6.4 $f(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

a) f jatk. ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä

$f'(x) = \underbrace{e^{2x}}_{>0} \cdot 2 > 0$ aina $\Rightarrow$ f on aidosti kasvava $\mathbb{R}$:ssä

$\Rightarrow$ käänteisfunktio f^{-1} on olemassa

b) $f(x) = y = e^{2x}$ | ln

$\Leftrightarrow \ln y = \ln e^{2x} \Leftrightarrow \ln y = 2x \mid :2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln y = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln x}$, $x \in M_{f^{-1}} = A_f =]0, \infty[$, $\underline{x > 0}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{2x} = e^{\infty} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$

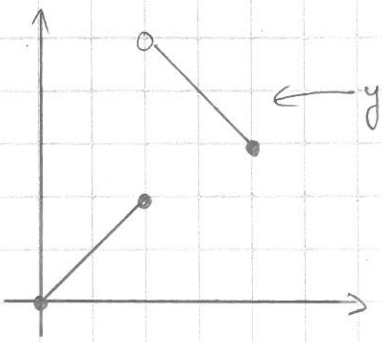
f aidosti kasvava

$\Rightarrow A_f =]0, \infty[$

c) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^{2x}) = \frac{1}{2}\ln e^{2x} = \frac{1}{2}\cdot 2x = x$ ✓

Esim. Voiko funktiolle f olla käänteisfunktio, vaikka f ei ole aidosti monotoninen?

Ratk.



$y = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2 \\ -x+7, & 2 < x \le 4 \end{cases}$

f ei ole aidosti monotoninen mutta se saa jokaisen arvonsa vain yhdellä x:n arvolla $\Rightarrow f^{-1}$ on olemassa

Vast. voi

6.21 $f: I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^{2x-1}$

$I \uparrow M_f$

f jatk. ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä

$D(f\cdot g) = f'g + fg'$

$f'(x) = 1 \cdot e^{2x-1} + x \cdot e^{2x-1} \cdot 2 = \underbrace{e^{2x-1}}_{>0}\underbrace{(1+2x)}_{\substack{- \mid + \\ -\frac{1}{2}}} = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{2x-1}}_{>0} = 0$ tai $1 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ↯

f'	$-$	$+$
f	↘	↗
	$-\frac{1}{2}$ min	

$0 \in I$

I maht. väl. f^{-1} on olemassa

$\underline{I = [-\frac{1}{2}, \infty[}$

b) $f(x) = x e^{2x-1} = y$ ei saada ratkaistua x:ää

$\Rightarrow$ ei saada $f^{-1}(x)$:n lauseketta

f:n ja f^{-1}:n kuvaajat ovat peilikuvia toisillaan suoran $y = x$ suhteen $\Rightarrow$ leikkauspisteet ovat suoralla $y = x$