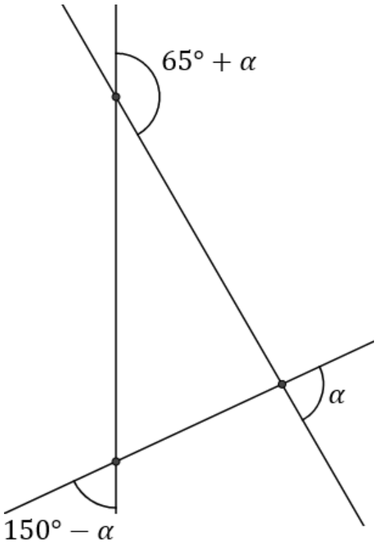
MAA3 Geometria MALLIVASTAUKSIA

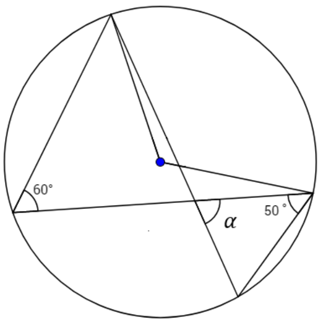
1. Ratkaise kulman α suuruus.



a)
Ratkaisu:
Kulman α ristikulma, kulman $150° - \alpha$ ristikulma ja kulman $65° + \alpha$ vieruskulma muodostavat kolmion kulmat. Eli $\alpha + (150° - \alpha) + 180° - (65° + \alpha) = 180°$

$$\alpha + 150° - \alpha + 180° - 65° - \alpha = 180° \quad || -180°$$
$$-\alpha + 85° = 0$$
$$\alpha = 85°$$

Vastaus: $\alpha = 85°$



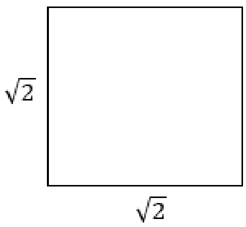
b) Ratkaisu: Kysytty kulma on kolmion yksi kulma. Kolmion muut kulmat ovat $50°$ ja $60°$ eli samaa kaarta vastaava kehäkulma, kuin kulma $60°$. Täten $\alpha = 180° - 50° - 60° = 70°$

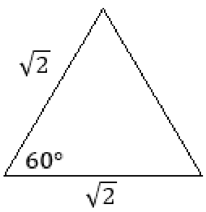
Vastaus: $\alpha = 70°$

2. Neliön ja tasasivuisen kolmion sivun pituudet ovat samat. Neliön pinta-ala on 2. Ratkaise kolmion pinta-alan tarkka arvo.

Ratkaisu: Neliön pinta-alan ollessa 2, on sen sivun pituus ja samalla kolmion sivun pituus oltava $\sqrt{2}$. Tasasivuisen kolmion kaikki kulma ovat $60°$, joten kolmion pinta-ala on

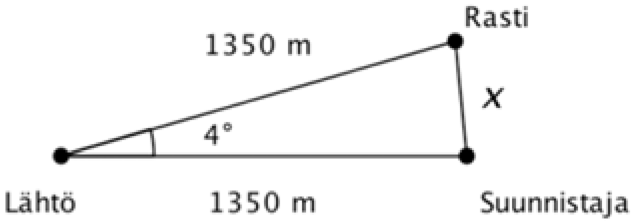
$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\sqrt{2} \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$





Vastaus: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.



Lasketaan suunnistajan ja rastin välinen etäisyys x kosinilauseen avulla.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$x^2 = 1350^2 + 1350^2 - 2 \cdot 1350 \cdot 1350 \cdot \cos 4°$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

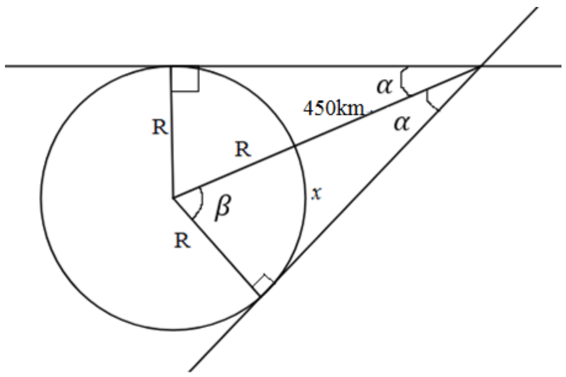
$x = -94,22...$ tai $x = 94,22...$ **(tai ratkaistaan ottamalla neliöjuuri molemmilta puolilta)**

Etäisyys on positiivinen luku, joten $x = 94,22..$ m ≈ 94 m.

Suunnistaja on 94 metrin päässä rastista.

4. Maapallon ympärysmitta on 40 000km. Satelliitti on 450 km korkeudella maanpinnasta.
a) Missä kulmassa maapallo näkyy satelliitista?
b) Voidaanko satelliitista teoriassa nähdä yhtä aikaa Helsinki ja Lissabon, kun kaupunkien etäisyys toisistaan linnuntietä on 3365km?

Ratkaisu: a) Näkökulma on satelliitilta maapallolle piirrettyjen tangenttien välinen kulma.



Lasketaan ensin maapallon säde ja sitten kysytty kulma.

$$2\pi R = 40000$$
$$R = \frac{40000}{2\pi}$$
$$\sin\alpha = \frac{R}{R+450}$$
$$\sin\alpha = \frac{\frac{40000}{2\pi}}{\frac{40000}{2\pi}+450}$$
$$\alpha = 69{,}0641\ldots°$$
$$2\alpha = 138{,}128\ldots°$$
$$2\alpha \approx 138°$$

b) Lasketaan kaarta *x* vastaavan keskuskulman suuruus β

$$\cos\beta = \frac{\frac{40000}{2\pi}}{\frac{40000}{2\pi}+450}$$
$$\beta = 20{,}9358\ldots°$$
$$\beta \approx 20{,}936°$$

Lasketaan kaaren pituus *x* ja sitten koko satelliitin näkyvyysalueen kaaren pituus *2x*

$$x = \frac{20{,}936°}{360°}\cdot 40\,000km$$
$$x = 2326{,}222\ldots km$$

$2x = 4652{,}444\ldots km > 3365km$ eli voidaan nähdä

Vastaus: a) 138° b) Voidaan nähdä

5. a) Ympyrän ja neliön pinta-alat ovat yhtä suuret. Mikä on ympyrän säteen suhde neliön sivun pituuteen.
b) Ympyrän säde ja neliön sivun pituus ovat yhtä suuret. Mikä on niiden pinta-alojen suhde?
Ratkaisu:
a) Olkoon ympyrän säde *r* ja neliön sivu *x*. Tällöin $\pi r^2 = x^2$

$$\frac{r^2}{x^2} = \frac{1}{\pi}$$

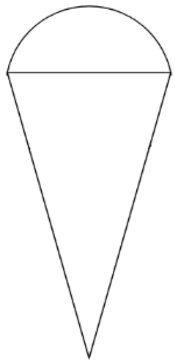
$$\frac{r}{x} = \pm\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$$\frac{r}{x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \; (ei\ voi\ olla\ negatiivinen)$$

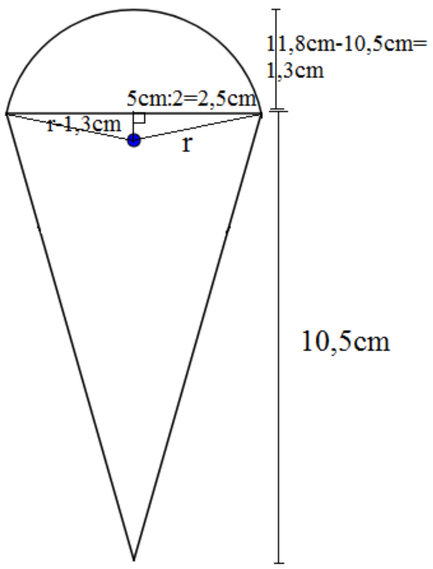
b) Olkoon ympyrän säde *r* ja neliön sivu myös *r*.
Pinta-alojen suhde on nyt $\frac{\pi r^2}{r^2} = \frac{\pi}{1} = \pi$

Vastaus: a) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ b) π

6. Jäätelötuutti on suoran ympyräkartion ja sen päällä olevan pallosegmentin muotoinen kappale täynnä jäätelöä. Tuutin kokonaiskorkeus on 11,8cm, kartion korkeus 10,5cm ja kartion pohjaympyrän halkaisija 5,0cm. Kuinka monta desilitraa tuutissa on jäätelöä?



Ratkaisu:



Ratkaistaan pallosegmentin säde *r* Pythagoraan lauseella

$$r^2 = 2{,}5^2 + (r - 1{,}3)^2$$
$$r^2 = 2{,}5^2 + r^2 - 2{,}6r + 1{,}69$$
$$2{,}6r = 2{,}5^2 + 1{,}69$$
$$r = \frac{7{,}94}{2{,}6}$$

Lasketaan sitten pallosegmentin ja ympyräkartion tilavuudet ja lasketaan yhteen:

$$V_{pallosegmentti} = \pi \cdot 1{,}3^2\left(\frac{7{,}94}{2{,}6} - \frac{1{,}3}{3}\right) = 13{,}9130 \ldots$$
$$\approx 13{,}913$$
$$V_{ympyräkartio} = \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 10{,}5 = 68{,}7223 \ldots \approx 68{,}72$$

Eli kokonaistilavuus on $13{,}913cm^3 + 68{,}72cm^3 = 82{,}633cm^3 \approx 83cm^3 = 0{,}083dm^3$
$$= 0{,}083l = 0{,}83dl$$

*Vastaus:*0,83