

3.1

- a) Pienoismallin mittakaava on pienoismallista mitatun pituuden ja suunnitellusta rakennuksesta mitatun vastinpituuden suhde. Määritetään mittakaava.

$$\begin{aligned}\frac{125 \text{ cm}}{85 \text{ m}} &= \frac{125 \cancel{\text{ cm}}}{8500 \cancel{\text{ cm}}} \\ &= \frac{125}{8500} && \text{Supistetaan murtoluku.} \\ &= \frac{1}{68} \\ &= 1 : 68\end{aligned}$$

- b) Merkitään pienoismallin korkeutta kirjaimella x . Kootaan tiedot taulukkoon.

	Pituus	Korkeus
Pienoism. (cm)	125	x
Rakennus (m)	85	15

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned}\frac{125}{85} &= \frac{x}{15} && \text{Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.} \\ &&& \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ x &= 22,05\dots \\ x &\approx 22 \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Pienoismallin korkeus on 22 cm.

Vastaus

- a) 1 : 68
b) 22 cm

3.2

Muunnetaan reitin pituus metreiksi.

$$12,5 \text{ km} = 12\,500 \text{ m}$$

Merkitään kartalta mitattua reitin pituutta kirjaimella x ja kootaan tiedot taulukkoon.

	Reitti	Pelto
Kartalla (cm)	x	2,0
Luonnossa (m)	12500	600

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{12500} = \frac{2,0}{600}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 41,66\dots$$

$$x \approx 42 \text{ (cm)}$$

Reitin pituus kartalla on 42 cm.

Vastaus

42 cm

3.3

- a) Kolmiot ACB ja DCE ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.
- Kulmat BCA ja ECD ovat ristikulmina yhtä suuret.
 - Koska janat AB ja DE ovat yhdensuuntaiset, ovat kulmat A ja D samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan CD pituus x .

$$\frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB}$$

Sivun CD vastinsivu on CA ja
sivun DE vastinsivu on AB .

$$\frac{x}{20} = \frac{28}{16}$$

Kerrotaan ristiin.

$$16x = 560 \quad | :16$$

$$x = 35$$

- b) Kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.
- Yhteinen kulma ACB .
 - Koska janat AB ja DE ovat yhdensuuntaiset, ovat kulmat CED ja CBA samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

Sivun CE vastinsivu on CB ja
sivun DE vastinsivu on AB .

$$\frac{10}{10+x} = \frac{5}{8}$$

Kerrotaan ristiin.

$$5(10+x) = 80$$

$$50 + 5x = 80 \quad | -50$$

$$5x = 30 \quad | :5$$

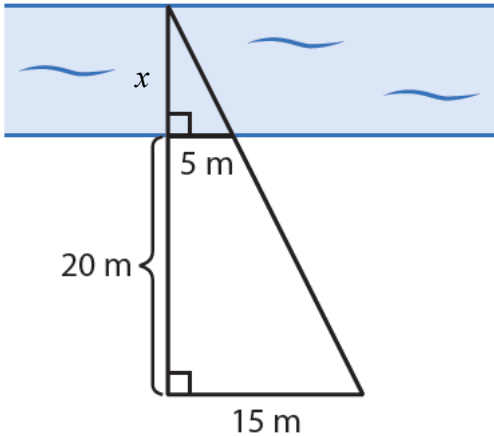
$$x = 6$$

Vastaus

a) $x = 35$

b) $x = 6$

3.4



Kuvan kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kolmioissa on yhteinen terävä kulma.
- Molemmissa kolmioissa on suora kulma.

Merkitään joen leveyttä kirjaimella x .

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan joen leveys.

$$\frac{x}{x+20} = \frac{5}{15} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$x = 10 \text{ (m)}$$

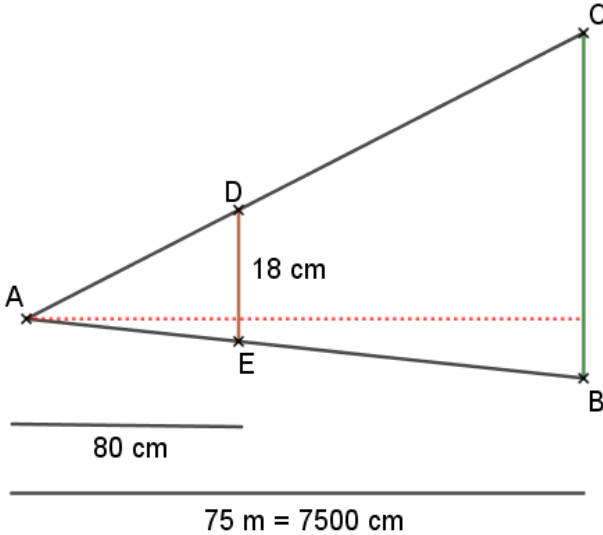
Joen leveys on 10 m.

Vastaus

10 m

3.5

Piirretään kuva, jossa jana DE on kynä ja jana CB on puu.



Kolmiot AED ja ABC ovat yhdenmuotoiset kk -lauseen perusteella.

- Kolmioilla on yhteinen kulma BAC .
- Koska janat ED ja CB ovat yhdensuuntaiset, ovat kulmat DEA ja CBA samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Merkitään puun korkeutta kirjaimella x ja taulukoidaan tiedot.

	Korkeus	Etäisyys
Kynä (cm)	18	80
Puu (cm)	x	7500

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{18} = \frac{7500}{80}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 1687,5(\text{cm})$$

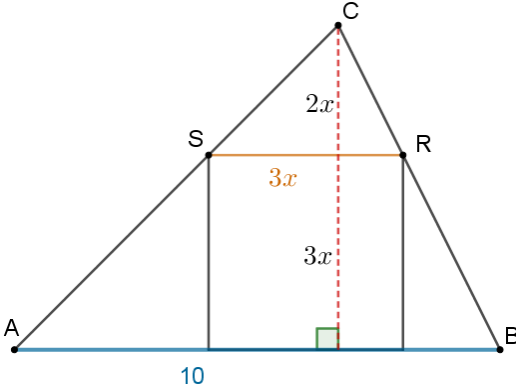
Puun korkeus on $1687,5\text{ cm} = 16,875\text{ m} \approx 17\text{ m}$.

Vastaus

17 m

3.6

Merkitään neliön yläpuolelle jäävän kolmion korkeutta $2x$, jolloin neliön korkeus ja leveys ovat $3x$. Piirretään mallikuva.



Kolmiot SRC ja ABC ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kolmioilla on yhteinen kulma ACB .
- Koska janat SR ja AB ovat yhdensuuntaiset, ovat kulmat BAC ja RSC samankohlaisina kulmina yhtä suuret.

Taulukoidaan tiedot.

	Kanta	Korkeus
Kolmio SRC	$3x$	$2x$
Kolmio ABC	10	$2x + 3x = 5x$

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{3x}{10} = \frac{2x}{5x} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Lasketaan kolmion SRC pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 2x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Vastaus

$$\frac{16}{3}$$

3.7

- a) Mallin mittakaava on mallista mitatun pituuden ja ameebasta mitatun vastinpituuden suhde. Muunnetaan mallin läpimitta mikrometriksi.
 $25\text{ cm} = 250\text{ mm} = 250\,000\ \mu\text{m}$

Määritetään mittakaava.

$$\frac{250\,000\ \mu\text{m}}{150\ \mu\text{m}} = \frac{250\,000}{150} = \frac{5\,000}{3}$$

Mittakaava on siis $5\,000 : 3$.

- b) Mallissa olevat mitat saadaan kertomalla vastaavat ameebasta mitatut mitat mittakaavalla. Suurennuskerroin on siis mittakaavan arvo.

$$\frac{5\,000}{3} = 1\,666,6\dots \approx 1\,700$$

Mallin mitat ovat n. 1700-kertaisia.

- c) Muutetaan ulokkeen mitta mikrometreiksi.
 $7,0\text{ cm} = 70\text{ mm} = 70\,000\ \mu\text{m}$

Merkitään ulokkeen pituutta kirjaimella x ja taulukoidaan tiedot.

	uloke	koko ameeba
Luonnossa (μm)	x	150
Suurennos (μm)	70 000	250 000

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{70\,000} = \frac{150}{250\,000}$$

$$x = 42(\mu\text{m})$$

Ulokkeen pituus on $42\ \mu\text{m}$.

Vastaus

- a) $5\,000 : 3$
b) n. 1700-kertaiseksi
c) $42\ \mu\text{m}$

3.8

- a) Lävistäjän suuntaa tutkimalla havaitaan, että pituudet 3 ja 5 vastaavat toisiaan ja pituudet 6 ja x vastaavat toisiaan.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{x} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$3x = 30 \quad | :3$$

$$x = 10$$

- b) Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan y .

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{16} \quad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$5y = 48 \quad | :5$$

$$y = \frac{48}{5} (= 9\frac{3}{5} = 9,6)$$

- c) Mittakaava on vastinpituuksien suhde.

$$\frac{5}{3} = 5:3 \quad (\text{tai } \frac{3}{5} = 3:5)$$

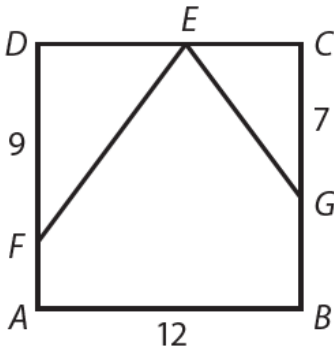
Vastaus

a) $x = 10$

b) $y = \frac{48}{5} (= 9\frac{3}{5} = 9,6)$

c) $5:3$ (tai $3:5$)

3.9



Kolmiot FED ja GCE ovat yhdenmuotoiset kk -lauseen perusteella.

- Kolmioissa on yhtä suuret kulmat DEF ja GEC .
- Molemmissa kolmioissa on suora kulma.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan jana EC pituus. Kulmien sijainteja vertaamalla havaitaan, että GC ja FD ovat vastinjanoja, samoin EC ja ED .

$$\frac{GC}{FD} = \frac{EC}{ED}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{EC}{12 - EC}$$

Kerrotaan ristiin.

$$9EC = 7(12 - EC)$$

$$9EC = 84 - 7EC \quad | +7EC$$

$$16EC = 84 \quad | :16$$

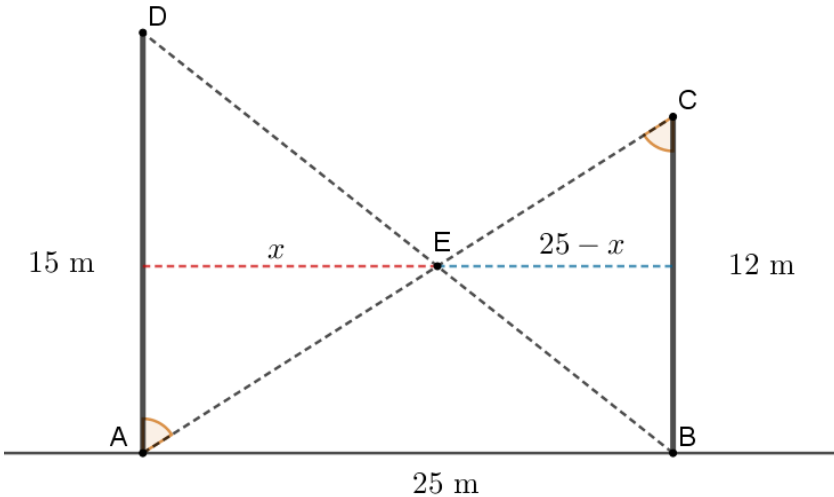
$$EC = \frac{84}{16} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

Vastaus

$$EC = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

3.10

Piirretään kuva.



Kolmiot AED ja CCB ovat yhdenmuotoiset kk -lauseen perusteella.

- Ristikulmat pisteessä E ovat yhtä suuret.
- Koska janat AD ja BC ovat yhdensuuntaiset, ovat kulmat A ja C samankohlaisina kulmina yhtä suuret.

Merkitään pidemmän pylvään ja vajereiden leikkauspisteen välistä etäisyyttä kirjaimella x . Tällöin lyhyemmän pylvään ja leikkauspisteen välinen etäisyys on $25 - x$.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{15} = \frac{25 - x}{12}$$

$$x = \frac{125}{9}$$

$$x = 13,88... \text{ (m)}$$

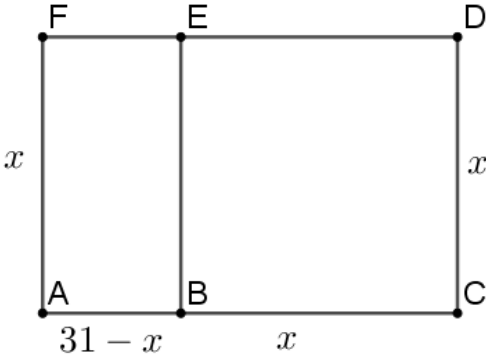
Etäisyys on 14 m.

Vastaus

14 m

3.11

Piirretään kuva.



Jotta suorakulmio $ACDF$ on kultainen suorakulmio, täytyy vastinosien suhteiden olla yhtä suuret suorakulmioissa $ACDF$ ja $ABEF$.

Taulukoidaan tiedot.

	Korkeus	Leveys
$ACDF$	x	31
$ABEF$	$31 - x$	x

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{31 - x} = \frac{31}{x}$$

$$x = -50,15\dots(\text{m}) \quad \text{tai} \quad x = 19,15\dots(\text{m})$$

Tempelin korkeus on positiivinen, joten se on $19,15\dots \text{ m} \approx 19 \text{ m}$.

Vastaus

19 m

3.12

Kartan mittakaava	Todellinen pituus	Pituus kartalla
1 : 20 000	12,5 km	
	190 km	76 cm
1 : 10 000		3,5 cm

Ylin rivi

Muunnetaan todellinen pituus senttimetreiksi.

$$12,5 \text{ km} = 1250000 \text{ cm}$$

Merkitään pituutta kartalla kirjaimella x ja muodostetaan verrantoyhtälö.

$$\frac{1}{20000} = \frac{x}{1250000}$$
$$x = 62,5 \text{ (cm)}$$

Vaihtoehto 2 on oikein.

Keskimmäinen rivi

Mittakaava on vastinpituuksien suhde. Lasketaan kartan mittakaava.

$$\frac{76 \text{ cm}}{190 \text{ km}} = \frac{76 \text{ cm}}{19000000 \text{ cm}}$$
$$= \frac{76}{19000000}$$
$$= \frac{1}{250000}$$
$$= 1 : 250000$$

Vaihtoehto 5 on oikein.

Alin rivi

Merkitään todellista pituutta kirjaimella y ja muodostetaan verrantoyhtälö.

$$\frac{1}{10000} = \frac{3,5}{y}$$
$$y = 35000 \text{ (cm)}$$

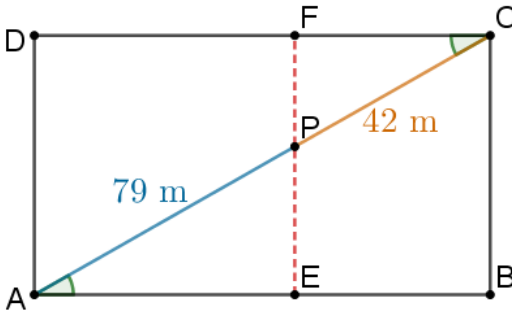
Koska $35000 \text{ cm} = 350 \text{ m}$, vaihtoehto 9 on oikein.

Vastaus

Kartan mittakaava	Todellinen pituus	Pituus kartalla
1 : 20 000	12,5 km	62,5 cm
1 : 250 000	190 km	76 cm
1 : 10 000	350 m	3,5 cm

3.13

a) Piirretään kuva.



Kolmiot AEP ja CFP ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Ristikulmat pisteessä P ovat yhtä suuret.
- Koska janat AB ja DC ovat yhdensuuntaiset, ovat kulmat BAC ja DCA samankohlaisina kulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan PE pituus.

$$\frac{PE}{PF} = \frac{79}{42}$$
$$\frac{PE}{60 - PE} = \frac{79}{42}$$
$$PE = 39,17... \text{ (m)}$$

Pallon etäisyys alemmasta sivurajasta on 39 m.

b) Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan FC pituus.

$$\frac{FC}{EA} = \frac{AP}{CP}$$
$$\frac{FC}{105 - FC} = \frac{42}{79}$$
$$FC = 36,44... \text{ (m)}$$

Pallon etäisyys oikeanpuoleisesta päädystä on 36 m.

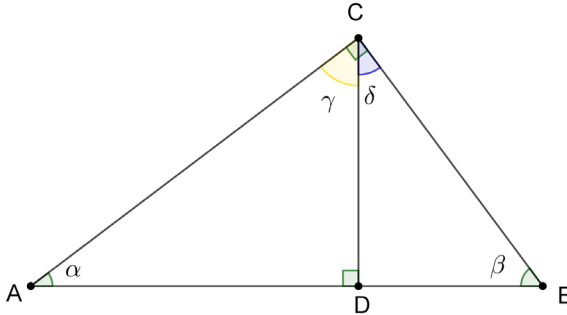
Vastaus

a) 39 m

b) 36 m

3.14

a) Piirretään kuva.



Kolmion kulmasumman perusteella saadaan kolmiosta ACD , että $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$.

Koska γ ja δ ovat komplementtikulmia, niin $\delta = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$

Tällöin kolmiot ABC , ADC ja CDB ovat keskenään yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kaikissa kolmioissa on suora kulma ($\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB$).
- Kaikissa kolmioissa on kulma, jonka suuruus on α ($\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DCB$).

b) Muodostetaan verrantoyhtälö kolmioista ABC ja CBD ja ratkaistaan pituus CD .

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AC}{CD}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{8}{CD}$$

$$10CD = 48 \quad | :10$$

$$CD = \frac{48}{10} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$$

- c) Muodostetaan verrantoyhtälö kolmioista ABC ja ACD ja ratkaistaan pituus AD .

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{8}{AD} = \frac{10}{8}$$

$$10AD = 64 \quad | :10$$

$$AD = \frac{64}{10} = \frac{32}{5}$$

Lasketaan janan DB pituus.

$$DB = AB - AD = 10 - \frac{32}{5} = \frac{50}{5} - \frac{32}{5} = \frac{18}{5}$$

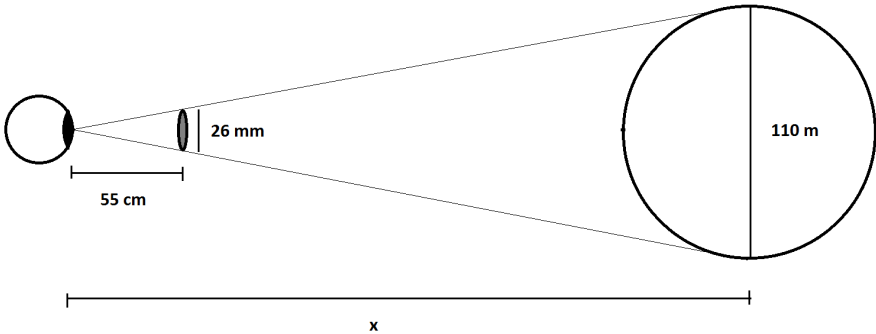
Piste D jakaa sivun AB suhteessa $\frac{32}{5} : \frac{18}{5} = \frac{16}{9} = 16 : 9$.

Vastaus

- a) Yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella: kaikissa suora kulma ja yhtä suuri terävä kulma $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DCB$.
- b) $CD = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$
- c) $16 : 9$

3.15

Käytetään oheisen kuvion merkintöjä.



Kuvan sisäkkäiset kolmiot ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset:

- kolmioilla on yhteinen huippukulma silmän kohdalla
- kolmioiden kantakulmat ovat samankohtaisina yhtä suuret.

Vastinpituudet ovat $26 \text{ mm} = 0,026 \text{ m}$ ja 110 m sekä $55 \text{ cm} = 0,55 \text{ m}$ ja x . Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{0,026}{110} = \frac{0,55}{x}$$

$$x = 2326,92\dots(\text{m})$$

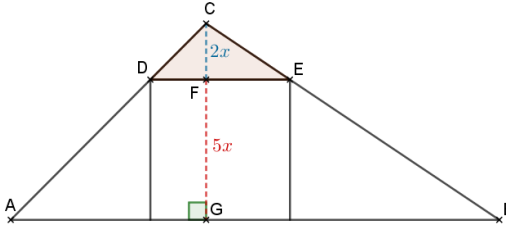
Etäisyys Globen-hallista on $2326,92\dots \text{ m} \approx 2,3 \text{ km}$.

Vastaus

2,3 km

3.16

Piirretään kuva ja merkitään tarvittavia pisteitä ja mittoja.



Kun neliön yläpuolelle jäävän kolmion korkeutta merkitään $2x$, on neliön korkeus ja leveys $5x$.

Kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kolmioilla on yhteinen kulma C .
- Koska janat AB ja DE ovat yhdensuuntaiset, ovat kulmat BAC ja EDC samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan sivun AB pituus suhdeluvun x avulla ilmaistuna.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CF}{CG}$$

$$\frac{5x}{AB} = \frac{2x}{7x}$$

$$AB = \frac{35}{2}x$$

Lasketaan kolmioiden pinta-alojen suhde.

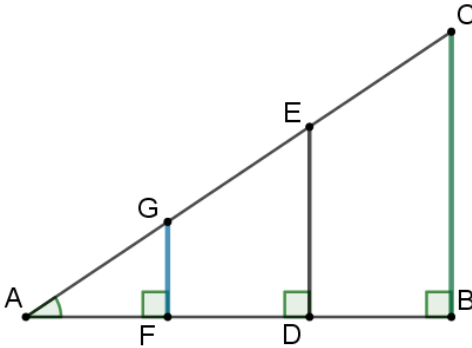
$$\frac{A_{\triangle DEC}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 2x}{\frac{1}{2} \cdot \frac{35}{2}x \cdot 7x} = \frac{4}{49} = 4 : 49$$

Vastaus

4 : 49

3.17

a) Piirretään mallikuva.



Kuvan kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kaikissa kolmioissa on yhteinen kulma A .
- Kaikissa kolmioissa on suora kulma.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan AD pituus.

$$\frac{FG}{DE} = \frac{AF}{AD}$$

$$\frac{1,8}{3,2} = \frac{2,0}{AD}$$

$$AD = 3,5555\dots(\text{m})$$

Lasketaan Helmin etäisyys valaisinpylväästä.

$$AD - AF = 3,5555\dots\text{m} - 2,0\text{m} = 1,55\dots\text{m} \approx 1,6\text{m}$$

b) Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan puun korkeus BC .

$$\frac{BC}{FG} = \frac{AB}{AF}$$

$$\frac{BC}{1,8} = \frac{3,5555\dots + 3,0}{2,0}$$

$$BC = 5,9\dots(\text{m})$$

Puun korkeus on 5,9 m.

Vastaus

a) 1,6 m

b) 5,9 m

3.18

Lasketaan ensin todellinen pituus ja sen jälkeen pituus toisella kartalla.

$$\frac{140}{x} = \frac{1}{250000}$$

$$x = 35000000 \text{ (cm)}$$

ja

$$\frac{y}{35000000} = \frac{1}{800000}$$

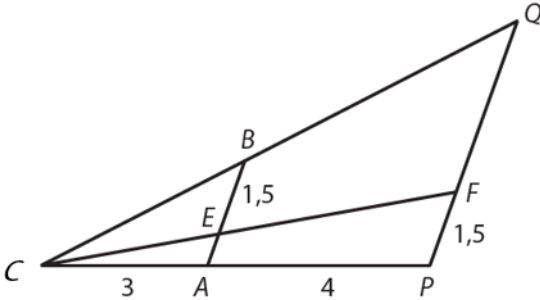
$$y \approx 44 \text{ (cm)}$$

Santtu laski väärin.

Vastaus

Santtu laski väärin. Pituus toisella kartalla olisi 44 cm.

3.19



Kolmiot CAE ja CPF ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kolmioissa on yhteinen kulma C .
- Koska janat AB ja PQ ovat yhdensuuntaiset, kulmat CAE ja CPF ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan AE pituus.

$$\frac{AE}{PF} = \frac{CA}{CP}$$

$$\frac{AE}{1,5} = \frac{3}{7}$$

$$AE = 0,642857\dots$$

Kolmiot CPQ ja CAB ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kolmioissa on yhteinen kulma C .
- Koska janat AB ja PQ ovat yhdensuuntaiset, kulmat CAB ja CPQ ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan PQ pituus.

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{CP}{CA}$$

$$\frac{PQ}{1,5 + 0,642857\dots} = \frac{7}{3}$$

$$PQ = 5$$

Lasketaan janan FQ pituus.

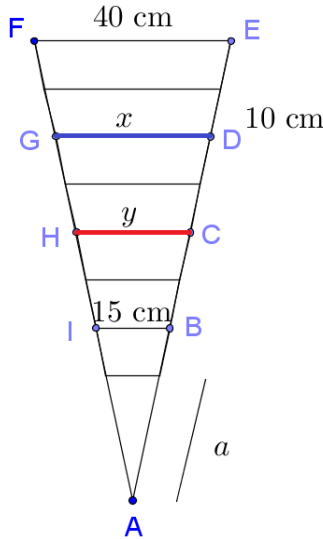
$$FQ = PQ - PF = 5 - 1,5 = 3,5$$

Vastaus

$$FQ = 3,5$$

3.20

Täydennetään kehikko kolmioksi ja käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Kaikki kuvion sisäkkäiset kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoisia kklauseen nojalla, sillä niillä on yhteinen huippukulma A ja samankohtaiset, yhtä suuret kantakulmat (kaikki rimat ovat vaakasuoria).

Ratkaistaan ensin pituus a kolmioiden ABI ja AEF perusteella muodostuvasta verrantoyhtälöstä.

$$\frac{15}{40} = \frac{a + 10}{a + 70}$$
$$a = 26(\text{cm})$$

Muodostetaan sitten verrantoyhtälö kolmioista ADG ja AEF ja ratkaistaan x .

$$\frac{x}{40} = \frac{26 + 50}{26 + 70}$$
$$x = 31,666\dots(\text{cm})$$

Pituus x on n. 32 cm.

Muodostetaan lopuksi verrantoyhtälö kolmioista ACH ja AEF ja ratkaistaan y .

$$\frac{y}{40} = \frac{26 + 30}{26 + 70}$$

$$y = 23,333\dots(\text{cm})$$

Pituus y on noin 23 cm.

(Huom. Pituudet voi ratkaista myös yhtälöryhmästä

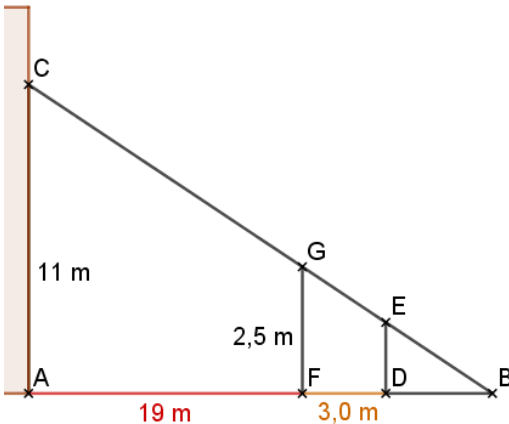
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{15}{40} = \frac{a + 10}{a + 70} \\ \frac{x}{40} = \frac{a + 50}{a + 70} \\ \frac{y}{40} = \frac{a + 30}{a + 70} \end{array} \right.)$$

Vastaus

$$x = 32 \text{ cm}, y = 23 \text{ cm}$$

3.21

Piirretään kuva.



Kolmiot ABC , FBG ja DBE ovat yhdenmuotoiset kk -lauseen perusteella.

- Kolmioissa on yhteinen kulma B .
- Kaikissa kolmioissa on suora kulma.

Muodostetaan verrantoyhtälö kolmioista ABC ja FBG ja ratkaistaan janan DB pituus.

$$\frac{AC}{FG} = \frac{AB}{FB}$$

$$\frac{11}{2,5} = \frac{19 + 3 + DB}{3 + DB}$$

$$DB = 2,588235... \text{ (m)}$$

Muodostetaan verrantoyhtälö kolmioista FBG ja DBE ja ratkaistaan janan DE pituus.

$$\frac{FG}{DE} = \frac{FB}{DB}$$

$$\frac{2,5}{DE} = \frac{3,0 + 2,588235...}{2,588235...}$$

$$DE = 1,1578... \text{ (m)}$$

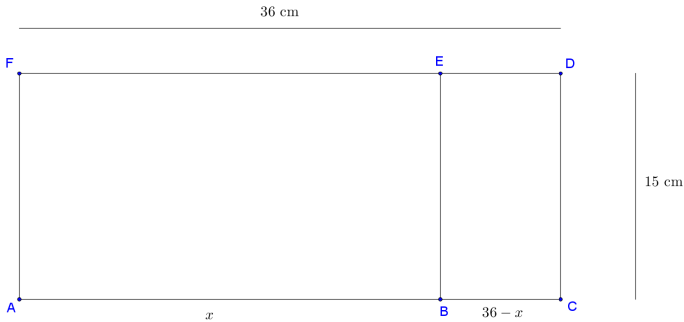
Tulos tarkoittaa, että Mikko ei voi nähdä 3,0 m päässä aidan takana olevaa kohdetta, jonka korkeus on pienempi kuin 1,16 m. Mikko ei siis voi nähdä 105 cm pitkää lasta.

Vastaus

Ei voi.

3.22

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä. Jotta syntyy kaksi nelikulmiota, on oltava $0 < x < 36$.



Pituus x on siis sellainen, että nelikulmiot $ABEF$ ja $CDEB$ ovat yhdenmuotoiset. Tämä voi tapahtua kahdella tavalla:

1) vastinsivuparit ovat AB ja CD sekä BE ja DE

2) vastinsivuparit ovat AB ja BC sekä BE ja CD

Tutkitaan molemmat tilanteet erikseen (kuva mallintaa tapausta 1).

1)

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE}$$
$$\frac{x}{15} = \frac{15}{36 - x}$$

$$x = 8,0501\dots(\text{cm}) \quad \text{tai} \quad x = 27,9498\dots(\text{cm})$$

Saadut ratkaisut ovat toistensa peilikuvat. Jos $x = 8,1$ cm, niin $36 - x = 27,9$ cm ja jos taas $x = 27,9$ cm, niin $36 - x = 8,1$ cm.

2)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{CD}$$
$$\frac{x}{36 - x} = \frac{15}{15}$$

$$x = 18(\text{cm})$$

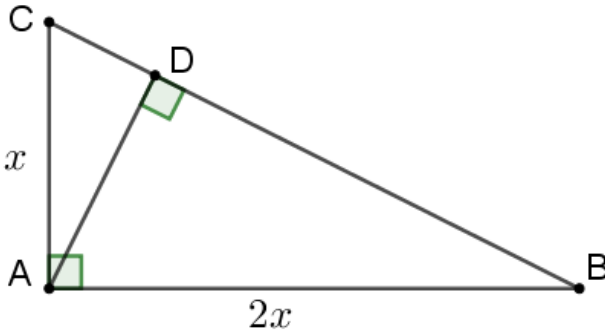
Kun $x = 18$ cm, niin myös $36 - x = 18$ cm, ja tällöin alkuperäinen nelikulmio jakautuu kahteen identtiseen puolikkaaseen.

Vastaus

8,1 cm ja 27,9 cm tai 18,0 cm ja 18,0 cm

3.23

Piirretään kuva.



Kuvan kolmiot ovat kaikki keskenään yhdenmuotoisia kk-lauseen perusteella:

- Kaikissa kolmioissa on suora kulma.
- Kaikissa kolmioissa on yhtä suuri terävä kulma.

(Ks. tehtävän 3.14 ratkaisu.)

Ilmaistaan janojen CD ja DB pituudet janan AD pituuden avulla.

Muodostetaan verrantoyhtälö kolmioista ABC ja DAC .

$$\frac{CD}{x} = \frac{AD}{2x}$$

$$CD = \frac{1}{2} AD$$

Muodostetaan verrantoyhtälö kolmioista ADB ja BDA .

$$\frac{AD}{DB} = \frac{x}{2x}$$

$$DB = 2AD$$

Lasketaan suhde $CD : DB$.

$$\frac{CD}{DB} = \frac{\frac{1}{2} AD}{2AD} = \frac{1}{4} = 1 : 4$$

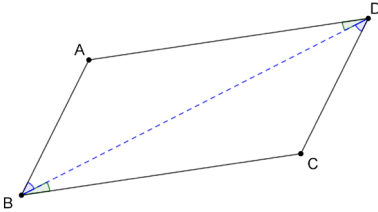
Hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa hypotenuusan suhteessa $1 : 4$ (tai $4 : 1$).

Vastaus

$1 : 4$ (tai $4 : 1$)

3.24

a) Jaetaan suunnikas $ABCD$ lävistäjällä kahdeksi kolmioksi.



Kolmiot ABD ja CDB ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Koska janat AB ja CD ovat yhdensuuntaiset, kulmat DBA ja BDC ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.
- Koska janat AD ja CB ovat yhdensuuntaiset, kulmat ADB ja CBD ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

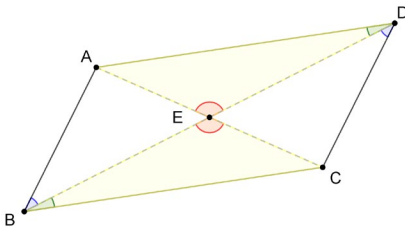
Kolmion ABD sivun BD vastinsivu kolmiossa CDB on DB .

Kolmioiden välinen mittakaava on tällöin $\frac{BD}{DB} = 1 = 1:1$. Tämä

tarkoittaa, että kolmiot ovat yhtenevät ja kaikki vastinpituudet ovat yhtä suuria. Sivun AD on yhtä pitkä kuin vastinsivu CB ja sivu AB on yhtä pitkä kuin vastinsivu CD .

Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat siis yhtä pitkät. \square

b) Piirretään kuva.

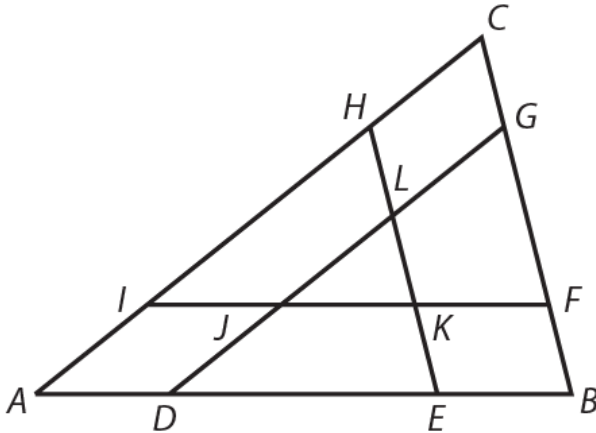


Kolmiot ADE ja CBE ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella, sillä niissä on yhtä suuret samankohtaiset kulmat ADE ja CBE (ks. a-kohta) sekä yhtä suuret ristikulmat AED ja CEB .

a-kohdan perusteella vastinsivut AD ja CB ovat yhtä pitkät, joten kaikki muutkin vastinsivut ovat yhtä pitkiä. Tämä tarkoittaa, että $AE = CE$ ja $DE = BE$. Lävistäjien leikkauspiste E puolittaa siis molemmat lävistäjät. \square

3.25

a) Piirretään kuva.



Kolmiot ABC ja AEH ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kolmioilla on yhteinen kulma A .
- Samankohtaiset kulmat E ja B ovat yhtä suuret, koska sivut BC ja EH ovat yhdensuuntaiset.

Muodostetaan verrantoyhtälö.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BC} \qquad EH = \frac{3}{4} BC$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{\frac{3}{4} BC}{BC}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{3}{4} \quad | \cdot AB$$

$$AE = \frac{3}{4} AB$$

Vastaavasti kolmiot ABC ja DBG ovat yhdenmuotoiset k-k-lauseen perusteella.

- Kolmioilla on yhteinen kulma B .
- Samankohtaiset kulmat A ja D ovat yhtä suuret, koska sivut AC ja DG ovat yhdensuuntaiset.

Muodostetaan verrantoyhtälö.

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DG}{AC} \qquad DG = \frac{3}{4} AC$$

$$\frac{DB}{AB} = \frac{\frac{3}{4} AC}{AC}$$

$$\frac{DB}{AB} = \frac{3}{4} \quad | \cdot AB$$

$$DB = \frac{3}{4} AB$$

Saatujen yhtälöiden perusteella saadaan seuraavat pituudet.

$$AB = AE + EB \qquad AE = \frac{3}{4} AB$$

$$AB = \frac{3}{4} AB + EB \quad | -\frac{3}{4} AB$$

$$\frac{1}{4} AB = EB$$

ja

$$AB = AD + DB \qquad DB = \frac{3}{4} AB$$

$$AB = AD + \frac{3}{4} AB \quad | -\frac{3}{4} AB$$

$$\frac{1}{4} AB = AD$$

Siis, $AD = EB$.

Nelikulmiot $ADJI$ ja $EBFK$ ovat suunnikkaita, sillä niiden kummatkin vastakkaiset sivut ovat pareittain yhdensuuntaiset. Tällöin (tehtävän 3.24 perusteella) $AD = IJ$ ja $EB = KF$

Yhdistämällä nämä tiedot saadaan, että
 $IJ = AD = EB = KF$. \square

- b) Lasketaan lauseke janan JK pituudelle hyödyntämällä tehtävänannon ja a-kohdan ratkaisun aikana pääteltyjä tietoja.

$$\begin{aligned} JK &= IF - IJ - KF & IF &= \frac{3}{4}AB \text{ ja } IJ = AD \text{ ja } KF = EB \\ &= \frac{3}{4}AB - AD - EB & AD &= \frac{1}{4}AB \text{ ja } EB = \frac{1}{4}AB \\ &= \frac{3}{4}AB - \frac{1}{4}AB - \frac{1}{4}AB \\ &= \frac{1}{4}AB \end{aligned}$$

Koska $JK = \frac{1}{4}AB$, niin $\frac{JK}{AB} = \frac{1}{4}$.

Vastaus

b) $\frac{JK}{AB} = \frac{1}{4}$