Determinantti

- Determinantti on $n \times n$ –matriiseihin liittyvä funktio, jolla on hyödyllisiä ominaisuuksia.
- Vektorilaskennassa käytetään apuna kolmirivisiä ja kaksirivisiä determinantteja.
- Kaksirivinen determinantti voidaan laskea seuraavalla tavalla

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- Kolmirivinen determinantti voidaan laskea kaksirivisten determinanttien avulla:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge)$$

Nämä laskusäännöt löytyvät myös taulukkokirjasta.

Kaksiriviset determinantit saadaan jättämällä pois kertoimia (a, b tai c) vastaavat vaaka- ja pystyrivit.

- Kolmirivinen determinantti voidaan laskea myös seuraavalla tavalla (Sarrus’n sääntö) lisäämällä determinantin oikealle puolelle kaksi vasemmanpuoleista saraketta

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{|ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

$$\begin{array}{ccccc} - & - & - & & \\ \end{array}$$

TI-Nspire:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) \qquad a\cdot(e\cdot i-f\cdot h)-b\cdot(d\cdot i-f\cdot g)+c\cdot(d\cdot h-e\cdot g)$$

$$\text{expand}(a\cdot(e\cdot i-f\cdot h)-b\cdot(d\cdot i-f\cdot g)+c\cdot(d\cdot h-e\cdot g)) \qquad a\cdot e\cdot i-a\cdot f\cdot h-b\cdot d\cdot i+b\cdot f\cdot g+c\cdot d\cdot h-c\cdot e\cdot g$$

Ristitulo

- Vektoreille on määritelty pistetulon (eli skalaarituIon) lisäksi *ristitulo*, jonka tulos on skalaarin (reaaliluvun) sijasta vektori. Ristituloa kutsutaankin myös vektorituloksi.
- Vektorien $\bar{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ ja $\bar{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$ ristitulo $\bar{a} \times \bar{b}$ saadaan laskemalla *determinantti*

$$\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

- Toisin sanoen $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{\imath} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{\jmath} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$.

Ristitulon ominaisuuksia

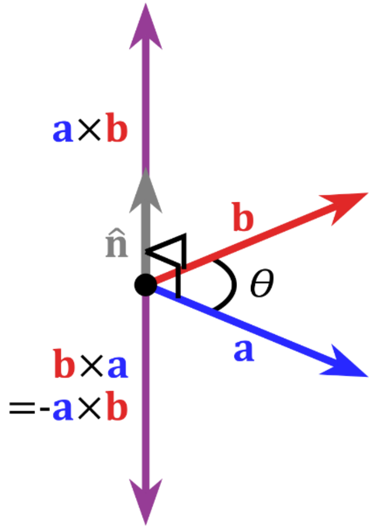
- Tässä $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ovat kolmiulotteisen avaruuden vektoreita.
- Ristitulo ei ole vaihdannainen:
$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$$
- Osittelulait ovat voimassa:
$$\bar{a} \times \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} \text{ ja } (\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$$
- Vakiokerrointa $t \in \mathbb{R}$ voidaan siirtää:
$$(t\bar{a}) \times \bar{b} = t\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = \bar{a} \times \left(t\bar{b}\right),$$
- Vektorit $\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}$ ovat yhdensuuntaisia täsmälleen silloin, kun niiden ristitulo on nollavektori (ks. oppikirja s. 92):
$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$$
- Erityistapauksena edellisestä $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$

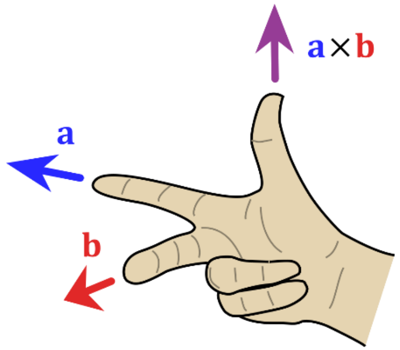
Ristitulon geometrisia ominaisuuksia

- Ristitulovektori $\bar{a} \times \bar{b}$ on kohtisuorassa vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ määrittämää tasoa vastaan (vektorit määrittävät eli virittävät tason, jos ne eivät ole yhdensuuntaisia)
- Ristitulovektorin suunta saadaan oikean käden säännöllä (vrt. oppikirjan versio s. 90)
- Ristitulovektorin pituus riippuu vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ pituuksien lisäksi vektorien välisen kulman sinistä:

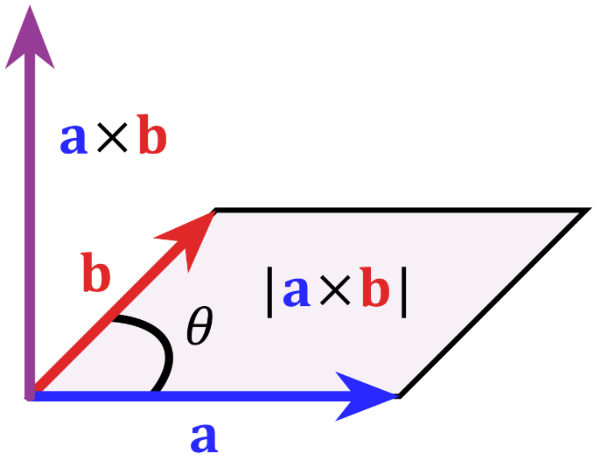
$$\bar{a} \times \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\bar{a}, \bar{b})\, \bar{n},$$

missä $\bar{n}$ on oikean käden säännön mukaan suunnattu vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ normaalivektori.



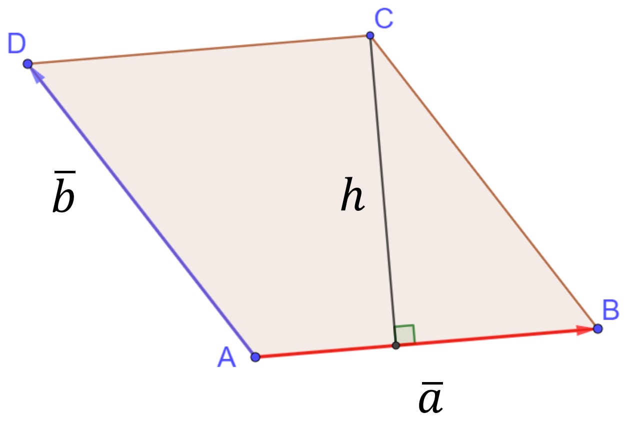


- Edellisestä tuloksesta seuraa (ks. oppikirja s. 91), että vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ virittämän suunnikkaan pinta-ala on $|\bar{a} \times \bar{b}|$



Esim. t. 336, s. 94

Lasketaan ensin suunnikkaan pinta-ala A ristitulon avulla.
Sivun AB vastainen korkeus h saadaan jakamalla suunnikkaan pinta-ala sivun AB pituudella.



$$\bar{a} = \overline{AB} = \begin{bmatrix} 2-(-4) \\ 1-(-5) \\ 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \overline{BC} = \overline{AD} = \begin{bmatrix} -1-2 \\ 5-1 \\ 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 6 & 6 & -3 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{\imath}(6 \cdot 3 - 4 \cdot (-3)) - \bar{\jmath}(6 \cdot 3 - (-3) \cdot (-3)) + \bar{k}(6 \cdot 4 - (-3) \cdot 6)$$

$$= 30\bar{\imath} - 9\bar{\jmath} + 42\bar{k}$$

Suunnikkaan pinta-ala on $A = |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{30^2 + (-9)^2 + (42)^2} = \sqrt{2745} = 3\sqrt{305}$.

Sivun AB pituus on $|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + (-3)^2} = 9$

Kysytty korkeus on $h = \dfrac{A}{|\overline{AB}|} = \dfrac{3\sqrt{305}}{9} = \dfrac{\sqrt{305}}{3}$.

TI-Nspire:

$a:=\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$
$b:=\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\mathrm{crossP}(a,b)$	$\begin{bmatrix} 30 \\ -9 \\ 42 \end{bmatrix}$
$\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix} 30 \\ -9 \\ 42 \end{bmatrix}\right)$	$3\cdot\sqrt{305}$
$\dfrac{3\cdot\sqrt{305}}{\mathrm{norm}(a)}$	$\dfrac{\sqrt{305}}{3}$