

6.1

- a) Osoitetaan, että lukujen 193 ja 13 erotus on jaollinen luvulla 9.

$$193 - 13 = 180 = 9 \cdot 20$$

Siis $193 \equiv 13 \pmod{9}$.

- b) Koska $193 \equiv 13 \pmod{9}$, luvuilla 193 ja 13 on sama jakojäännös, kun ne jaetaan luvulla 9.

Jakolaskun $13 : 9$ jakojäännös on 4, joten myös jakolaskun $193 : 9$ jakojäännös on 4.

- c) Jakolaskun $193 : 9$ jakojäännös on 4, joten $193 \equiv 4 \pmod{9}$.

Vastaus

b) 4

c) 4

6.2

- a) Osoitetaan, että lukujen 171 ja 3 erotus on jaollinen luvulla 4.

$$171 - 3 = 168 = 4 \cdot 42$$

$$\text{Siis } 171 \equiv 3 \pmod{4}.$$

- b) Osoitetaan, että lukujen 48 ja -1 erotus on jaollinen luvulla 7.

$$48 - (-1) = 49 = 7 \cdot 7$$

$$\text{Siis } 48 \equiv -1 \pmod{7}.$$

- c) Osoitetaan, että lukujen 72 ja 0 erotus on jaollinen luvulla 12.

$$72 - 0 = 72 = 12 \cdot 6$$

$$\text{Siis } 72 \equiv 0 \pmod{12}.$$

6.3

- a) Kongruentit luvut modulo 3 sijaitsevat lukusuoralla kolmen askelen välein. Luvut ovat siis

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 ja 28.

- b) Kongruentit luvut modulo 5 sijaitsevat lukusuoralla viiden askelen välein. Luvut ovat siis

4, 9, 14, 19, 24, ja 29.

- c) Kongruentit luvut modulo 9 sijaitsevat lukusuoralla yhdeksän askelen välein. Luvut ovat siis

4, 13 ja 22.

d) $4 - 3 - 3 = -2$

e) $4 - 5 = -1$

f) $4 - 9 = -5$

Vastaus

a) 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 ja 28

b) 4, 9, 14, 19, 24, ja 29

c) 4, 13 ja 22

d) -2

e) -1

f) -5

6.4

Jakolaskun $74 : 8$ jakojäännös on 2, joten $74 \equiv 2 \pmod{8}$.

Jakolaskun $65 : 8$ jakojäännös on 1, joten $65 \equiv 1 \pmod{8}$.

Jakolaskun $57 : 8$ jakojäännös on 1, joten $57 \equiv 1 \pmod{8}$.

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 8.

$$74 \cdot 65 + 2 \cdot 57 \equiv 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \equiv 4 \pmod{8}$$

Kongruenteilla luvuilla on sama jakojäännös. Kun luku $74 \cdot 65 + 2 \cdot 57$ jaetaan luvulla 8, sen jakojäännös on 4.

Vastaus

4

6.5

Luvun 23^{128} viimeinen numero on jakojäännös, kun luku jaetaan luvulla 10. Tutkitaan siis kongruenssia modulo 10.

$$\begin{aligned} 23^{128} & \qquad 23 \equiv 3 \pmod{10} \\ \equiv 3^{128} & \qquad 3^{128} = 3^{2 \cdot 64} = (3^2)^{64} \\ \equiv (3^2)^{64} & \qquad 3^2 = 9 \\ \equiv 9^{64} & \qquad 9 \equiv -1 \pmod{10} \\ \equiv (-1)^{64} & \qquad (-1)^{64} = 1 \\ \equiv 1 \pmod{10} \end{aligned}$$

Kun luku 23^{128} jaetaan luvulla 10, sen jakojäännös on 1.

Luvun 23^{128} viimeinen numero on siis 1.

Vastaus

1

6.6

Oletetaan, että n on kokonaisluku.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku $n(n^2 + 5)$ on
jaollinen luvulla 3.

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

Jokainen kokonaisluku n toteuttaa yhden
kongruensseista $n \equiv 0$, $n \equiv 1$ tai $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Aloitetaan päättely
oletuksesta.

Osoitetaan, että kaikissa tapauksissa
 $n(n^2 + 5) \equiv 0 \pmod{3}$.

1) Jos $n \equiv 0 \pmod{3}$, niin

$$n(n^2 + 5) \equiv 0 \cdot (0 + 5) \equiv 0 \pmod{3}.$$

2) Jos $n \equiv 1 \pmod{3}$, niin

$$n(n^2 + 5) \equiv 1 \cdot (1 + 5) \equiv 6 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Erotus $6 - 0$ on
jaollinen luvulla 3.

3) Jos $n \equiv 2 \pmod{3}$, niin

$$n(n^2 + 5) \equiv 2 \cdot (2^2 + 5) \equiv 18 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Erotus $18 - 0$ on
jaollinen luvulla 3.

Siis aina $n(n^2 + 5) \equiv 0 \pmod{3}$.

Perustellaan, miksi
väite on tosi.

On osoitettu, että kaikilla kokonaisluvuilla n luku
 $n(n^2 + 5)$ on jaollinen luvulla 3. $\square$

6.7

- a) Lasketaan lukujen 754 ja 421 erotus.

$$754 - 421 = 333 = 3 \cdot 111$$

Koska erotus on jaollinen luvulla 3, niin $754 \equiv 421 \pmod{3}$.

Siten luvuilla 754 ja 421 on sama jakojäännös, kun ne jaetaan luvulla 3.

- b) Lasketaan lukujen $7^5 + 12$ ja $7^5 - 9$ erotus.

$$7^5 + 12 - (7^5 - 9) = 7^5 + 12 - 7^5 + 9 = 21 = 3 \cdot 7$$

Koska erotus on jaollinen luvulla 3, niin $7^5 + 12 \equiv 7^5 - 9 \pmod{3}$.

Siten luvuilla $7^5 + 12$ ja $7^5 - 9$ on sama jakojäännös, kun ne jaetaan luvulla 3.

- c) Lasketaan lukujen $8^3 - 12$ ja $2^9 + 1$ erotus.

$$\begin{aligned} 8^3 - 12 - (2^9 + 1) &= (2^3)^3 - 12 - 2^9 - 1 \\ &= 2^9 - 12 - 2^9 - 1 \\ &= -13 \\ &= -1 \cdot 13 \end{aligned}$$

Koska erotus on jaollinen luvulla 13, niin $8^3 - 12 \equiv 2^9 + 1 \pmod{13}$.

Siten luvuilla $8^3 - 12$ ja $2^9 + 1$ on sama jakojäännös, kun ne jaetaan luvulla 13.

6.8

a) Jakolaskun $9 : 4$ jakojäännös on 1, joten $9 \equiv 1 \pmod{4}$.

Jakolaskun $5 : 4$ jakojäännös on 1, joten $5 \equiv 1 \pmod{4}$.

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 4.

$$\begin{aligned} 9^{24} - 5^{12} &\equiv 1^{24} - 1^{12} \\ &\equiv 1 - 1 \\ &\equiv 0 \pmod{4} \end{aligned}$$

Kun luku $9^{24} - 5^{12}$ jaetaan luvulla 4, jakojäännös on 0.

b) Erotus $3 - (-1) = 4$, joten $3 \equiv -1 \pmod{4}$.

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 4.

$$\begin{aligned} 9^{25} - 3^{13} &\equiv 1^{25} - (-1)^{13} \\ &\equiv 1 - (-1) \\ &\equiv 1 + 1 \\ &\equiv 2 \pmod{4} \end{aligned}$$

Kun luku $9^{25} - 3^{13}$ jaetaan luvulla 4, jakojäännös on 2.

Toisin sanoen luku $9^{25} - 3^{13}$ ei ole jaollinen luvulla 4.

Vastaus

a) 0

b) Ei ole.

6.9

Muokataan lukua 2^{2100} .

$$2^{2100} = (2^3)^{700} = 8^{700}$$

Erotus $8 - 1 = 7$ on jaollinen luvulla 7, joten $8 \equiv 1 \pmod{7}$.

Korvataan laskutoimituksen luku kongruentilla luvulla modulo 7.

$$2^{2100} = 8^{700} \equiv 1^{700} \equiv 1 \pmod{7}$$

Jakojännös on 1.

Vastaus

1

6.10

Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla. Luku on jaollinen luvulla 3, jos se on kongruentti nollan kanssa modulo 3.

Erotus $4 - 1 = 3$ on jaollinen luvulla 3, joten $4 \equiv 1 \pmod{3}$.

Erotus $2 - (-1) = 3$ on jaollinen luvulla 3, joten $2 \equiv -1 \pmod{3}$.

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 3.

$$\begin{aligned} 4^{2017} + 2^{2017} &\equiv 1^{2017} + (-1)^{2017} \\ &\equiv 1 + (-1) \\ &\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

Jakojännös on 0, joten luku $4^{2017} + 2^{2017}$ on jaollinen luvulla 3.

6.11

a) Erotus

$$3^4 - (-1) = 81 + 1 = 82 = 41 \cdot 2$$

on jaollinen luvulla 41, joten $3^4 \equiv -1 \pmod{41}$.

b) Tutkitaan jaollisuutta kongruenssin avulla.

$$\begin{aligned} 3^{23} - 14 &\equiv 3^3 \cdot 3^{20} - 14 \\ &\equiv 27 \cdot (3^4)^5 - 14 \\ &\equiv 27 \cdot (-1)^5 - 14 \\ &\equiv 27 \cdot (-1) - 14 \\ &\equiv -27 - 14 \\ &\equiv -41 \\ &\equiv 0 \pmod{41} \end{aligned}$$

Luku $3^{23} - 14$ on jaollinen luvulla 41.

Vastaus

b) On.

6.12

Oletetaan, että n on kokonaisluku.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku $n^5 - n$ on jaollinen luvulla 5.

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

Jokainen kokonaisluku n toteuttaa yhden kongruensseista

Aloitetaan päättely
oletuksesta.

$$n \equiv 0, \quad n \equiv 1, \quad n \equiv 2, \quad n \equiv 3 \quad \text{tai} \quad n \equiv 4 \pmod{5}.$$

Osoitetaan, että kaikissa tapauksissa
 $n^5 - n \equiv 0 \pmod{5}$.

1) Jos $n \equiv 0 \pmod{5}$, niin

$$n^5 - n \equiv 0 - 0 \equiv 0 \pmod{5}.$$

2) Jos $n \equiv 1 \pmod{5}$, niin

$$n^5 - n \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{5}.$$

3) Jos $n \equiv 2 \pmod{5}$, niin

$$n^5 - n \equiv 2^5 - 2 \equiv 30 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Erotus $30 - 0$ on
jaollinen luvulla 5.

4) Jos $n \equiv 3 \pmod{5}$, niin

$$n^5 - n \equiv 3^5 - 3 \equiv 240 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Erotus $240 - 0$ on
jaollinen luvulla 5.

5) Jos $n \equiv 4 \pmod{5}$, niin

$$n^5 - n \equiv 4^5 - 4 \equiv 1020 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Erotus $1020 - 0$
on jaollinen luvulla
5.

Siis aina $n^5 - n \equiv 0 \pmod{5}$.

Perustellaan, miksi
väite on tosi.

On osoitettu, että kaikilla kokonaisluvuilla n luku
 $n^5 - n$ on jaollinen luvulla 5. $\square$

6.13

- a) Osoitetaan, että lukujen 332 ja -1 erotus on jaollinen luvulla 111.

$$332 - (-1) = 333 = 3 \cdot 111$$

$$\text{Siis } 332 \equiv -1 \pmod{111}.$$

- b) Osoitetaan, että lukujen 43 ja 2193 erotus on jaollinen luvulla 25.

$$43 - 2193 = -2150 = 25 \cdot (-86)$$

$$\text{Siis } 43 \equiv 2193 \pmod{25}.$$

- c) Osoitetaan, että lukujen 1000 ja 0 erotus on jaollinen luvulla 8.

$$1000 - 0 = 1000 = 8 \cdot 125$$

$$\text{Siis } 1000 \equiv 0 \pmod{8}.$$

6.14

- a) **Tapa 1.** Kongruentit luvut modulo 5 sijaitsevat lukusuoralla viiden askelen välein. Etsitty luku on
 $24 - 5 - 5 - 5 - 5 = 4$.

Tapa 2. Pienin luonnollinen luku, jonka kanssa luku 24 on kongruentti modulo 5 on jakolaskun $24 : 5$ jakojäännös. Luku on siis 4.

- b) **Tapa 1.** Kongruentit luvut modulo 4 sijaitsevat lukusuoralla neljän askelen välein. Etsitty luku on

$$24 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 = 0$$

Tapa 2. Pienin luonnollinen luku, jonka kanssa luku 24 on kongruentti modulo 4 on jakolaskun $24 : 4$ jakojäännös. Luku on siis 0.

- c) **Tapa 1.** Kongruentit luvut modulo 3 sijaitsevat lukusuoralla kolmen askelen välein. Etsitty luku on

$$24 - 8 \cdot 3 = 0.$$

Tapa 2. Pienin luonnollinen luku, jonka kanssa luku 24 on kongruentti modulo 3 on jakolaskun $24 : 3$ jakojäännös. Luku on siis 0.

- d) **Tapa 1.** Kongruentit luvut modulo 2 sijaitsevat lukusuoralla kahden askelen välein. Etsitty luku on

$$24 - 12 \cdot 2 = 0.$$

Tapa 2. Pienin luonnollinen luku, jonka kanssa luku 24 on kongruentti modulo 2 on jakolaskun $24 : 2$ jakojäännös. Luku on siis 0.

Vastaus

- a) 4
- b) 0
- c) 0
- d) 0

6.15

Kun luvut jaetaan luvulla 5, jakojäännös on 3.

Kahden luvun erotus on aina jaollinen luvulla 5.

Luvut ovat keskenään kongruentit modulo 5.

6.16

Jakolaskun $16 : 5$ jakojäännös on 1, joten $16 \equiv 1 \pmod{5}$.

Jakolaskun $28 : 5$ jakojäännös on 3, joten $28 \equiv 3 \pmod{5}$.

Erotus $4 - (-1) = 5$ on jaollinen luvulla 5, joten $4 \equiv -1 \pmod{5}$.

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 5.

$$\begin{aligned} 16^{2016} - 28 \cdot 4^{2019} &\equiv 1^{2016} - 3 \cdot (-1)^{2019} \\ &\equiv 1 - 3 \cdot (-1) \\ &\equiv 1 + 3 \\ &\equiv 4 \pmod{5} \end{aligned}$$

Kongruenteilla luvuilla on sama jakojäännös. Kun luku $16^{2016} - 28 \cdot 4^{2019}$ jaetaan luvulla 5, sen jakojäännös on 4.

Vastaus

4

6.17

Luku on jaollinen luvulla 3, jos se on kongruentti nollan kanssa modulo 3.

Erotus $7 - 1 = 6$ on jaollinen luvulla 3, joten $7 \equiv 1 \pmod{3}$.

Erotus $2 - (-1) = 3$ on jaollinen luvulla 3, joten $2 \equiv -1 \pmod{3}$.

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 3.

$$\begin{aligned} 7^{2502} + 2^{1573} &\equiv 1^{2502} + (-1)^{1573} \\ &\equiv 1 + (-1) \\ &\equiv 1 - 1 \\ &\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

Jakojännös on 0, joten luku $7^{2502} + 2^{1573}$ on jaollinen luvulla 3.

6.18

- a) Luvun kaksi viimeistä numeroa ovat jakojäännös, kun luku jaetaan luvulla 100. Tutkitaan siis kongruenssia modulo 100.

$$\begin{aligned}99^{2019} & \qquad \qquad \qquad 99 \equiv -1 \pmod{100} \\ & \equiv (-1)^{2019} \\ & \equiv -1 \\ & \equiv 99 \pmod{100}\end{aligned}$$

Kun luku 99^{2019} jaetaan luvulla 100, jakojäännös on 99.

Luvun 99^{2019} kaksi viimeistä numeroa ovat 99.

- b) Luvun kaksi viimeistä numeroa ovat jakojäännös, kun luku jaetaan luvulla 100. Tutkitaan siis kongruenssia modulo 100.

$$\begin{aligned}51^{2018} & \qquad \qquad \qquad 51^{2018} = 51^{2 \cdot 1009} = (51^2)^{1009} \\ & \equiv (51^2)^{1009} \\ & \equiv 2601^{1009} \qquad \qquad \qquad 2601 \equiv 1 \pmod{100} \\ & \equiv 1^{1009} \\ & \equiv 1 \pmod{100}\end{aligned}$$

Kun luku 51^{2018} jaetaan luvulla 100, jakojäännös on 1.

Luvun 51^{2018} kaksi viimeistä numeroa ovat 01.

Vastaus

- a) 99
b) 01

6.19

Oletetaan, että n on kokonaisluku.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku $n(n^2 + 1)(n^2 + 4)$
on jaollinen luvulla 5.

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

Jokainen kokonaisluku n toteuttaa yhden
kongruensseista

Aloitetaan päättely
oletuksesta.

$$n \equiv 0, \quad n \equiv 1, \quad n \equiv 2, \quad n \equiv 3 \quad \text{tai} \quad n \equiv 4 \pmod{5}.$$

Osoitetaan, että kaikissa tapauksissa
 $n(n^2 + 1)(n^2 + 4) \equiv 0 \pmod{5}$.

1) Jos $n \equiv 0 \pmod{5}$, niin

$$\begin{aligned} n(n^2 + 1)(n^2 + 4) &\equiv 0 \cdot (0^2 + 1)(0^2 + 4) \\ &\equiv 0 \pmod{5}. \end{aligned}$$

2) Jos $n \equiv 1 \pmod{5}$, niin

$$\begin{aligned} n(n^2 + 1)(n^2 + 4) &\equiv 1 \cdot (1^2 + 1)(1^2 + 4) \\ &\equiv 10 \\ &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

3) Jos $n \equiv 2 \pmod{5}$, niin

$$\begin{aligned} n(n^2 + 1)(n^2 + 4) &\equiv 2 \cdot (2^2 + 1)(2^2 + 4) \\ &\equiv 80 \\ &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}.$$

4) Jos $n \equiv 3 \pmod{5}$, niin

$$\begin{aligned}n(n^2 + 1)(n^2 + 4) &\equiv 3 \cdot (3^2 + 1)(3^2 + 4) \\ &\equiv 390 \\ &\equiv 0 \pmod{5}\end{aligned}$$

5) Jos $n \equiv 4 \pmod{5}$, niin

$$\begin{aligned}n(n^2 + 1)(n^2 + 4) &\equiv 4 \cdot (4^2 + 1)(4^2 + 4) \\ &\equiv 1360 \\ &\equiv 0 \pmod{5}\end{aligned}$$

Siis aina $n(n^2 + 1)(n^2 + 4) \equiv 0 \pmod{5}$.

Perustellaan, miksi väite on tosi.

On osoitettu, että kaikilla kokonaisluvuilla n luku $n(n^2 + 1)(n^2 + 4)$ on jaollinen luvulla 5. $\square$

6.20

- a) Erotus $11^2 - 4 = 121 - 4 = 117$ on jaollinen luvulla 117, joten $11^2 \equiv 4 \pmod{117}$.
- b) Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla. Luku on jaollinen luvulla 117, jos se on kongruentti nollan kanssa modulo 117.

$$\begin{aligned} 11^{44} - 2^{44} & & 11^{44} &= 11^{2 \cdot 22} = (11^2)^{22} \\ & & 2^{44} &= 2^{2 \cdot 22} = (2^2)^{22} \\ & \equiv (11^2)^{22} - (2^2)^{22} & 11^2 &\equiv 4 \pmod{117} \\ & \equiv 4^{22} - 4^{22} \\ & \equiv 0 \pmod{117} \end{aligned}$$

Jakojäännös on 0, joten luku $11^{44} - 2^{44}$ on jaollinen luvulla 117.

6.21

Aikavälillä 6.12.1917 – 6.12.2017 karkausvuosia olivat joka neljäs vuosi vuodesta 1920 vuoteen 2016.

Karkausvuosien lukumäärä oli siis $\frac{2016-1920}{4} + 1 = 25$.

Aikavälillä oli 25 karkauspäivää, joten päivien lukumäärää oli $100 \cdot 365 + 25 = 36\,525$.

Laskimella saadaan $36\,525 : 7 \approx 5217,86$.

Jakolaskun $36\,525 : 7$ jakojäännös on $36\,525 - 5217 \cdot 7 = 6$.

Joulukuun 6. päivästä vuonna 1917 oli kulunut kokonaisten viikkojen lisäksi 6 päivää.

Koska 6.12.2017 oli keskiviikko, 6.12.1917 oli 6 viikonpäivää aiemmin eli torstaina.

Vastaus
torstai

6.22

Oletetaan, että n on kokonaisluku.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku $16 \cdot 7^{2n} - 28 \cdot 3^{2n+3}$
on jaollinen luvulla 5.

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla.

$$16 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$7 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$28 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$3 \equiv -2 \pmod{5}$$

Korvataan laskutoimituksen luvut kongruenteilla luvuilla modulo 5.

$$16 \cdot 7^{2n} - 28 \cdot 3^{2n+3}$$

$$\equiv 1 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot (-2)^{2n+3}$$

$$\equiv 2^{2n} - 3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^{2n}$$

$(-2)^{2n} = 2^{2n}$, koska $2n$ on parillinen.

$$\equiv 2^{2n} + 24 \cdot 2^{2n}$$

Erotetaan 2^{2n} yhteiseksi tekijäksi.

$$\equiv 2^{2n}(1 + 24)$$

$$\equiv 2^{2n} \cdot 25$$

$$25 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\equiv 2^{2n} \cdot 0$$

$$\equiv 0 \pmod{5}$$

Siis aina $16 \cdot 7^{2n} - 28 \cdot 3^{2n+3} \equiv 0 \pmod{5}$.

Perustellaan, miksi
väite on tosi.

On osoitettu, että kaikilla kokonaisluvuilla n luku
 $16 \cdot 7^{2n} - 28 \cdot 3^{2n+3}$ on jaollinen luvulla 5. $\square$

6.23

Oletetaan, että luku n ei ole jaollinen luvulla 3.

Kirjoitetaan oletus
(eli lähtötiedot)
näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku $n^6 - 1$ on jaollinen luvulla 9.

Kirjoitetaan väite
näkyviin.

Todistetaan jaollisuus kongruenssin modulo 9 avulla.

Koska luku n ei ole jaollinen luvulla 3, niin se on muotoa $n \equiv 1, n \equiv 2, n \equiv 4, n \equiv 5, n \equiv 7$ tai $n \equiv 8 \pmod{9}$.

Osoitetaan, että kaikissa tapauksissa $n^6 - 1 \equiv 0 \pmod{9}$.

1) Jos $n \equiv 1 \pmod{9}$, niin

$$n^6 - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{9}.$$

2) Jos $n \equiv 2 \pmod{9}$, niin

$$n^6 - 1 \equiv 2^6 - 1 \equiv 63 \equiv 0 \pmod{9}.$$

3) Jos $n \equiv 4 \pmod{9}$, niin

$$n^6 - 1 \equiv 4^6 - 1 \equiv 4095 \equiv 9 \cdot 455 \equiv 0 \cdot 455 \equiv 0 \pmod{9}.$$

4) Jos $n \equiv 5 \pmod{9}$, niin

$$n^6 - 1 \equiv 5^6 - 1 \equiv 15624 \equiv 9 \cdot 1736 \equiv 0 \cdot 1736 \equiv 0 \pmod{9}.$$

5) Jos $n \equiv 7 \pmod{9}$, niin

$$n^6 - 1 \equiv 7^6 - 1 \equiv 117648 \equiv 9 \cdot 13072 \equiv 0 \cdot 13072 \equiv 0 \pmod{9}.$$

6) Jos $n \equiv 8 \pmod{9}$, niin

$$n^6 - 1 \equiv 8^6 - 1 \equiv 262143 \equiv 9 \cdot 29127 \equiv 0 \cdot 29127 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Siis aina $n^6 - 1 \equiv 0 \pmod{9}$.

Perustellaan, miksi
väite on tosi.

Väite on näin todistettu. $\square$

6.24

Oletetaan, että luku n on satanumeroinen kokonaisluku, jonka kaikki numerot ovat yhdeksikköjä.

Kirjoitetaan oletus (eli lähtötiedot) näkyviin.

Tehtävänä on osoittaa, että luku n on jaollinen luvulla 101.

Kirjoitetaan väite näkyviin.

Todistetaan jaollisuus kongruenssin avulla.

Luku n voidaan kirjoittaa muodossa $n = 10^{100} - 1$.

$$n = 10^{100} - 1$$

$$10^{100} = 10^{2 \cdot 50} = (10^2)^{50}$$

$$\equiv (10^2)^{50} - 1$$

$$\equiv 100^{50} - 1$$

$$100 \equiv -1 \pmod{101}$$

$$\equiv (-1)^{50} - 1$$

$$\equiv 1 - 1$$

$$\equiv 0 \pmod{101}$$

Koska $n \equiv 0 \pmod{101}$, luku n on jaollinen luvulla 101. $\square$

Perustellaan, miksi väite on tosi.

6.25

a) Oletetaan, että a , b ja n ovat positiivisia kokonaislukuja.

Tällöin

$$a = nq_1 + r_1 \text{ ja } b = nq_2 + r_2,$$

missä q_1 ja q_2 ovat jotkin kokonaisluvut, $0 \leq r_1 < n_1$ ja $0 \leq r_2 < n_2$.

Luvut ovat kongruentit modulo n , jos niiden erotus on jaollinen luvulla n .

Tutkitaan lukujen a ja b erotusta.

$$\begin{aligned} a - b &= nq_1 + r_1 - (nq_2 + r_2) \\ &= nq_1 - nq_2 + r_1 - r_2 \\ &= n(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 \end{aligned}$$

Huomataan, että lukujen a ja b erotus on jaollinen luvulla n , jos ja vain jos $r_1 - r_2 = 0$ eli $r_1 = r_2$.

On todistettu, että luvut a ja b ovat kongruentit modulo n , jos ja vain jos luvuilla a ja b on sama jakojäännös, kun ne jaetaan luvulla n . $\square$

b) Oletetaan, että a , b ja n ovat positiivisia kokonaislukuja ja että $a : n$ jakojäännös on r .

Tällöin

$$a = nq + r$$

missä q on jokin kokonaisluku ja $0 \leq r < n$.

Luvut ovat kongruentit modulo n , jos niiden erotus on jaollinen luvulla n .

Erotus

$$a - r = (nq + r) - r = nq$$

on jaollinen luvulla n .

Siis $a \equiv r \pmod{n}$. $\square$