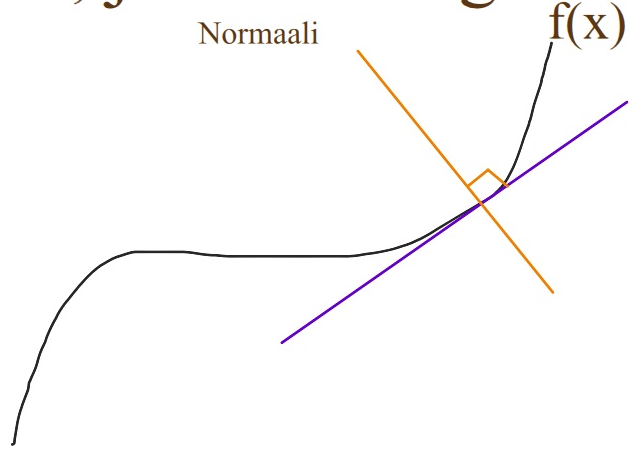
Tunnin alkuun sinulle sopivia tehtäviä kappaleesta 6

tai

siirry jo kappaleeseen 7
(Tangentin ja normaalin yhtälö)

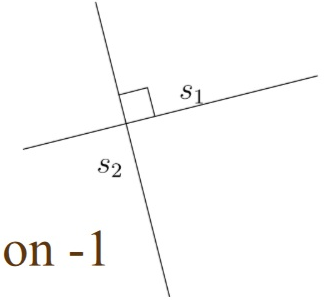
Tangentti ja normaali derivaatan avulla

Tangentti on suora, joka sivuaa ja normaali taas suora, joka on tangentille kohtisuora.



MAFY

Kohtisuoruusehto



$s_1 \perp s_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$ tai suorat x- ja y-akselien suuntaiset

Kohtisuorat, jos kulmakertoimien tulo on -1

Tällä kurssilla ollaan opittu, että tangentin kulmakerroin on sama asia kuin derivaatta. Tällöin normaalin kulmakerroin on

$$k_T \cdot k_N = -1$$

$$-> \; k_N = -\frac{1}{k_T}$$

$$k_T = f'(x)$$

$$-> \; k_N = -\frac{1}{f'(x)}$$

Esim. Määritä paraabelille $y = -2x^2 + 3x + 5$ kohtaan x=-3 piirretyn normaalin yhtälö.

Haetaan MAFY:stä lauseke suoran yhtälölle (4. kurssi)

$y - y_0 = k(x - x_0)$, eli tarvitaan yksi koordinaatiston piste ja kulmakerroin.

Tiedetään, että $x_0 = -3$ sitä vastaava y-arvo saadaan sijoittamalla paraabelin yhtälöön

$y_0 = -2 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 5 = -18 - 9 + 5 = -22$

Normaalin kulmakerroin

$k_N = -\frac{1}{f'(-3)} = -\frac{1}{15}$

$f(x) = -2x^2 + 3x + 5$

$f'(x) = -4x + 3$

$f'(-3) = -4 \cdot (-3) + 3 = 15$

Normaalin yhtälö

$y - (-22) = -\frac{1}{15}(x - (-3))$

$y + 22 = -\frac{1}{15}(x + 3)$

$y + 22 = -\frac{1}{15}x - \frac{1}{5}$

$y = -\frac{1}{15}x - 22\frac{1}{5}$

MAFY:ssä myös valmis kaava

Käyrälle $y = f(x)$ kohtaan x_0 piirretyn normaalin yhtälö, kun $f'(x_0) \neq 0$:

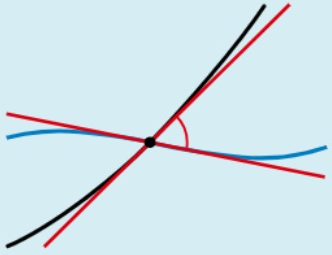
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

7.4 Laske asteen tarkkuudella kulma, jossa käyrät $y = x^2 - 2$ ja $y = x^2 - 8x + 16$ leikkaavat toisensa.

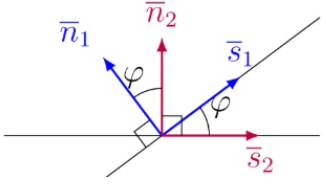
MÄÄRITELMÄ

Käyrien välinen kulma

Kahden käyrän välinen kulma käyrien leikkauspisteessä on kyseiseen pisteeseen piirrettyjen tangenttien välinen kulma.



Suorien välinen kulma



$\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$$

1) Selvitetään leikkauspiste (yhtälöpari)
2) Selvitetään tangenttien kulmakertoimet derivaatan avulla
3) Lasketaan kulma viereisen kaavan avulla

Leikkauspiste:

y=y

$$x^2 - 2 = x^2 - 8x + 16$$

$$-2 = -8x + 16$$

$$8x = 18$$

$$x = \frac{9}{4}$$

Tangenttien kulmakertoimet

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'\left(\frac{9}{4}\right) = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

$$g(x) = x^2 - 8x + 16$$

$$g'(x) = 2x - 8$$

$$g'\left(\frac{9}{4}\right) = 2 \cdot \frac{9}{4} - 8 = -\frac{7}{2}$$

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{\frac{9}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right)}{1 + \frac{9}{2} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)}\right| = \left|\frac{8}{-\frac{59}{4}}\right| = \left|-\frac{32}{59}\right| = \frac{32}{59}$$

$$-> \ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{32}{59}\right) \approx 28{,}5^\circ$$

Kokeile jotain kappaleen 7 sinulle sopivaa tehtävää ja oikein hyvää syyslomaa!