t. 470, s. 118

Väite: $3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

Todistus induktiolla:

ALKUASKEL Osoitetaan, että väite on tosi, kun $n = 1$.

$$\frac{3}{2}(3^1 - 1) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 = 3^1$$

Väite siis pitää paikkansa, kun $n = 1$.

INDUKTIOASKEL

Induktio-oletus: Oletetaan, että väite on tosi, kun $n = k$ eli

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k = \frac{3}{2}\left(3^k - 1\right).$$

Induktioväite: Osoitetaan (induktio-oletuksen avulla), että väite on tosi, kun $n = k + 1$.

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k + 3^{k+1} = \frac{3}{2}\left(3^k - 1\right) + 3^{k+1}$$

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k + 3^{k+1} = \frac{1}{2}3^{k+1} - \frac{3}{2} + 3^{k+1} = \frac{3}{2}3^{k+1} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(3^{k+1} - 1)$$

Induktioväite on siis tosi. Alkuaskeleen ja induktioaskeleen perusteella alkuperäinen väite on todistettu.

t. 477, s. 119

Väite: $\dfrac{n^3 + 5n}{6} \in \mathbb{Z}$, kun $n \in \mathbb{Z}$ ja $n \geq 1$.

Todistus induktiolla:

ALKUASKEL

Osoitetaan, että väite on tosi, kun $n = 1$.

$$\frac{1^3 + 5 \cdot 1}{6} = 1 \in \mathbb{Z}$$

Väite siis pitää paikkansa, kun $n = 1$.

INDUKTIOASKEL

Induktio-oletus: Oletetaan, että väite on tosi, kun $n = k$ eli $\dfrac{k^3 + 5k}{6} \in \mathbb{Z}$.

Siis $k^3 + 5k$ on jaollinen kuudella.

Induktioväite: Osoitetaan (induktio-oletuksen avulla), että väite on tosi, kun $n = k + 1$.

Riittää todistaa, että uusi osoittaja on jaollinen kuudella.

$$(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5$$

$$= \underbrace{k^3 + 5k}_{\text{Jaollinen kuudella induktio-oletuksen perusteella.}} + 3k^2 + 3k + \underbrace{6}_{\text{Selvästi jaollinen kuudella.}}$$

Kerrotaan sulut auki, jotta induktio-oletusta voidaan hyödyntää.

Binomin kuution voi laskea termeittäin kertomalla tai nopeammin Pascalin kolmion (tai kokeen B-osassa CAS-laskennan) avulla.

Täytyy vielä osoittaa, että $3k^2 + 3k$ on jaollinen kuudella.

$$3k^2 + 3k = 3k(k + 1)$$

Lausekkeessa on tekijänä 3, joten se on jaollinen kolmella.

Lisäksi lausekkeessa on tekijänä kaksi peräkkäistä kokonaislukua k ja $k + 1$, joten toinen niistä on välttämättä jaollinen kahdella.

Koska lauseke on siis jaollinen sekä kahdella, että kolmella, on se myös jaollinen kuudella. Tämä todistaa induktioväitteen.

Alkuaskeleen ja induktioaskeleen perusteella alkuperäinen väite on todistettu.