

NIMI:

KOEAIKA 2 h 40 min. VASTAA MONIVALINTAAN (TEHTÄVÄ 1), TEHTÄVÄÄN 2 (PAPERILLE) JA KOLMEEN TEHTÄVÄÄN TEHTÄVISTÄ 3-7.

→ SIIS YHTEENSÄ VIITEEN TEHTÄVÄÄN SAA VASTATA!

AINEISTOT-OSION TAULUKKOTIETOJA SAA KÄYTTÄÄ. (1.-kurssin asioita löytynee sivuilta 8 -20.)

LASKINOHJELMISTOJA SAA (PITÄÄ) KÄYTTÄÄ, MUTTA MUISTA PERUSTELLA NIIN PYYDETÄESSÄ! (Muutama TI-komento löytyy aineistosta.)

1. MONIVALINTA

1.1 Mikä väittämä on oikein?

- ☐ $\sqrt{5} \in \mathbb{Z}_+$ ☒ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{N}$ ☐ $\sqrt{5} \notin \mathbb{R}$ ☐ $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$

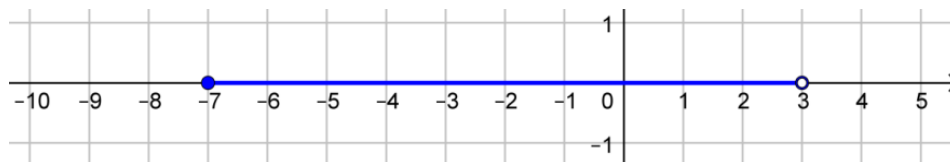
1.5 Kun lukujono on annettu muodossa

$$(c_n) = \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = -4 \\ c_n = 2 \cdot c_{n-1} + 2 \cdot c_{n-2}^2, & n \geq 3 \end{cases}$$

niin lukujono on määritelty

- ☐ aritmeettisesti ☒ rekursiivisesti ☐ liitännäisesti
☐ geometrisesti ☐ monotonisesti

1.3 Valitse oikea merkintä kuvassa näkyvälle välille.



- ☐ $] -7, 3[$ ☐ $-7 \leq x \leq 3$ ☐ $-7 \leq x < 3$ ☒ $[-7, 3[$

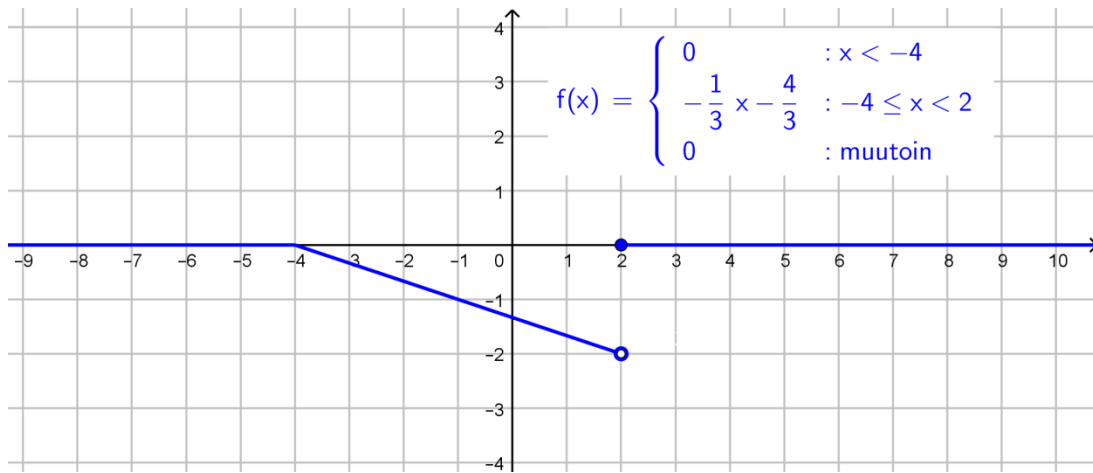
1.4 Tarkoitakoon symboli $\odot$ jotain positiivista kokonaislukua väliltä $[1, 8]$. Laske ja valitse mielestäsi oikea tulos

$$\frac{(-2 \cdot \odot)^2}{4} - \odot^2 - \frac{2}{\odot^2}$$

(Ehkä kannattaa laskea ensin jollakin välillä $[1, 8]$ luvulla.)

- ☐ $-\odot^2$ ☒ $-\frac{2}{\odot^2}$ ☐ $-\frac{3 \cdot \odot^2}{4}$ ☐ $2 \cdot \odot$

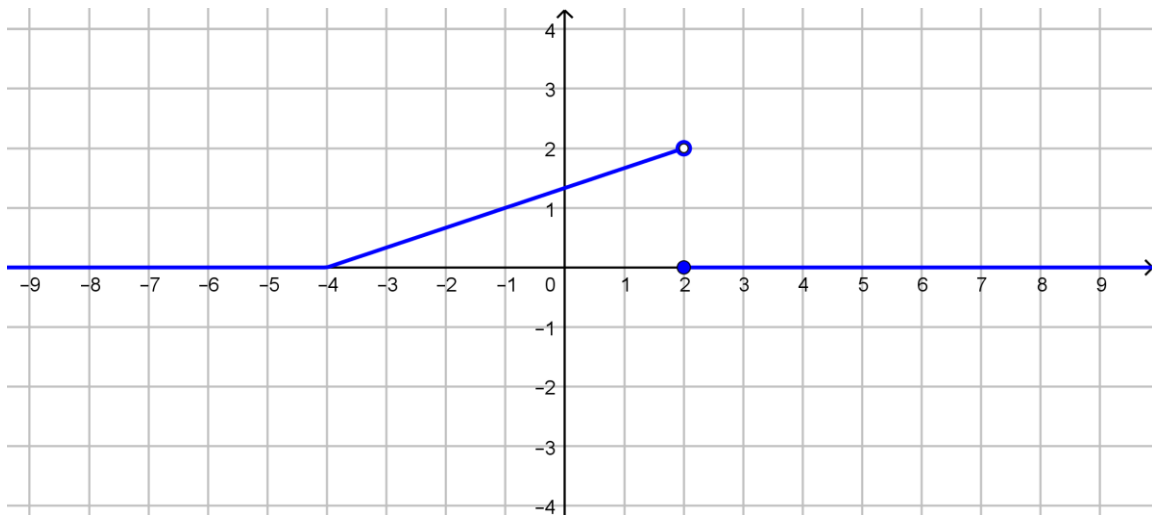
1.5 Annettuna on funktion f kuvaaja (alla).



Mitä funktiolle

$$f: f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < -4 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}, & \text{kun } -4 \leq x < 2 \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases}$$

on tehty kun kuvaaja näyttää seuraavalta?



- ☐ funktion arvo on saatu kertomalla x miinus kahdella, eli $f_{\text{uusi}}(x) = f(-2 \cdot x)$
- ☐ funktion arvo on saatu summaamalla vanha arvo kahdesti, eli $f_{\text{uusi}}(x) = f(x) + f(x)$
- ☒ funktion arvo on kerrottu -1 :llä, eli $f_{\text{uusi}}(x) = -f(x)$
- ☐ funktion arvo on summattu neljällä, eli $f_{\text{uusi}}(x) = f(x) + 4$

1.6 Laske ja valitse oikea tulos

$$\log_4 16 + \log_2 2^3 - \log_a a$$

missä $a \in \mathbb{Z}_+$ ja $a \neq 1$. Palauta mieliin logaritmien laskusäännöt.

- ☒ 4
- ☐ 3
- ☐ 5
- ☐ $a + 4$
- ☐ $24 + a$

1.7 Merkintä

$$\sum_{k=2}^6 (k + 6^2)$$

tarkoittaa

- ☐ $(k + 6^2) + (k + 6^2) + (k + 6^2) + (k + 6^2) + (k + 6^2)$
- ☐ $8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2$
- ☒ $(2 + 6^2) + (3 + 6^2) + \dots + (k + 6^2)$
- ☐ $(2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 6^2$

1.8 Mikä vaihtoehto on oikein, kun tiedetään lukujonon (a_n) differenssin olevan -3 .

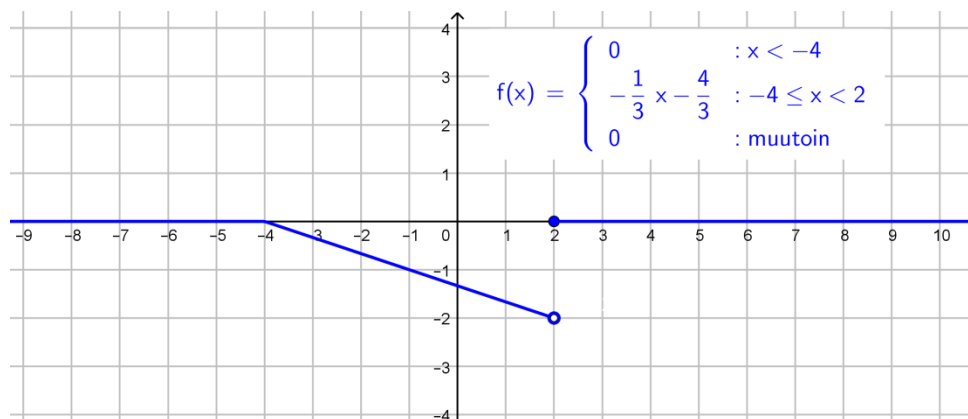
- ☐ Jonon jäsen saadaan kertomalla edellinen jäsen -3 :lla.
- ☐ Jonon 1. jäsen on 3 ja 2. jäsen 6.
- ☒ Jonon 5. jäsen 8 ja 7. jäsen 2.
- ☐ Jonon kolmen peräkkäisen jäsenen summa on aina -6 .

1.9 Aukaise Aineistot-osiosta tiedosto *teht1_moniv_9.ggb* ja valitse oikea vaihtoehto seuraavaan kysymykseen.

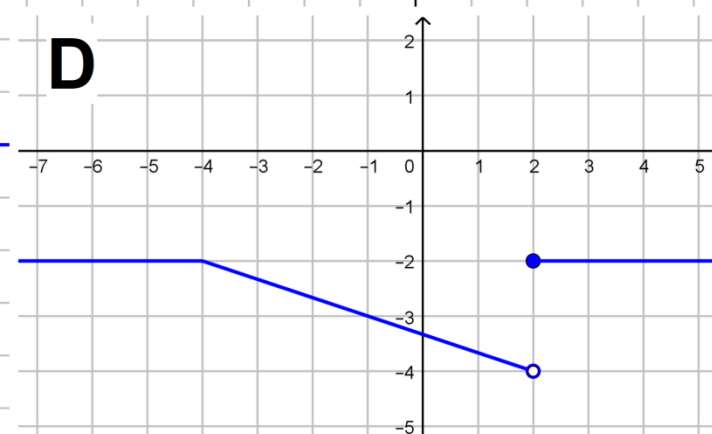
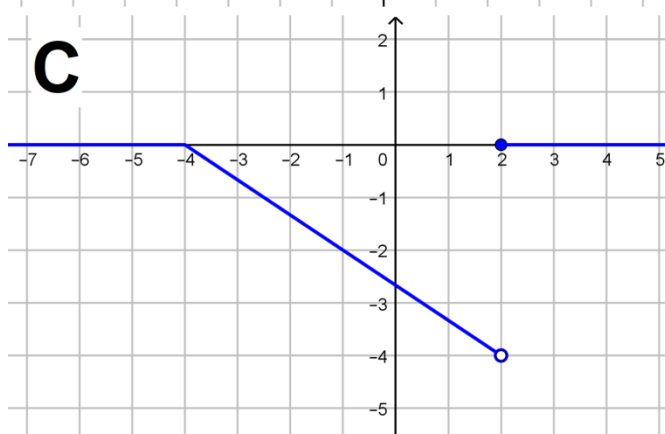
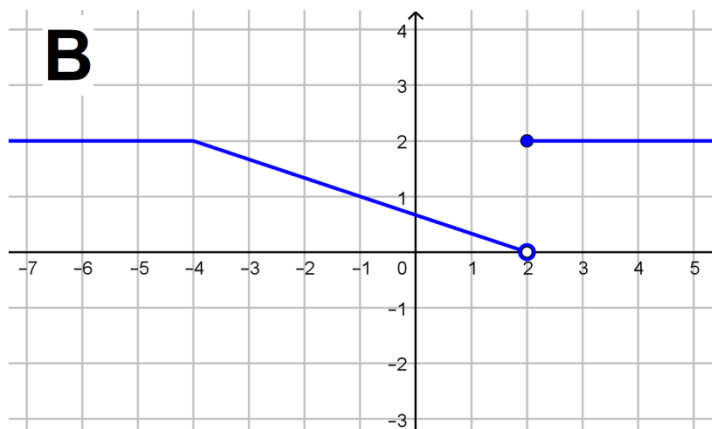
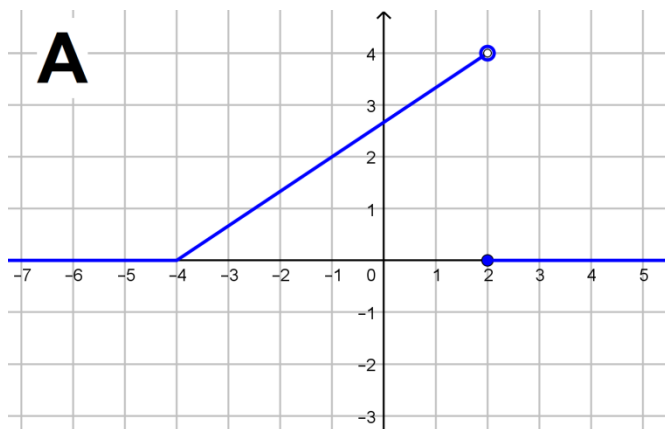
Millä parametrin p arvolla, funktiolla f on nollakohta ykkösessä?

- ☐ $p = -3$
- ☒ $p = -1$
- ☐ $p = 0$
- ☐ $p = 1$

1.10 Annettuna on funktion f kuvaaja (alla).



Valitse oikea kuvaaja A-D funktiolle $g: g(x) = -2 + f(x)$.



☐ A

☐ B

☐ C

☒ D

1.11 Luku kasvaa ensin 15 % ja sitten pienenee 15 %. Kuinka monta prosenttia näin saatu luku on alkuperäisestä?

☐ noin 102 %

☐ 85 %

☐ 115 %

☐ 100 %

☒ noin 98 %

1.12 Millä x :n ($x \neq 0$) arvo(i)lla lukujono

$2, x, 3, \dots$

on geometrinen?

☐ $x = 2, 5$

☒ $x = \pm\sqrt{6}$

☐ $x = \sqrt{6}$

☐ Ei millään x :n arvolla.

☐ $x = \pm\frac{3}{2}$

2. Tämä tehtävä vastataan paperille! Mutta saat käyttää ohjelmistoja!

a) Olkoon funktio $f: f(x) = 9 - x^2$.

i) Määritä funktion f nollakohta(-dat).

ii) Millä x :n arvo(i)lla $f(x) = 5$?

iii) Onko piste $(-7, -58)$ funktion f kuvaajalla? Perustele hyvin, pelkkä kuva ei riitä.

iv) Määritä funktion arvojoukko $\mathcal{A}_f$, kun $x \in]-4, -2]$.

i) Eli, millä muuttujan x arvolla funktion arvo $f(x)$ on nolla. Siis

$$9 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 3.$$

TAI solve($9 - x^2 = 0, x$)

ii) Eli, millä muuttujan x arvolla funktion arvo $f(x)$ on viisi. Siis

$$9 - x^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2.$$

TAI solve($9 - x^2 = 5, x$)

iii) Eli, onko muuttujan x arvolla -7 funktion arvo -58 . Saadaan

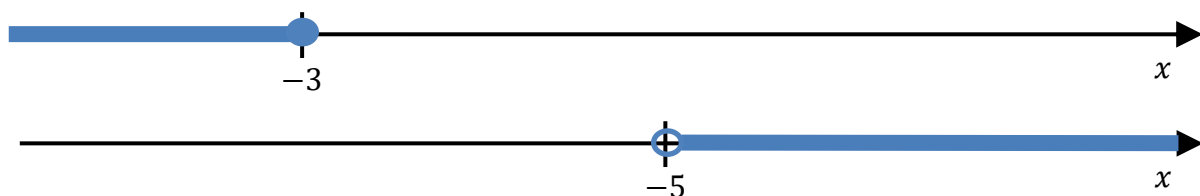
$$f(-7) = 9 - (-7)^2 = 9 - 49 = -40.$$

Siis, ei ole.

iv) Koska $f(-4) = 9 - (-4)^2 = -7$ ja $f(-2) = 9 - (-2)^2 = 5$, niin $\mathcal{A}_f =]-7, 5]$ koska funktio f on jatkuva ja ns. monotoninen ko. välillä $\rightarrow$ katso esim. geogebra.

b)

i) Piirrä lukusuora ja havainnollista lukusuoralla lukuvälejä $]-\infty, -3]$ ja $-5 < x$ sekä.



ii) Muuta luku $1,02555 \dots$ murtolukumuotoon. Perustele välivaiheiden avulla.

Merkitään $x = 1,02555 \dots$ Tällöin $100x = 102,555 \dots$ ja $1000x = 1025,555 \dots$, joten saadaan

$$1000x - 100x = 900x$$

$$1025,55 \dots - 102,555 \dots = 923$$

Siis $900x = 923$ eli $x = \frac{923}{900}$.

c) Muodosta lauseke lukujonon 2, 8, 14, 20, ...

i) rekursiiviselle säännölle,

ii) analyyttiselle säännölle.

i) Lukujonon rekursiivinen sääntö (vain kakkosrivi riittää)

$$(a_n): a_1 = 2$$

$$a_n = a_{n-1} + 6, \quad n \geq 2$$

ii) Lukujonon analyyttinen sääntö

$$(a_n): a_n = 2 + (n - 1)6 = 6n - 4$$

3. a) Määritä luvun $\frac{-2}{1-\sqrt{5}}$ vasta- ja käänteisluvut. Perustele. (2p)

b) Laske geometrisen summan

$$3 + 9 + \dots + 531\,441$$

arvo. Perustele ja hyödynnä esim. solveria. (5p)

c) Ratkaise yhtälöt perustellen eli kirjoita välivaiheita. (5p)

i) $\frac{4^3 \cdot 2^x}{2^4} = 2^3$

ii) $3 \cdot 4^x = 63$

a) Luvun $\frac{-2}{1-\sqrt{5}}$ vastaluku on $-\frac{-2}{1-\sqrt{5}} = \frac{2}{1-\sqrt{5}}$ ja käänteisluku $\frac{1}{\frac{-2}{1-\sqrt{5}}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

b) Koska jono on geometrinen niin $q = \frac{9}{3} = 3$. Näin ollen jonon yleinen jäsen on muotoa

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

Etsitään se indeksin n arvo, jolla

$$a_n = 3^n = 531\,441$$

Saadaan (esim. solveria käyttäen) $n = 12$ ja näin ollen summaksi tulee

$$S_{12} = a_1 \cdot \frac{1 - q^{12}}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - 3^{12}}{1 - 3} = 797\,160.$$

c) Ratkaisut

i)

$$\frac{4^3 \cdot 2^x}{2^4} = 2^3$$

$$4^3 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^4$$

$$(2^2)^3 \cdot 2^x = 2^{3+4}$$

$$2^6 \cdot 2^x = 2^7$$

$$2^x = \frac{2^7}{2^6} = 2$$

$$\Rightarrow x = 1$$

ii)

$$3 \cdot 4^x = 63$$

$$4^x = \frac{63}{3}$$

$$\log 4^x = \log 21$$

$$x \cdot \log 4 = \log 21$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 21}{\log 4}$$

4. a) Perustele, miksi $\log_{10} 25\,000 = 4 + \log_{10} 2,5$.

b) Tuotteen ALV on 24 %. Kuinka monta prosenttia tuotteen veroton hinta on pienempi kuin verollinen hinta? Muista, että ALV lisätään aina verottomaan hintaan.

c) Reaalifunktiolle f pätee $f: f(x+2) = 4x - 2x^2 - 7$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Laske/Määritä $f(x-2)$, kun $x \in \mathbb{R}$.

a) Logaritmin laskusääntöjä käyttäen saadaan:

$$\log_{10} 25\,000 = \log_{10}(2,5 \cdot 10^4) = \log_{10} 10^4 + \log_{10} 2,5 = 4 \cdot \underbrace{\log_{10} 10}_{=1} + \log_{10} 2,5 = 4 + \log_{10} 2,5$$

b) Merkitään tuotteen hintaa x :llä. Tällöin verollinen hinta on $1,24x$ ja saadaan

$$\frac{1,24x - x}{1,24x} \cdot 100 \% = 19,354 \dots \% \approx 19,4 \%$$

c) Koska $f(t+2) = 4t - 2t^2 - 7$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, niin saadaan

$$\begin{aligned} f(x-2) &= f\left(\overbrace{(x-4)}^{=:t} + 2\right) = 4(x-4) - 2(x-4)^2 - 7 \\ &= 4x - 16 - 2(x^2 - 8x + 16) - 7 = -2x^2 + 20x - 55 \end{aligned}$$

Voi käyttää TI-ohjelmiston expand-komentoa.

5. a) Lukujonon ensimmäinen termi on 1 ja viides 4. Määritä jonon toinen ja kymmenes termi, kun jono on i) aritmeettinen, ii) geometrinen. Muista perustella! (6p)

b) Päärynämehestä ja omenamehestä tehdyn sekamehun sokeripitoisuus on 11 %. Määritä mehujen sekoitussuhde, kun päärynämehestä sokeripitoisuus on 14 % ja omenamehestä sokeripitoisuus on 7 %. (6p)

a) Koska $a_1 = 1$ ja $a_5 = 4$ ja koska aritmeettiselle jonolle peräkkäisten termien erotus on vakio, siis $d = a_n - a_{n-1} = \text{vakio}$ ja geometriselle jonolle peräkkäisten termien suhde on vakio, siis $q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \text{vakio}$, niin saadaan

$$\text{i) } a_5 = a_1 + 4 \cdot d = 1 + 4 \cdot d = 4$$

$$\Rightarrow 4d = 3$$

$$\Rightarrow d = \frac{3}{4}$$

Siis

$$a_2 = a_1 + d = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$a_{10} = a_1 + 9 \cdot d = 1 + 9 \cdot \frac{3}{4} = \frac{31}{4}$$

$$\text{ii) } a_5 = a_1 \cdot q^4 = 1 \cdot q^4 = 4$$

$$\Rightarrow q^4 = 4$$

$$\Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$$

Siis

$$a_2 = a_1 \cdot q = 1 \cdot \pm\sqrt{2} = \pm\sqrt{2}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 1 \cdot (\pm\sqrt{2})^9 = \pm 4\sqrt{2}$$

Huomaa kaksi vaihtoehtoa!

b) Merkitään omenamehusta määrää x :llä ja päärynämehestä määrää y :llä. Tällöin (tehtävänannon tiedoista saadaan yhtälö)

sokeri alkuperäisissä = sokeri valmiissa

$$y \cdot 0,14 + x \cdot 0,07 = 0,11 \cdot (x + y)$$

$$\Rightarrow 0,03y = 0,04x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{0,04}{0,03} = \frac{4}{3}$$

Vastaus: Päärynämehestä tulee olla 4 osaa ($\frac{4}{7} \approx 57\%$) ja omenamehestä 3 osaa ($\frac{3}{7} \approx 43\%$).

6. Stadionin ylimmällä penkkirivillä on 2 800 paikkaa ja jokaisella rivillä siitä alaspäin on aina 18 paikkaa vähemmän kuin edellisellä rivillä. Kuinka monta penkkiriviä stadionilla on, kun paikkoja on yhteensä 73 892? Kuinka monta istumapaikkaa on alimmalla rivillä? Perustele hyvin.



KUVA:https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f8/Olympiastadion_Helsinki.jpg/250px-Olympiastadion_Helsinki.jpg

Penkkiriveillä olevista istumapaikoista muodostuu aritmeettinen jono

$$a_1 = 2\,800, \quad a_2 = 2\,782, \quad a_3 = 2\,764, \dots$$

missä siis $a_1 = 2\,800$ ja $d = -18$. Näin ollen tämän jonon (a_n) yleinen jäsen, joka kuvaa n :nneksi ylimmällä rivillä olevien istumapaikkojen lukumäärää on

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 2\,800 + (n - 1) \cdot (-18) = 2\,818 - 18n.$$

Huomaa, että indeksi n vastaa penkkiriviä ja lukujonon jäsenen arvo kyseessä olevalla rivillä olevien istumapaikkojen lukumäärää. Eli rivin numero kuvautuu lukujonossa istumapaikkojen lukumääräksi. (Lukujono on siis funktio! $(a_n): \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = 2\,818 - 18n$.)

Näin ollen eri riveillä olevien istumapaikkojen yhteenlaskettu lukumäärä saada aritmeettisesta summasta

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = \sum_{k=1}^n (2\,818 - 18k).$$

Indeksin n ratkaisemiseksi voidaan pitää esim. ratkaista TI-ohjelmistolla yhtälö

$$\sum_{k=1}^n (2\,818 - 18k) = 73\,892 \rightarrow \text{solve}\left(\sum_{k=1}^n (2\,818 - 18k) = 73\,892, n\right)$$

TAI hieman pidemmin: Summaan sijoitetaan $a_1, a_n = 2\,818 - 18n$, eli

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{2\,800 + 2\,818 - 18n}{2} = 73\,892$$

joka sievenee muotoon (expand-komento TI:ssä)

$$n \cdot (2809 - 9n) = 73\,892$$

Tämän ratkaisu: $\rightarrow \text{solve}(n \cdot (2809 - 9n) = 73\,892, n)$. Ratkaisuksi tulee molemmilla tavoilla

$$n = 29 \quad n = 283,111 \dots$$

Indeksi n saa olla vain kokonaisluku, joten vain $n = 29$ hyväksytään. Alimmalla rivillä on istumapaikkoja näin ollen

$$a_{29} = 2\,818 - 18 \cdot 29 = 2\,296$$

Tarkistuksena voit laskea lukujonon (a_n) arvon indeksin arvolla $n = 283$. Mitä huomaat?

TI-84 Plus calculator screen showing two solve commands. The top command is $\text{solve}\left(\sum_{k=1}^n (2818 - 18 \cdot k) = 73892, n\right)$ and the bottom command is $\text{solve}(n \cdot (2809 - 9 \cdot n) = 73892, n)$. Both show the solutions $n=29.$ or $n=283.111111111$.

7. JOKERI (+2p)

Vuonna 2001 erään liikeyrityksen ulkomaille suuntautuvan myynnin arvo kasvoi 10 % vuoteen 2000 verrattuna. Samaan aikaan myynnin arvo kotimaassa väheni 5 %. Tällöin koko myynnin arvo kasvoi 6 %. Laske, kuinka monta prosenttia myynnistä meni vuonna 2000 ulkomaille. [YO K2002/3]

Merkitään a :lla kotimaan myynnin arvoa, b :llä ulkomaan myynnin arvoa ja x :llä koko myynnin arvoa.

Taulukointi antaa

	kotimaa	ulkomaa	yhteensä
2000	a	b	x
2001	$0,95a$	$1,10b$	$1,06x$

Tiedetään, että $a + b = x$ ja toisaalta $0,95a + 1,10b = 1,06x$. Sijoitetaan jälkimmäiseen $x = a + b$, joten

$$0,95a + 1,10b = 1,06a + 1,06b$$

$$-0,11a = -0,04b$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{11}b$$

Eli $x = a + b = \frac{4}{11}b + b = \frac{15}{11}b$, josta ratkaisemalla saadaan b :n arvo x :stä

$$b = \frac{11}{15}x \quad \left(\text{ja } a = \frac{4}{15}x \right)$$

Siis ulkomaan myynnin osuus vuonna 2000 koko myynnistä oli

$$\frac{11}{15} = 73,\overline{3} \approx 73 \text{ \%}.$$