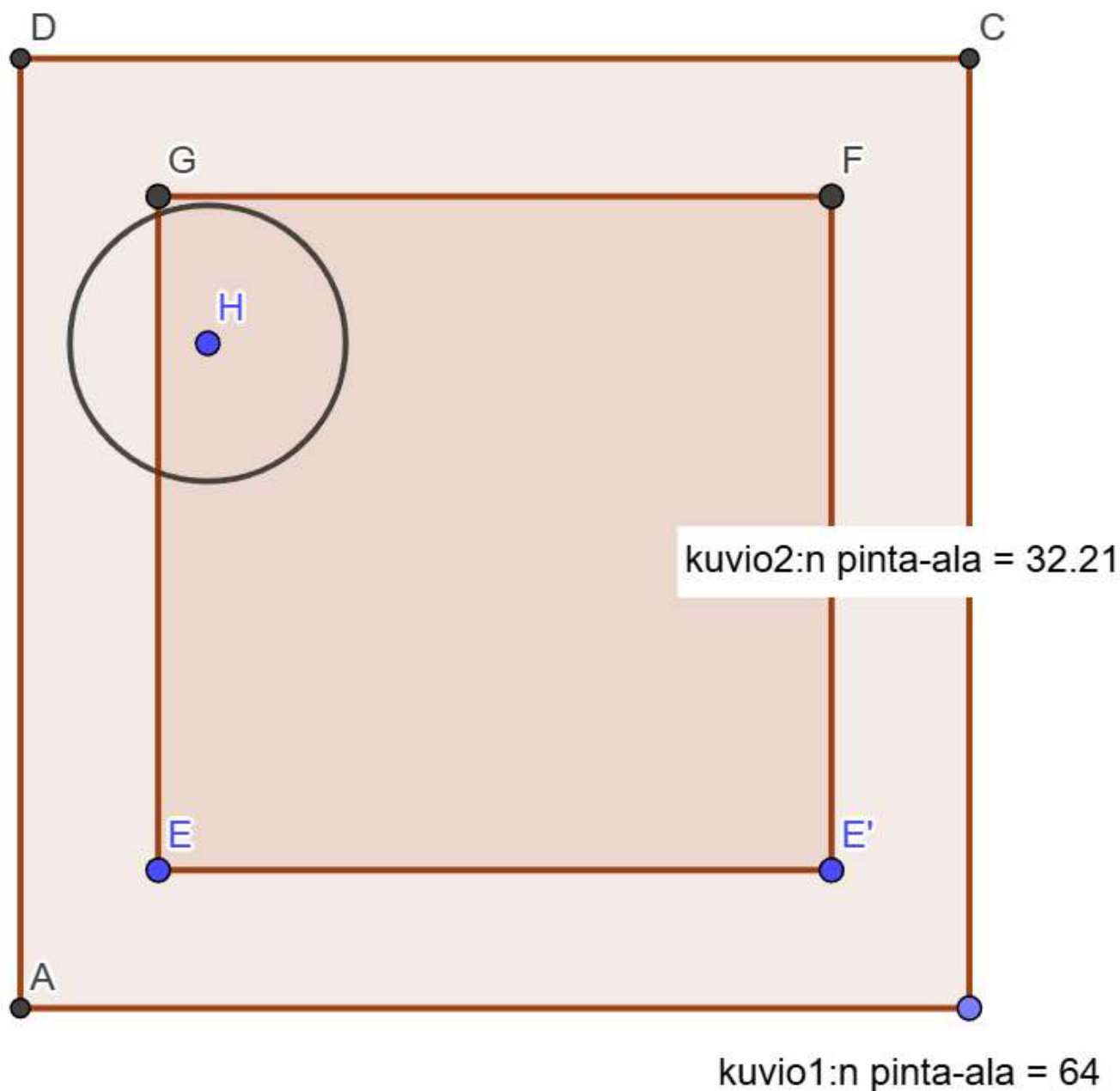
4. Kolikkoja pöytäliinalla 12 p.

Lauri heittää kolikon pöydälle. Oletetaan, että kolikko pudottuaan jää joko kruuna tai klaava asentoon.

Pöydän päällä on ruudullinen pöytäliina, jonka neliön muotoisten ruutujen sivun sivun pituus on 8 cm ja kolikon halkaisija on **23,25** mm. Kolikon pudottua pöytäliinan päälle Lauri tarkastaa onko kolikko kokonaisuudessaan jonkin ruudun sisäpuolella. Tämän jälkeen hän poimii kolikon käteensä ja heittää kolikon uudestaan pöydälle. Lauri heittää kolikkoa yhteensä viisi kertaa.

Millä todennäköisyydellä kolikko putoaa kokonaan jonkin ruudun sisälle vähintään yhdellä heitoista? Anna vastaus desimaalilukuna kahden desimaalin tarkkuudella..

**RATKAISU**



Tarkastellaan kolikon keskipistettä. Kolikko osuu kokonaan ruudun sisään todennäköisyydellä

$$p = \frac{(80-23,25)^2}{80^2} \text{ ja ei osu todennäköisyydellä } 1 - p.$$

Komplementtitodennäköisyydellä saadaan

$P(\text{vähintään yksi osuus kokonaan ruudun sisään}) =$

$1 - P(\text{yksikään ei osu kokonaan ruudun sisään})$

Koska heitot ovat toisistaan riippumattomia, niin

$$1 - (1 - p)^5 = 0,96974120763554... \approx 0,97$$

PISTEYTYS

- On oivallettu, että riittää tarkastella yhtä kolikkoa ja yhtä ruutua. (1 p.)
- Pöytäliinan yksittäisen ruudun pinta-ala oikein. (1 p.)
- Yksittäisen ruudun sisältämän suotuisan alueen pinta-ala oikein. (4 p.)
- Todennäköisyys sille, että yksittäinen kolikko ei kosketa ruudun reunoja oikein. (2 p.) TAI Suotuisan tapauksen geometrinen todennäköisyys oikein (2 p.)
- Komplementin todennäköisyys oikein (2 p.)
- Vastaus kysytyllä tarkkuudella. (2 p.)

5. Uppopallo 12 p.

Yksinkertainen sadevesikaivo koostuu osittain maahan upotetusta suoran ympyrälieriön muotoisesta metallitynnyristä. Tynnyrin maanpinnan yläpuolelle jäävän osan korkeus on 1,3 metriä. Tynnyrin suu on halkaisijaltaan 82 senttimetriä.

Sadepäivän päätteeksi tynnyri on lähes täynnä. Sadeveden pinta tynnyrissä asettuu 1,25 metrin korkeudelle maanpinnasta mitattuna.

Naapurin pihalla on käynnissä leikki, jossa pelivälineenä on suuri ja raskas kuntopallo, jonka säde on 22 cm. Pieleen menneen heiton seurauksena pallo lentää päistikkaa kaivoon ja uppoaa kaivon pohjalle.

Mahtuuko pallo tynnyrin sisälle ilman, että tynnyrissä oleva vesi tulvii tynnyrin ulkopuolelle? Mikäli ei mahdu, niin kuinka monta litraa vettä tulvii ulos tynnyristä? Anna vastaus litran kymmenyksen tarkkuudella.

Pallon ja vedenpinnan törmäyksen aiheuttamia roiskeita ei tarvitse huomioida.

RATKAISU

Pallo syrjäyttää tilavuutensa verran vettä upotessaan kaivoon. Lasketaan pallon tilavuus:

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4}{3}\pi r_{\text{pallo}}^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (22 \text{ cm})^3 = \frac{42592}{3}\pi \text{ cm}^3 = 44602,23... \text{ cm}^3.$$

Kaivon tyhjä yläosa on suora ympyrälieriö, jonka pohjan säde on $\frac{82}{2}\text{cm} = 41 \text{ cm}$ ja korkeus

$$1,3 \text{ m} - 1,25 \text{ m} = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}.$$

Tyhjän osan tilavuus on

$$V_{\text{tyhjä}} = \pi \cdot (41 \text{ cm})^2 \cdot 5 \text{ cm} = 26405,08... \text{ cm}^3.$$

Koska pallon tilavuus on suurempi kuin tynnyrin tyhjän osan tilavuus, niin vettä valuu kaivon reunan yli tilavuuksien erotuksen verran:

$$V_{\text{ylivuoto}} = 44602,23... \text{ cm}^3 - 26405,08... \text{ cm}^3 = 18197,15... \text{ cm}^3.$$

Muunnetaan saatu vastaus litroiksi eli kuutiodesimetreiksi yhden desimaalin tarkkuudella:

$$18197,15... \text{ cm}^3 = 18,19715... \text{ dm}^3 \approx 18,2 \text{ l}.$$

Vastaus: Vettä valuu reunan yli 18,2 litraa.

PISTEYTYS

- Kokelas on oivaltanut, että pallo syrjäyttää tilavuutensa verran vettä. (2 p.)

- Pallon tilavuuden lauseke lukuarvoilla oikein muodostettu. (1 p.)

- Pallon tilavuus oikein desimaalilukuna valittua yksikköä käyttäen. (1 p.)

HUOM! Pallon tilavuutta ei tarvitse ilmaista desimaalilukuna. Mikäli tilavuuden tarkkaa lauseketta käytetään myöhemmissä välivaiheissa, niin kaksi edellistä pistettä voi antaa.

- Kaivon suun säde laskettu oikein. (1 p.)

- Kaivon säde ja kaivon tyhjän osan korkeus ilmaistu keskenään yhteensopivien yksiköiden avulla. (1 p.)

HUOM! Ei pisteitä kaivon tyhjän osan tilavuuteen liittyen, mikäli kokelas käyttää sekayksiköitä laskuissa.

- Kaivon tyhjän osan tilavuuden lauseke lukuarvoilla oikein muodostettu. (1 p.)

- Kaivon tyhjän osan tilavuus oikein. (1 p.)

HUOM! Kaivon tyhjän osan tilavuutta ei tarvitse ilmaista desimaalilukuna. Mikäli tilavuuden tarkkaa lauseketta käytetään myöhemmissä välivaiheissa, niin kaksi edellistä pistettä voi antaa.

- Kaivon reunan yli valuvan veden tilavuus on pallon ja kaivon tyhjän osan tilavuuksien erotus. (1 p.)

- Tilavuuksien erotus laskettu oikein yhteensopivien yksikköjen avulla. (1 p.)

- Vastaus ilmaistu oikein litroissa. (1 p.)

- Vastaus ilmaistu oikein pyydetyllä tarkkuudella. (1 p.)

HUOM! Mikäli on käytetty keskenään yhteensopimattomia yksiköitä, mutta periaate on oikein, niin viimeisistä kolmesta pisteestä voi antaa yhden.

6. Derivaatan ominaisuuksia 12 p.

Aineisto

6.A Kuva: Derivaatafunktion kuvaaja

Tarkastellaan neljännen asteen polynomifunktiota f , jonka derivaatafunktio f' on kolmannen asteen polynomifunktio.

Kuvassa näet funktion f derivaatafunktion f' kuvaajan.

Vastaa osatehtäviin 1 ja 2 kuvaajan perusteella. Vastaa osatehtäviin 3 ja 4 derivoimissääntöjen perusteella.

6.1 Millä muuttujan x arvolla tai arvoilla funktiolla f on minimikohta?

Valitse vastausvaihtoehto, joka sisältää funktion f kaikki minimikohdat. 3 p.

PERUSTELU

Funktion f minimikohdat ovat sellaisia funktion f' nollakohtia, joissa funktion f' merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi. Kuvaajan perusteella funktiolla f' on kaksi tällaista nollakohtaa, $x = -1$ ja $x = 2$.

- ☐ $x = -1$ ja $x = 2$
- ☐ $x = 2$
- ☐ $x = -1, x = 0$ ja $x = 2$
- ☐ $x = -1$ ja $x = 0$
- ☐ $x = 0$
- ☐ $x = 0$ ja $x = 2$
- ☐ Funktiolla f ei ole minimikohtia.
- ☐ $x = -1$

6.2 Millä kaikilla muuttujan x arvoilla funktion f kuvaaja on laskeva käyrä? 3 p.

PERUSTELU

Funktion f kuvaaja on laskeva käyrä sellaisilla muuttujan x arvoilla, joilla f' saa negatiivisia arvoja. Kuvaajan perusteella tällaisia muuttujan x arvoja ovat kaikki välien $x < -1$ ja $0 < x < 2$ pisteet.

- ☐ $-1 < x$ ja $x > 2$
- ☐ $x < -1$ ja $0 < x < 2$
- ☐ $x < 0$
- ☐ $-1 < x < 2$
- ☐ $0 < x$
- ☐ $-1 < x < 0$ ja $x > 2$
- ☐ $0 < x < 2$
- ☐ $x < -1$

6.3 Funktion f kolmannen asteen termi on $-\frac{1}{3}x^3$.

Mikä seuraavista on funktion f' toisen asteen termi? 3 p.

PERUSTELU

Derivoimalla saadaan $D\left(-\frac{1}{3}x^3\right) = -\frac{1}{3}D(x^3) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 = -x^2$.

- ☐ $3x^2$
- ☐ $-\frac{1}{3}x^2$
- ☐ $-3x^2$
- ☐ $\frac{1}{3}x^2$
- ☐ Ei mikään muista vaihtoehdoista.
- ☐ $-x^2$
- ☐ Funktion f derivaatassa ei ole toisen asteen termiä.
- ☐ x^2

6.4 Funktion f' ensimmäisen asteen termi on $-2x$.

Mikä seuraavista on funktion f toisen asteen termi? 3 p.

PERUSTELU

Derivaattafunktion f' ensimmäiseen asteen termi on saatu derivoimalla funktion f toisen asteen termiä. Yleinen toisen asteen termi on muotoa $a \cdot x^2$. Derivoimalla saadaan $D(a \cdot x^2) = a \cdot D(x^2) = a \cdot 2x = 2ax$. Tästä saadaan, että $2ax = -2x \Leftrightarrow a = -1$, jolloin kysytty termi on $-1 \cdot x^2 = -x^2$.

- ☐ x^2
- ☐ Funktiolla f ei ole toisen asteen termiä.
- ☐ $2x^2$
- ☐ $-2x^2$
- ☐ -2
- ☐ $-x^2$
- ☐ 2
- ☐ Ei mikään muista vaihtoehdoista.

Voit käydä tarkastelemassa A-osan vastauksiasi nyt.
Palautettuasi A-osan et voi enää muokata A-osan vastauksia.

Siirry tarkastelemaan vastauksiasi

Tarkastelun jälkeen voit palata kokeeseen jatkamaan tehtäviin vastaamista.

...

Saat estetyt laskinohjelmat käyttöösi palautettuasi A-osan.

Palauta A-osa

B-osa

 Vastaa neljään tehtävään.

7. Palkkoja ja veroja 12 p.

Aineisto

7.A Teksti: Palkan laskenta

7.B Taulukko: Työntekijöiden kuukausi- ja tuntipalkat

7.1 Alina on aloittanut lukion jälkeen 1.8.2024 alkaen harjoittelijana T-ryhmän kaupassa. Hän tutustuu ennen työsopimuksen allekirjoittamista kaupan alan työehtosopimukseen, jossa kerrotaan palkan laskennasta aineiston 7.A mukaisesti.

Alina on elokuussa töissä 12 päivää. Laske Alinan elokuussa saama palkka hyödyntäen liitteenä olevaa palkkataulukkoa. Elokussa oli 22 todellista työpäivää ja T-ryhmä käyttää tietojärjestelmästäan johtuen kuukauden todellisten työpäivien määrää päiväpalkan laskentaperusteena. Alinan työpaikka on Espoossa. **6 p.**

RATKAISU

Päiväpalkka

$$\frac{2072}{22} = 94,18$$

Kuukausipalkka

$$12 \cdot 94,18 = 1130,16$$

Harjoittelijan palkka

$$0.85 \cdot 1130,16 = 960,64$$

Vastaus: **960,64** euroa

Huom! Ilman välilyöristyksiä vastaus on **960,65** euroa. Molemmat tavat hyväksytään.

PISTEYTYS

- Päiväpalkka laskettu oikein. (2 p.)
- Kysytyn palkkaryhmän mukainen kuukausipalkka laskettu oikein. (2 p.)
- Harjoittelijan palkka huomioitu ja laskettu oikein. (2 p.)

7.2 Yleinen arvonlisäverokanta nousi 24 prosentista 25,5 prosenttiin 1.9.2024. Veeran puhelinliittymän kuukausilasku oli 19,99 euroa elokuussa 2024. Mikä oli kuukausilaskun suuruus syyskuussa 2024? **6 p.**

RATKAISU

Olkoon veroton kuukausilasku x euroa.

Verollinen hinta

$$1,24x = 19,99$$

josta

$$x = \frac{19,99}{1,24}$$

$$x = 16,12$$

Verollinen kuukausilasku syyskuussa

$$1,255 \cdot 16,12 = 20,23$$

Vastaus: **20,23** euroa

PISTEYTYS

- Valittu muuttujaksi x puhelinliittymän veroton hinta TAI muu järkevä suure. (1 p.)

- Muodostettu yhtälö luvun x arvon ratkaisemiseksi. (2 p.)
- Luku x oikein ratkaistu yhtälöstä. (1 p.)
- Puhelinliittymän uusi verollinen hinta oikein. (2 p.)
- Tehtävän saa ratkaista myös ilman yhtälöä.

8. Paraabelin huippu 12 p.

8.1 Määritä laskemalla paraabelin $y = 3x^2 - 12x$ huipun koordinaatit. 6 p.

RATKAISU

Nollakohdat

$$3x^2 - 12x = 0$$

Laskimesta

$$x = 0 \text{ tai } x = 4$$

Huipun x-koordinaatti

$$\frac{0+4}{2} = 2 \text{ tai derivaatan nollakohdasta eli } 6x - 12 = 0, \text{ josta } x = 2 \text{ ja}$$

y-koordinaatti

$$3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 = -12$$

Vastaus: $(2, -12)$

PISTEYTYS

- Paraabelin nollakohdat oikein TAI vastaava funktion oikein derivoitu. (2 p.)
- Nollakohtien keskiarvo oikein TAI derivaatan nollakohta oikein. (2 p.)
- Huipun y-koordinaatti saatu sijoittamalla edellä saatu x:n arvo käyrän yhtälöön. (2 p.)

8.2 Määritä parametrin a arvo siten, että funktion $f(x) = -x^2 + 6x + a$ suurin arvo on 10. Millä x :n arvolla suurin arvo saadaan? 6 p.

RATKAISU

Lasketaan derivaatta

$$f'(x) = -2x + 6$$

ja derivaatan nollakohta

$$-2x + 6 = 0$$

$$x = 3$$

Funktion kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli, joten suurin arvo saavutetaan paraabelin huipussa.

Funktion suurin arvo on

$$f(3) = a + 9$$

$$a + 9 = 10$$

$$a = 1$$

Vastaus: Suurin arvo on 10, kun $a = 1$ ja se saavutetaan, kun $x = 3$.

$$f(x) := -x^2 + 6 \cdot x + a \triangleright \text{Valmis}$$

Lasketaan derivaatta

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \triangleright 6 - 2 \cdot x$$

ja derivaatan nollakohta

$$\text{solve}(6 - 2 \cdot x = 0, x) \triangleright x = 3$$

Funktion kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli, joten suurin arvo saavutetaan paraabelin huipussa.

Funktion suurin arvo on

$$f(3) \triangleright a + 9$$

$$\text{solve}(a + 9 = 10, a) \triangleright a = 1$$

Vastaus: Suurin arvo on 10 kun $a = 1$ ja se saavutetaan, kun $x = 3$.

PISTEYTYS

- Funktio derivoitu oikein. (2 p.)
- Derivaatan nollakohta laskettu oikein. (1 p.)
- Perusteltu, miksi derivaatan nollakohta on funktion maksimikohta. (1 p.)
- Muodostettu yhtälö sijoittamalla maksimikohta funktion yhtälöön. (1 p.)
- Luku a ratkaistu yhtälöstä. (1 p.)

9. Tilasto vs. todennäköisyys 12 p.

Aineisto

9.A Teksti ja kuva: Nelitahkoinen noppa

Bella heittää samanaikaisesti neljää nelitahkoista noppaa ja tarkastelee saamiensa nelosten lukumääriä. Hän toistaa kokeen 150 kertaa ja pitää kirjaa saamiensa nelosten lukumäärästä. Hän koostaa lopuksi havaintonsa oheiseen taulukkoon, josta käy

ilmi, kuinka usein Bella sai **vähintään** 0, 1, 2, 3 ja 4 nelosta.

Minimimäärä nelosia	Lukumäärä
0	150
1	112
2	49
3	12
4	5

9.1 Määritä Bellan tilaston pohjalta neljällä nelitahkoisella nopalla saatavien nelosten lukumäärän keskiarvo ja mediaani. Ilmoita keskiarvo kahden desimaalin tarkkuudella ja mediaani kokonaislukuna. Perustele vastauksesi. **6 p.**

RATKAISU

Koska vähintään neljä nelosta saadaan ainoastaan kun on saatu tasan neljä nelosta, niin Bellan heittosarjoista **5** tuottivat tuloksen "neljä nelosta".

Vähintään kolme nelosta saadaan, kun on heitetty kolme TAI neljä nelosta. Vähentämällä tasan neljän nelosen heittosarjojen lukumäärä vähintään kolme nelosta tuottaneiden heittosarjojen lukumäärästä saadaan tasan kolme nelosta tuottaneiden heittosarjojen lukumääräksi $12 - 5 = 7$.

Vähentämällä vähintään kolmen nelosen heittosarjojen lukumäärä vähintään kahden nelosen heittosarjojen lukumäärästä saadaan tasan kahden nelosen heittosarjojen lukumääräksi $49 - 12 = 37$.

Vähentämällä vähintään kahden nelosen heittosarjojen lukumäärä vähintään yhden nelosen heittosarjojen lukumäärästä saadaan tasan yhden nelosen heittosarjojen lukumääräksi $112 - 49 = 63$.

Niiden heittosarjojen lukumäärä, jotka eivät tuottaneet yhtään nelosta, saadaan vähentämällä edellä saadu lukumäärät heittojen kokonaislukumäärästä: $150 - 63 - 37 - 7 - 5 = 38$.

Nelosten eri lukumäärien keskiarvo on $\frac{38 \cdot 0 + 63 \cdot 1 + 37 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{150} = \frac{89}{75} = 1,186... \approx 1,19$.

Nelosten lukumääräin mediaani saadaan sijoittamalla ensin saadut nelosten lukumäärät suurusjärjestykseen. Mediaani on tällöin kahden keskimmäisen, eli 75. ja 76., luvun keskiarvo, sillä saatuja lukumääriä on parillinen määrä.

Koska lukumääräin muodostama rivin alussa on 38 kappaletta nollia joita seuraa 63 kappaletta ykkösiä, niin sekä 75. että 76. luku ovat ykkösiä. Näin ollen mediaani on 1.

PISTEYTYS

- Pelkkiä nelosia sisältävien heittosarjojen lukumäärä oikein. (1 p.)
- Muiden heittosarjojen lukumäärät oikein perusteluineen. (4 x ½ p., pyöristys alaspäin)
- Keskiarvo oikein laskettu edellä saatujen arvojen avulla. (1 p.)
- Mediaani oikein perusteluineen. (2 p.)

HUOM! Mikäli muiden heittosarjojen lukumääräin laskemisessa tapahtuu yksittäisiä virheitä jotka eivät johda kohtuuttomiin lukuarvoihin voidaan pisteet keskiarvon laskemisesta antaa, kunhan keskiarvo on laskettu oikein saaduilla heittosarjojen lukumäärillä.

HUOM! Mikäli muiden heittosarjojen lukumääräin laskemisessa tapahtuu yksittäisiä virheitä jotka eivät johda kohtuuttomiin lukuarvoihin voidaan mediaanin laskemisesta antaa yksi piste, kunhan perustelu on pitävä.

9.2 Määritä täsmällisesti todennäköisyys, jolla saadaan ainakin kolme nelosta, kun neljää nelitahkoista noppaa heitetään samanaikaisesti. Anna vastaus prosenttien sadasosan tarkkuudella. **6 p.**

RATKAISU

Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä on neljä. Onnistuneiden toistojen tutkittavat lukumäärät ovat kolme

ja neljä. Onnistuneen toiston todennäköisyys on $\frac{1}{4}$.

Todennäköisyys saada tasan neljä nelosta on

$$P(4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^0 = 0,00390... .$$

Todennäköisyys saada tasan kolme nelosta on

$$P(3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^1 = 0,04687....$$

Todennäköisyydet voi laskea myös esimerkiksi nSpiren binomPdf- tai binomCdf-komentojen avulla tai GeoGebran todennäköisyyslaskimella.

Koska tapahtumat "tasan neljä nelosta" ja "tasan kolme nelosta" ovat erilliset, on tapahtuman "Tasan neljä TAI tasan kolme nelosta" todennäköisyys edellä saatujen todennäköisyyksien summa:

$$P(3 \text{ tai } 4) = 0,00390... + 0,04687... = 0,05078... \approx 0,0508 .$$

Vastaus: Kolme tai neljä nelosta saadaan 5,08 % todennäköisyydellä.

PISTEYTYS

- Asetelma tunnistettu toistokokeeksi. (1 p.)
- Toistokokeen parametrit oikein. (1 p.)
- Tasan neljän nelosen todennäköisyys oikein. (1 p.)
- Tasan kolmen nelosen todennäköisyys oikein. (1 p.)
- Saatujen todennäköisyyksien summa laskettu oikein. (1 p.)
- Vastaus pyydetyllä tarkkuudella prosenteissa. (1 p.)
- Tehtävän voi myös ratkaista kokonaan tai osittain sopivan ohjelmiston todennäköisyyslaskurilla. Tällöin syötteenä annettujen arvojen sekä ohjelman tulostamien todennäköisyyksien on käytävä ilmi kuvakaappauksesta.

10. Lääkeainematematiikkaa 18 p.

Aineisto

10.A Teksti: Lääkeaineiden hajoaminen

10.B Teksti ja taulukko: Amoksisiliinimääriä

Tarkastellaan lääkeaineen hajoamista elimistössä. Tutustu aineistoihin 10.A ja 10.B ja vastaa seuraaviin tehtäviin.

10.1 Määritä aineistojen tietoja käyttäen lukujen a ja k arvot kolmen desimaalin tarkkuudella eksponentiaalisessa mallissa, joka kuvaa amoksisiliinin määrää elimistössä yksittäisen tabletin nauttimisen jälkeen.

Voit ratkaista osatehtävän joko laskemalla tai sopivaa ohjelmistoa käyttäen. 4 p.

RATKAISU

Muodostetaan funktio $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$ ja sijoitetaan siihen arvot kahdelta taulukon riviltä:

$$f(45) = 300,5967 \Leftrightarrow a \cdot e^{45k} = 300,5967$$

$$f(90) = 180,7178 \Leftrightarrow a \cdot e^{90k} = 180,7178$$

Ratkaistaan saatu yhtälöpari CAS-laskimella:

$$f(t) := a \cdot e^{k \cdot t}$$

Done

$$\text{solve}\left(\left\{\begin{array}{l} f(45)=300.5976 \\ f(90)=180.7178 \end{array}\right\}, \{a, k\}\right)$$

$$a=500.000094765 \text{ and } k=-0.011307462104$$

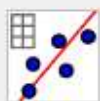
Lukujen a ja k arvot kolmen desimaalin tarkkuudella ovat $a = 500,000$ ja $k = -0,011$.

TAI

Syötetään taulukon data piirto-ohjelmaan ja sovitetaan käyrä kahden muuttujan regressiotyökalun avulla (alla ratkaisu GeoGebrassa):

	A	B
1	45	300.5976
2	90	180.7178
3	135	108.6467
4	180	65.3179
5	225	39.2688

Data Source



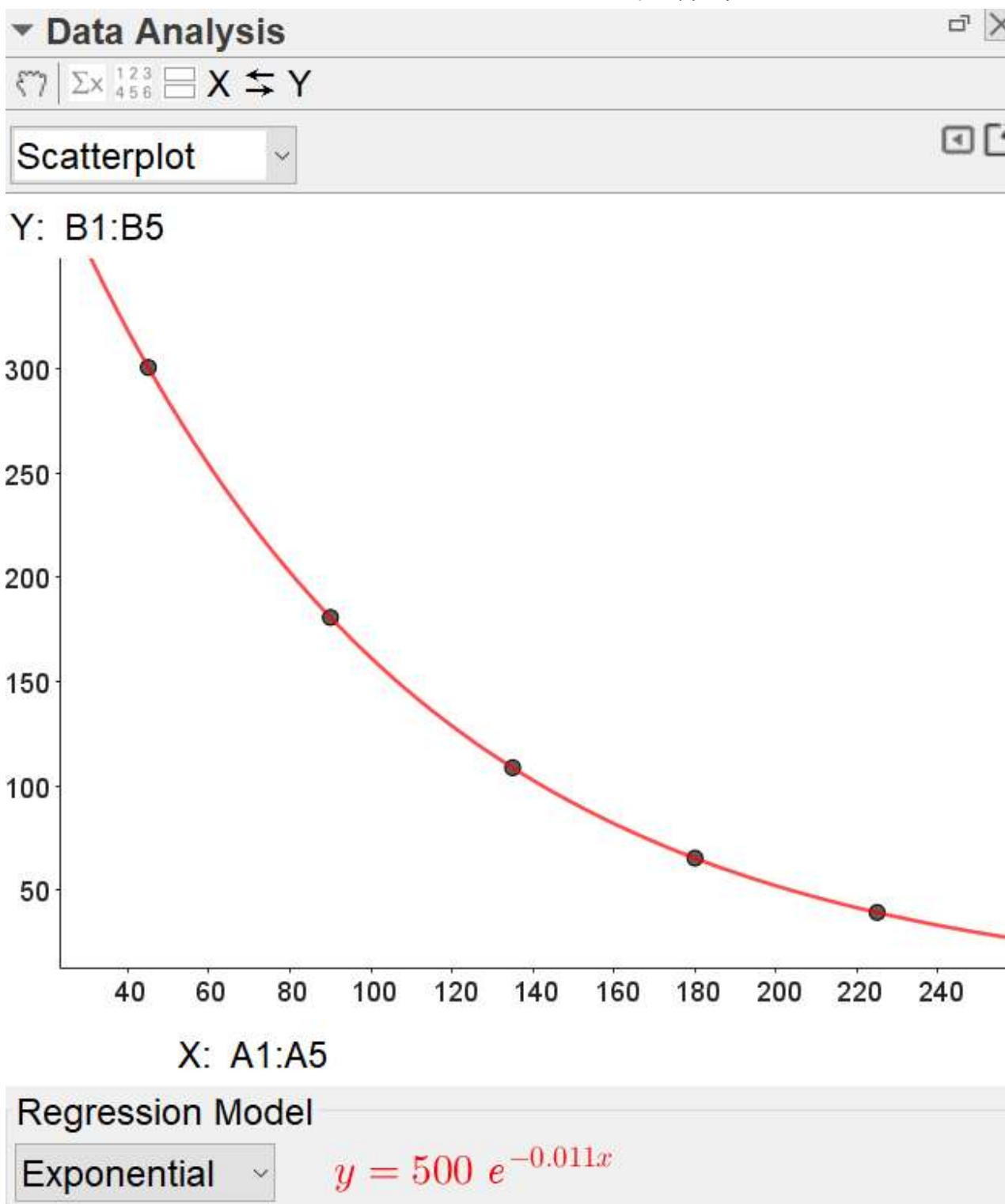
Two Variable Regression Analysis



ξ	ξ
A1:A5	B1:B5
45	300.5976
90	180.71783
135	108.64669
180	65.31787
225	39.26879

Cancel

Analyse

**PISTEYTYS**

- Valittu kaksi riviä taulukosta ja sijoitettu vastaavat arvot annetun eksponenttifunktion yhtälöön. (1 p.)
- Muodostettu yhtälöpari lukujen a ja k ratkaisemiseksi. (1 p.)
- Yhtälöpari ratkaistu. (1 p.)
- Vastaus pyydetyllä tarkkuudella. (1 p.)

TAI

- Kokelaan ratkaisusta käy ilmi käytetty ohjelma ja taulukon datan kopioiminen sopivaan taulukkolaskentatyökaluun. (1 p.)
- Kokelas mainitsee käyttävänsä kahden muuttujan regressioanalyysiä käyrän sovittamiseksi. (1 p.)
- Käyrä sovitettu oikein. (1 p.)
- Lukujen a ja k arvot pyydetyllä tarkkuudella. (1 p.)

10.2 Määritä amoksisilliinin puoliintumisaika ihmiskehossa edellisessä osatehtävässä muodostamasi mallin avulla. Anna vastaus yhden minuutin tarkkuudella.

Tämä osatehtävä tulee ratkaista laskemalla edellisessä osatehtävässä muodostettua mallia käyttäen. Piirto-ohjelmalla laadittu ratkaisu ei anna pisteitä. CAS-laskimen käyttö on sallittu. 4 p.

RATKAISU

Amoksisilliinin puoliintumisaika on se aika, jonka kuluessa amoksisilliinin määrä kehossa putoaa puoleen alkuoperäisestä.

Koska $a = 500$, on amoksisilliinin määrä kehossa heti ensimmäisen tabletin nauttimisen jälkeen 500 mg. Puolet tästä on 250 mg.

Muodostetaan yhtälön, josta saadaan puoliintumisaika $T_{\frac{1}{2}}$ ratkaistua:

$f(t) = 250 \Leftrightarrow 500 \cdot e^{-0,11t} = 250$. Ratkaistaan yhtälö CAS-laskimella:

`solve(500 * e-0.011 * t = 250, t)` $t=63.0133800509$

Amoksisilliinin puoliintumisaika minuutin tarkkuudella on 63 minuuttia.

PISTEYTYS

- Kokelas on ymmärtänyt, mitä puoliintumisaika tarkoittaa. (1 p.)
- Oikea yhtälö muodostettu puoliintumisajan ratkaisemiseksi. (1 p.)
- Puoliintumisaika ratkaistu yhtälöstä. (1 p.)
- Vastaus pyydetyllä tarkkuudella. (1 p.)

10.3 Kuinka suuri kehon pienin amoksisilliinimäärä kuurin ensimmäisen ja viimeisen tabletin nauttimisten välisenä aikana on? Anna vastaus yhden milligramman tarkkuudella.

Tämä osatehtävä tulee ratkaista laskemalla aiemmassa osatehtävässä muodostettua mallia käyttäen. Piirto-ohjelmalla laadittu ratkaisu ei anna pisteitä. CAS-laskimen käyttö on sallittu.

4 p.

RATKAISU

Kuurin aikana amoksisilliinin määrä kehossa on alhaisimmillaan juuri ennen kuurin toisen tabletin nauttimista eli kahdeksan tunnin päästä ensimmäisen tabletin nauttimisesta.

Lasketaan amoksisilliinin määrä kehossa, kun $t = 8 \cdot 60 = 480$ (minuuttia):

$$f(480) = 500 \cdot e^{-0.011 \cdot 480} = 2,546....$$

Amoksisilliinin alhaisin määrä kehossa on noin 3 mg.

PISTEYTYS

- Kokelas on oivaltanut, että alhaisin määrä saavutetaan juuri ennen toisen tabletin nauttimista. (1 p.)
- Oikea ajankohta ilmaistu minuutteina. (1 p.)
- Muodostettu oikea lauseke alhaisimmalle määrälle. (1 p.)
- Vastaus pyydetyllä tarkkuudella. (1 p.)

10.4 Antibioottikuuri kestää usemmiten 1 - 2 viikkoa.

Määritä amoksisilliinin määrät kehossa juuri ennen kuurin kolmannen ja neljännen tabletin nauttimisia. Anna vastauksesi milligramman tarkkuudella.

Kuinka paljon amoksisilliiniä kehossa on vastaustesi perusteella oltava, jotta antibiootti olisi vaikuttava?

Amoksisilliinini määrää kuvaavassa eksponenttimallissa esiintyvä vakio k ei riipu käytetystä annoskoosta.

Osatehtävä tulee ratkaista laskemalla. Piirto-ohjelmalla laadittu ratkaisu ei anna pisteitä. CAS-laskimen käyttö on sallittu.

6 p.

RATKAISU

Edellisessä osatehtävässä todettiin, että amoksisilliinin määrä kehossa juuri ennen toisen tabletin nauttimista on 3 mg.

Koska amoksisilliinin määrää kehossa kuvaavassa mallissa esiintyvä vakio k on riippumaton annoskoosta, voidaan amoksisilliinin määrää kehossa kuurin toisen tabletin nauttimista seuraavan kahdeksan tunnin ajan mallintaa funktiolla $g(t) = (500 + 3) \cdot e^{-0,011t} = 503 \cdot e^{-0,011t}$.

Kuudentoista tunnin kohdalla, juuri ennen kolmannen tabletin nauttimista, amoksisilliinin määrä kehossa on $g(480) = 503 \cdot e^{-0,011 \cdot 480} = 2,561\dots$, eli noin 3 mg.

Tätä seuraavan kahdeksan tunnin aikana amoksisilliinin määrää kehossa voidaan jälleen mallintaa funktiolla $g(t)$!

Juuri ennen neljälleen tabletin nauttimista amoksisilliinin määrä kehossa on jälleen $g(480) = 503 \cdot e^{-0,011 \cdot 480} = 2,561\dots$, eli noin 3 mg.

Sama kuvio toistuu koko kuurin ajan, sillä tabletit nautitaan kahdeksan tunnin välein. Tässä mallissa amoksisilliinin määrä kehossa laskee kolmeen milligrammaan joka kahdeksas tunti, joten kolme milligrammaa on mallin mukaan riittävä pitoisuus antibiootin toimivuuden kannalta.

PISTEYTYS

- Päätelty, että amoksisilliinin määrää kehossa voidaan myöhempien tablettien nauttimisten jälkeen mallintaa eksponenttifunktioilla, jossa ainoastaan lähtöarvo vaihtelee kantaluvun säilyessä samana. (1 p.)
- Muodostettu malli, joka kuvaa amoksisilliinin määrää toisen ja kolmannen tabletin nauttimisten välisenä aikana. (1 p.)
- Amoksisilliinin määrä juuri ennen kolmannen tabletin nauttimista laskettu oikein. (1 p.)
- Todettu, että kolmannen ja neljännen tabletin nauttimisten välisenä aikana amoksisilliinin määrää kehossa voidaan mallintaa samalla tavalla kuin edellisessä aikaikkunassa. (1 p.)
- Johtopäätöksenä antibiootti on vaikuttava, kun sen määrä kehossa on vähintään 3 mg. (2 p.)
- Mikäli kokelas päättlee **edellisen** osatehtävän vastauksen perusteella, että pienin riittävä amoksisilliinipitoisuus kehossa on 3 mg mutta ei laske tässä osatehtävässä kysyttyjä pitoisuuksia, niin **max 1 p.**

11. Koululaisia 18 p.

Aineisto

11.A Taulukko: Forssan väestötilasto

Suomessa syntyy nyt historiallisen vähän lapsia. Tilastokeskus on Suomessa puolueeton taho, joka tuottaa tilastoja suomalaisesta yhteiskunnasta. Löydät aineistosta Tilastokeskuksen tietokannasta ladatun Forssan kaupungin väestötilaston. Vastaa kysymyksiin aineiston perusteella.

11.1 Kuinka monta prosenttia alakoululaisten eli 7-12 vuotiaiden määrä on laskenut vuodesta 2010 vuoteen 2023? 4 p.

RATKAISU

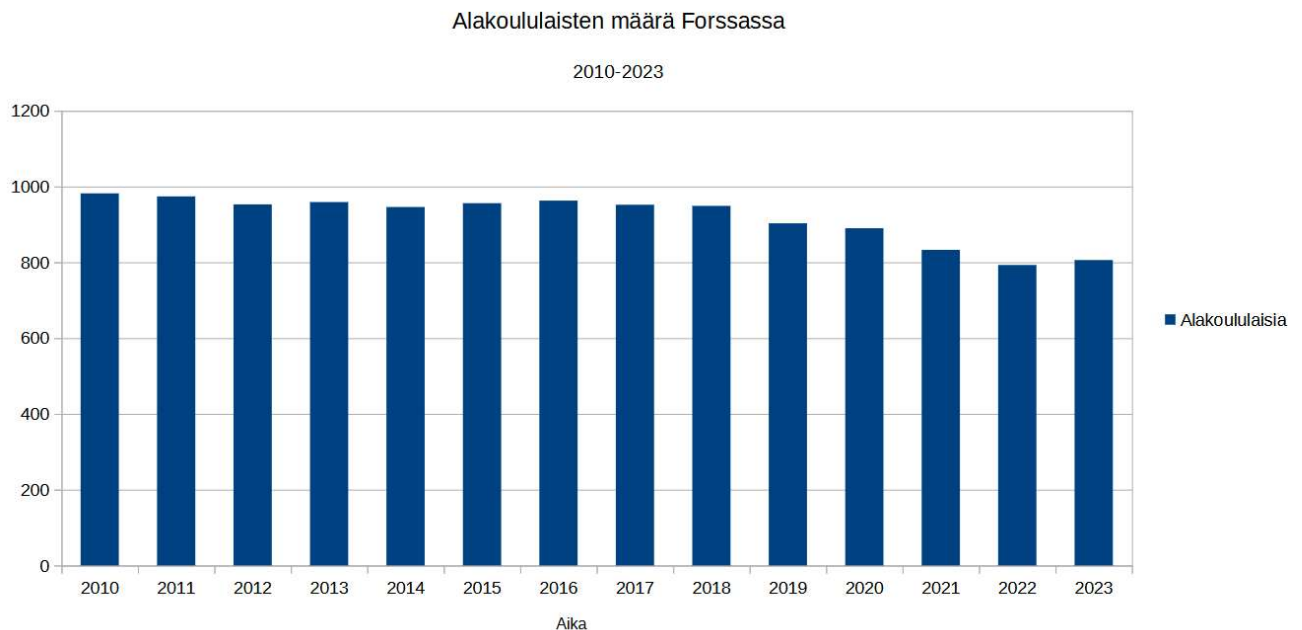
$$\frac{982-806}{982} \cdot 100\% \approx 17,9\%$$

PISTEYTYS

- oppilasmäärät (2 p.)
- muutosprosentin laskukaava (1 p.)
- vastaus (1 p.)

11.2 Piirrä alakoululaisten määrän kehitystä kuvaava pylväskaavio. Otsikoi ja nimeä akselit. 2 p.

RATKAISU



PISTEYTYS

- selkeä kuvaaja (2 p.)

11.3 Jos muuttoliike jätetään huomioimatta, kuinka paljon alakoululaisia on Forssassa vuonna 2026? Entä vuonna 2030?

Kuvaile, miten olet muodostanut oppilasmäärät. Huomaa että nämä lapset ovat jo syntyneet ja heidän määränsä tiedetään. **12 p.**

RATKAISU

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		Alakoululaisia
2010		146	167	174	159	158	153	160	168	149	172	152	167	174	982
2011		149	142	163	168	156	160	148	157	172	150	170	157	168	974
2012		121	142	137	165	169	158	159	148	157	168	150	169	161	953
2013		141	122	145	135	159	172	155	162	152	155	171	152	167	959
2014		129	145	122	147	129	159	174	156	164	148	156	167	155	946
2015		127	122	148	125	151	133	164	171	155	160	152	153	165	956
2016		129	123	124	152	125	152	133	161	168	159	165	154	156	963
2017		111	132	121	121	146	126	155	132	165	171	162	168	154	952
2018		108	113	127	125	122	145	122	152	130	165	170	166	166	949
2019		107	107	110	130	121	119	148	117	153	132	164	168	169	903
2020		91	110	107	112	125	128	119	147	123	158	132	164	166	890
2021		105	85	108	107	114	127	127	120	142	121	155	130	165	833
2022		92	108	92	108	109	111	124	125	121	143	121	153	130	793
2023		86	93	112	100	110	119	118	123	135	124	148	121	155	806
2024			86	93	112	100	110	119	118	123	135	124	148	121	769
2025				86	93	112	100	110	119	118	123	135	124	148	767
2026					86	93	112	100	110	119	118	123	135	124	729
2027						86	93	112	100	110	119	118	123	135	705
2028							86	93	112	100	110	119	118	123	682
2029								86	93	112	100	110	119	118	652
2030									86	93	112	100	110	119	620

Alakoululaisia on vuonna 2026 729 ja vuonna 2030 620.

PISTEYTYS

- perusteluna esimerkiksi taulukko, jossa näkyvät lapset joka vuodelta ja selitys (4 p.)
- lapset 2026 (4 p.)
- lapset 2030 (4 p.)

Kokeen tehtävät loppuvat tähän.

Tarkista, että vastasit ohjeiden mukaiseen määrään tehtäviä. Älä jätä mitään merkintöjä sellaisen tehtävän vastaukselle varattuun tilaan, jota et halua jättää arvosteltavaksi.

Siirry tarkastelemaan vastauksiasi

Tarkastelun jälkeen voit vielä palata muokkaamaan vastauksia, tai päättää kokeen.

