

Tuntisuunnitelma

Tunnin teema: Raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta

Oppimistavoitteet:

- Kehittää käsitteiden hallintaa raja-arvojen, jatkuvuuden ja derivaatan alueilta.
- Madaltaa kynnystä tarttua vaikeankin näköisiin tehtäviin etenemällä pala palalta.

Tunnin aloitus:

- Ole tarkka derivaattatarkasteluissa: Jos derivaatan arvot ovat esimerkiksi positiivisia, mitä se tarkoittaa alkuperäiselle funktiolle (joskus joudutaan myös tarkastelemaan useita derivaattoja eli derivoimaan derivaattafunktioita)?
- Lue tehtävänannot huolella, pohdi niistä löytyvät käsitteet läpi ja lähde ratkomaan tehtävä pala palalta!
- Derivaattakaavoja löytyy MAOL-digitaulukoista.

Yleisiä havaintoja teeman tehtävistä:

- Aihe on yleisesti vaikea, varsinkin kun käsitellään yo-kokeen loppupään tehtäviä (haastetta jopa meille tunnin pitäjille).
- Haasteena toinen ja kolmas derivaatta sekä käsitteiden muistaminen.
- Tärkeää esim. derivaattalaskujen jälkeen kertoa sanallisesti, mitä laskuista voidaan päätellä.

Oppitunnin sisältö:

Palautelomake tunnin lopussa!

Tehtävä 1 (S22/9):

9. Neljännen asteen polynomiperhe 12 p.

Tarkastellaan polynomia $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$, kun $a > 0$ ja $x \in \mathbf{R}$.

1. Osoita, että derivaatta f' on aidosti kasvava funktio. (4 p.)
 2. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = 0$ on korkeintaan kaksi erisuurta reaaliuurta. (8 p.)
- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Hyvästä yritetystä ideastakin saa jo pisteitä

- Tarkkuus siinä, että mitä pitää osoittaa ("aidosti kasvava", "korkeintaan kaksi" ym.)
- Kohta 1: Pitää määrittää funktion f toinen derivaatta ja tarkastella sen merkkiä!
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP ja LHVP)
 - Kohta 2: Vaatii hyvät perustelut joukkojen avulla, pelkkä toteaminen ei riitä
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Ei varsinaisesti (esim. kohdassa 2 derivaattafunktion nollakohtien lukumäärän perustelua voi suorittaa eri näkökulmista, mutta menetelmä on pääpiirteissään sama).
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - Voi käyttää laskimen solvea, mutta pitää olla hyvät kuvat ja perustelut.
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Lähtee osoittamaan funktion f kasvavuutta eikä derivaattafunktion.
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Kohta 1: Ohjata tarkastelemaan toista derivaattaa. Mitä tarkoittaa, että derivaatta on aidosti kasvava? Miten tämä liittyy funktion toiseen derivaattaan? Mitä tekisitte, jos kirjainten sijaan olisi konkreettisia lukuja?
 - Kohta 2: Mitä tiedetään kohdan 1 perusteella ja miksi? Miten tästä seuraa osoitettava väitä?

Tehtävä 2 (S24/13; tehtävä vaatii syventävän kurssin MAA12 tietoja, joten jos tuntuu kovin vaikealta, voi siirtyä seuraavaan tehtävään):

13. Epäjatkuva funktio (12 p.)

Olkoon $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{kun } x \leq 1, \\ x^2 + x - 2, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Jalmari on osoittanut seuraavalla tavalla, että $f'(1) = 3$.

Lasketaan funktion f erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot kohdassa $x = 1$. Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 5 - (3 \cdot 1 - 5)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$$

ja

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2 - (1^2 + 1 - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3. \end{aligned}$$

Koska erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret ja niiden yhteinen arvo on 3, niin funktio f on derivoituva kohdassa $x = 1$ ja $f'(1) = 3$.

1. Osoita, että f ei ole jatkuva kohdassa $x = 1$. Miksi tämä on ristiriidassa Jalmarin tuloksen kanssa? Minkä virheen Jalmari tekee todistuksessaan? (6 p.)
2. Osoita, että f on monotoninen joukossa $\mathbf{R}$. (6 p.)

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Kohta 2: Muista tarkastella kaikki mahdolliset tapaukset ($x < 1$, $x > 1$ ja $x = 1$) ja koota päättelyn yhteen.
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
 - Hyvät perustelut kaikelle sille, mitä kysytään!
- onko erilaisia ratkaisutapoja?
 - Ei juurikaan ole.
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - Kuvaajan voi piirtää oman hahmottamisen tukemiseksi, mutta kuvaajasta päättelämällä ei saa pisteitä!
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Kohta 1: Laskettu vain yksi raja-arvo eikä esim. verrattu sitä funktion arvoon.
 - Kohta 2: $x = 1$ unohdettu tarkastella.
 - Laskettu lausekkeen $x^2 + x - 2$ arvo raja-arvon sijaan.
 - Nojaa kuvaajaan ilman muita perusteluja.
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Kohta 1: Miten jatkuvuus ja derivoituvuus liittyvät toisiinsa? Miten epäjatkuvuus osoitetaan?
 - Kohta 2: Mitä monotonisuus tarkoittaa? Mistä voidaan päätellä, että funktio on monotoninen/kasvava?

Lisätehtävä 1 (K24/13):

13. Raja-arvo 12 p.

Ohjelmiston mukaan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Perustele tämä tulos seuraavien välivaiheiden avulla.

[i] Osoita, että $x - \sin x - \frac{1}{6}x^3 \leq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$.

[ii] Osoita, että $x - \sin x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \geq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$.

[iii] Osoita, että $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \leq x - \sin x \leq \frac{1}{6}x^3$, kun $0 \leq x \leq 1$.

[iv] Osoita, että $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 \geq x - \sin x \geq \frac{1}{6}x^3$, kun $-1 \leq x \leq 0$.

[v] Perustele näiden epäyhtälöiden avulla, että raja-arvo on $\frac{1}{6}$.

Välivaiheita voi perustella toisistaan riippumattomasti. Esimerkiksi vaiheen [iv] osapisteet saa osoittamalla, että se seuraa vaiheesta [iii], riippumatta siitä, onko vaihe [iii] todistettu. Sama pätee muihinkin vaiheisiin.

- mitä pitää ottaa ratkaisemisessa huomioon
 - Välivaihteita voi perustella toisista riippumatta (kannattaa hyödyntää edellisiä kohtia)!
- minkälaisia ja kuinka tarkkoja perusteluja vaaditaan (ks. HVP)
 - Laskennalliset perustelut, joista täytyy johtaa sanalliset johtopäätökset.
- onko erilaisia ratkaisutapoja
 - Suppiloperiaate, sarjakehitelmä
- onko jostain ohjelmistosta hyötyä
 - Ei juurikaan.
- tavallisimpia virheitä ja vaaranpaikkoja
 - Merkkivirheet pitkissä lausekkeissa
 - Kohdassa [v] ei muisteta tutkia sekä ylä- että alarajaa.
- miten tehtäviä voisi tunnilla neuvoa
 - Kohdissa [i] ja [ii] ohjataan moninkertaiseen derivaatan käyttöön, koska se ei välttämättä ole itsestäänselvää.
 - Kohdassa [iii] ohjataan yhdistämään kahden edellisen kohdan tulokset.
 - Kohdassa [iv] ohjataan parittoman funktion ideaan.
 - Kohdassa [v] ohjataan jakamaan termillä x^3 (miksi näin voidaan tehdä eli miksei termin x^3 arvo ole 0).